Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Р. М. Кашаев, О. Тирккконен

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБЪЕМНОЙ ГИПОТЕЗЫ ДЛЯ ТОРИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Введение

В недавней работе [6] Х. Мураками и Д. Мураками показали, что q-дилогарифмический инвариант узлов, введенный в работах [1, 2], является специальным случаем крашеного инварианта (полинома) Джонса, ассоциированного с квантовой группой $SU(2)_q$. Используя связь q-дилогарифмического инварианта с гиперболическим объемом дополнения узла, обнаруженную в работе [3], они также предложили *объемную гипотезу*: для любого узла вышe упомянутая спецификация крашеного инварианта Джонса в определенном пределе дает симплициальный объем (или норму Громова) узла. Замечательным следствием этой гипотезы является то, что узел тривиален тогда и только тогда, когда все его крашеные инварианты Джонса тривиальны, см. [6].

Цель этой статьи состоит в том, чтобы доказать объемную гипотезу в случае торических узлов. Для того, чтобы сформулировать наш результат, сначала напомним формулу для крашеного инварианта Джонса, следуя работам [5, 7].

Крашеный инвариант Джонса $J_{K,k}(h)$ ленточного узла K – это лорановский полином по отношению к переменной $q = e^h$, зависящий от цвета k – размерности $SU(2)_q$-модуля. Пусть m, p являются взаимно простыми положительными целыми числами. Обозначим через $L \equiv O_{m,p}$ торический узел типа (m, p), полученный как кабель типа (m, p) из тривиального узла с нулевым скручиванием (см. [5] для точного определения). Тогда, краше-

Работа Р.М.К. поддержана Академией Финляндии и частично грантом РФФИ 99-01-00101.

ный инвариант Джонса узла L имеет следующую явную форму:

$$2\sinh(kh/2)\frac{J_{L,k}(h)}{J_{O,k}(h)} = \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{r=-(k-1)/2}^{(k-1)/2}\epsilon e^{hmpr^2+hr(m+\epsilon p)+\epsilon h/2}, \qquad (1)$$

где O является тривиальным узлом с нулевым скручиванием, а

$$J_{O,k}(h) = \sinh(kh/2)/\sinh(h/2).$$

Согласно результату Х. Мураками и Д. Мураками [6], q-дилогарифмический инвариант $\langle L\rangle_k$ является следующей спецификацией крашеного инварианта Джонса (с точностью до умножения на корень k-ой степени из единицы):

$$\langle L\rangle_k \equiv \lim_{h\to 2\pi\mathrm{i}/k}\frac{J_{L,k}(h)}{J_{O,k}(h)}. \qquad (2)$$

В дальнейшем мы будем называть ее *гиперболическая спецификация*. Наш результат описывает асимптотическое разложение величины $\langle L\rangle_k$, когда $k\to\infty$.

Теорема. *Гиперболическая спецификация* (2) *крашеного инварианта Джонса для торического узла L типа (m,p) имеет следующее асимптотическое разложение при больших k:*

$$\langle L\rangle_k e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2k}\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)} = \sum_{j=1}^{mp-1}\langle L\rangle_k^{(j)} + \langle L\rangle_k^{(\infty)}, \qquad (3)$$

где

$$\langle L\rangle_k^{(j)} = \\ = 2(2mp/k)^{-3/2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(-1)^{(k-1)j}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi k j^2}{2mp}}j^2\sin(\pi j/m)\sin(\pi j/p), \qquad (4)$$

и

$$\langle L\rangle_k^{(\infty)} = \frac{1}{4}e^{\mathrm{i}\pi kmp/2}\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{2kmp}\right)^{n-1}\left.\frac{\partial^{2n}(x\tau_L(x))}{\partial x^{2n}}\right|_{x=0}, \qquad (5)$$

см. ниже формулу (6) *для определения функции $\tau_L(x)$.*

Из уравнений (3)–(5) легко увидеть, что $|\langle L\rangle_k| \sim k^{3/2}$, $k\to\infty$.

Следствие. *Объемная гипотеза справедлива для торических узлов, т.е.*

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}\log|\langle L\rangle_k| = 0.$$

В следующем разделе мы доказываем теорему, используя одно интегральное представление для гауссовой суммы в формуле (1).

Благодарности. Мы признательны Д. Борисову, Т. Кэрки и Х. Мураками за полезные обсуждения. Р. М. К. благодарит Л. Д. Фаддеева за его постоянную поддержку при выполнении этой работы.

2. Доказательство теоремы

Начнем с определения следующей функции:

$$\tau_L(z) \equiv 2\sinh(mz)\sinh(pz)/\sinh(mpz), \tag{6}$$

которая связана с полиномом Александера узла L,

$$\Delta_L(t) \equiv \frac{(t^{mp/2}-t^{-mp/2})(t^{1/2}-t^{-1/2})}{(t^{m/2}-t^{-m/2})(t^{p/2}-t^{-p/2})},$$

по формуле

$$\tau_L(z) = 2\sinh(z)/\Delta_L(e^{2z}).$$

Согласно результату Милнора [4] и Тураева [9], функция $\tau_L(z)$ описывает кручение Райдемайстера дополнения узла.

Лемма 1. *Для любого действительного ϕ, удовлетворяющего условию $\Re h e^{-2\mathrm{i}\phi} > 0$, формула (1) имеет следующее интегральное представление:*

$$\begin{aligned} 2\sinh(kh/2)\frac{J_{L,k}(h)}{J_{O,k}(h)} &= \\ = \sqrt{\frac{mp}{\pi h}}e^{-\frac{h}{4}\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)}\int_{C_\phi} dz\, e^{mp\left(kz-\frac{z^2}{h}\right)}\,\tau_L(z),\end{aligned} \tag{7}$$

где контур интегрирования C_ϕ есть образ действительной оси при отображении

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto xe^{\mathrm{i}\phi}\in C_\phi\subset\mathbb{C}, \tag{8}$$

с индуцированной ориентацией.

Доказательство. Сначала заметим, что для любого ненулевого комплексного числа $h \neq 0$ и любого комплексного числа w, выполняется следующая гауссова интегральная формула:

$$\sqrt{\pi h}e^{hw^2} = \int\limits_{C_\phi} dz\, e^{-z^2/h+2wz}, \tag{9}$$

где выбор контура интегрирования C_ϕ, описанный в формулировке теоремы, диктуется условием сходимости интеграла, а квадратный корень понимается в смысле аналитического продолжения главной ветви при положительных значениях переменной h.

Стартуя с правой части уравнения (1), соберем члены, содержащие переменную суммирования r, в полный квадрат:

$$e^{\frac{h}{4}\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)}\,\text{r.h.s.}\,(1) = \sum_{\epsilon=\pm1}\epsilon\sum_{r=0}^{k-1} e^{hmp\left(r-\frac{k-1}{2}+\frac{m+\epsilon p}{2mp}\right)^2}$$

– теперь формула (9) может быть использована для выражения r-зависимой экспоненты –

$$= \sum_{\epsilon=\pm1}\epsilon\sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{\sqrt{\pi hmp}}\int\limits_{C_\phi} dz\, e^{-\frac{z^2}{hmp}+z(2r-k+1+p^{-1}+\epsilon m^{-1})}$$

– с последующим вычислением суммирований –

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi hmp}}\int\limits_{C_\phi} dz\, e^{-\frac{z^2}{hmp}+z/p}\sinh(kz)\sinh(z/m)/\sinh(z)$$

– экспонента $\exp(z/p)$ в подинтегральном выражении, будучи умноженной на нечетную функцию переменной z (по отношению к подстановке $z \leftrightarrow -z$), может быть заменена на нечетную часть –

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi hmp}}\int\limits_{C_\phi} dz\, e^{-\frac{z^2}{hmp}}\sinh(kz)\sinh(z/m)\sinh(z/p)/\sinh(z)$$

– обращая предыдущее рассуждение, заменим функцию $\sinh(kz)$ экспонентой –

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi hmp}}\int\limits_{C_\phi} dz\, e^{-\frac{z^2}{hmp}+kz}\sinh(z/m)\sinh(z/p)/\sinh(z),$$

– а также растянем переменную интегрирования $(z \longrightarrow zmp)$ –

$$= \sqrt{\frac{mp}{\pi h}} \int\limits_{C_\phi} dz\, e^{mp\left(kz - \frac{z^2}{h}\right)} \tau_L(z),$$

где мы воспользовались обозначением (6).

Представление (7) похоже на формулу Розанского (2.2) из работы [8], хотя последняя понимается только в смысле асимптотического разложения в степенной ряд.

Лемма 2. *Гиперболическая спецификация* (2) *крашеного инварианта Джонса для торических узлов имеет следующее интегральное представление*

$$2\langle L\rangle_k = (mpk/2)^{3/2} e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2k}\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}+\frac{k}{2}\right)} \int\limits_{C_\phi} dz\, e^{\pi mpk(z+\frac{\mathrm{i}}{2}z^2)} z^2 \tau_L(\pi z), \qquad (10)$$

где контур интегрирования C_ϕ *определен в* (8) *с ограничением* $0 < \phi < \pi/2$.

Доказательство. Левая сторона уравнения (7) зануляется при $h = 2\pi\mathrm{i}/k$ из-за множителя $\sinh(kh/2)$. Это означает, что интеграл в правой части также зануляется. Дифференцируя по отношению к переменной h одновременно sinh-функцию в левой части и интеграл в правой части уравнения (7), полагая затем $h = 2\pi\mathrm{i}/k$ и растягивая переменную интегрирования на π, мы можем переписать результат в виде уравнения (10).

[Доказательство теоремы]. При больших k можно воспользоваться методом перевала для вычисления интеграла в формуле (10). Единственная стационарная точка при $z = \mathrm{i}$ отделена от контура интегрирования конечным числом полюсов функции $\tau_L(\pi z)$, которые расположены в точках $z_j \equiv \mathrm{i}j/mp$, $0 < j < mp$. Таким образом, принимая во внимание сходимость на бесконечности, мы можем сдвинуть контур C_ϕ на мнимую единицу и добавить интегрирование вдоль замкнутого контура, окружающего точки z_j против часовой стрелки. Интегрирование вдоль сдвинутого контура C_ϕ может быть преобразовано с помощью линейной замены переменной интегрирования $z \to z + \mathrm{i}$:

$$\int\limits_{\mathrm{i}+C_\phi} dz\, e^{\pi mpk(z+\frac{\mathrm{i}}{2}z^2)} z^2 \tau_L(\pi z) =$$

$$= e^{\mathrm{i}\pi mpk/2} \int\limits_{C_\phi} dz\, e^{\mathrm{i}\pi mpkz^2/2}(z+\mathrm{i})^2 \tau_L(\pi z + \mathrm{i}\pi)$$

$$= -2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi mpk/2} \int\limits_{C_\phi} dz\, e^{\mathrm{i}\pi mpkz^2/2} z\tau_L(\pi z),$$

где в последней строчке мы использовали свойство (квази-) периодичности sinh-функции, взаимную простоту чисел m и p, а также выкинули из подинтегрального выражения нечетные по отношению к смене знака $z \leftrightarrow -z$ слагаемые. Теперь, полученная формула непосредственно ведет к формуле (3) асимптотического разложения выражения $\langle L\rangle_k^{(\infty)}$, если воспользоваться разложением Тэйлора функции $z\tau_L(\pi z)$ в точке $z = 0$, а затем вычислить гауссовы интегралы. Остальные слагаемые в уравнении (3) возникают в результате вычисления добавленного контурного интеграла методом вычетов.

Литература

1. R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm as a 6j-symbol.* — Modern Phys. Lett. A **9**, No. 40 (1994), 3757–68.
2. R. M. Kashaev, *A link invariant from the quantum dilogarithm.* — Modern Phys. Lett. A **10**, No. 19 (1995), 1409–18.
3. R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm.* — Lett. Math. Phys. **39**, No. 3 (1997), 269–75.
4. J. Milnor, — Ann. of Math. **76** (1962), 137.
5. H. R. Morton, *The coloured Jones function and Alexander polynomial for torus knots.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **117**, 1 (1995), 129–35.
6. H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot.* math.GT/9905075.
7. M. Rosso and V. Jones, *On the invariants of torus knots derived from quantum groups J. Knot Theory Ramifications.*
8. L. Rozansky, *Higher order terms in the Melvin–Morton expansion of the colored Jones polynomial.* q-alg/9601009.
9. V. G. Turaev, — Russ. Math. Surv. **41** (1986), 199.

Kashaev R. M., Tirkkonen O. Proof of the volume conjrcture for torus knots.

The volume conjecture, formulated recently by H. Murakami and J. Murakami, is proved for the case of torus knots.

Поступило 28 декабря 1999 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kashaev@pdmi.ras.ru

Исследовательский
центр Нокиа,
P.O. Box 407, FIN-00045
Группа Нокиа, Финляндия
E-mail: olav.tirkkonen@nokia.com