Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

С. М. Сергеев

КВАНТОВЫЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

Введение

Сюжетом данных записок является некоторый класс операторнозначных матриц, называемых матрицами коэффициентов квантовой вспомогательной линейной задачи [1–3].

Обсуждаемая линейная задача возникает на вспомогательных двумерных графах, образованных ориентированными прямыми линиями, т.е. на двумерных решетках произвольной формы, вершины которых имеют координационное число 4. На решетке определяется два типа объектов: с каждой клеткой s ("site") решетки ассоциируется некоторая линейая форма ϕ_s^*, а с каждой вершиной v ("vertex") ассоциируются набор объектов u_v, w_v и κ_v, причем все κ_v являются $\mathcal{C}$-числовыми параметрами, а элементы $\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v$ образуют локальную алгебру Вейля:

$$\mathrm{u}_v\, \mathrm{w}_v \;=\; q\; \mathrm{w}_v\, \mathrm{u}_v\;,$$

$$\text{и} \tag{1}$$

$$[\mathrm{u}_v, \mathrm{u}_{v'}] \;=\; [\mathrm{w}_v, \mathrm{w}_{v'}] \;=\; [\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_{v'}] \;=\; 0\;, \quad \forall\; v \neq v'\;.$$

Единственным правилом построения вспомогательной линейной задачи является правило построения вершинной линейной формы f_v^*, показанное на рисунке (1). На этом рисунке a, b, c, d обозначают клетки, окружающие вершину v, а элементы $\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v, \kappa_v$ используются в качестве коэффициентов при определении f_v^* как

До апреля 2000 г.: Филиал Института Ядерной Физики СО РАН, Протвино, Россия.

линейной комбинации клеточных близлежащих $\phi^*_{a,b,c,d}$. По смыслу, очевидно, все линейные формы суть элементы формального левого модуля прямого произведения всех вейлевских алгебр. Сама же линейная задача возникает как весь набор вершинных уравнений $\{f^*_v = 0\}$, которые надлежит понимать как систему уравнений на клеточные ϕ^*_s.

Если мы имеем дело с конечной решеткой с периодическими граничными условиями, то, очевидно, количество вершин совпадает с количеством клеток,

$$\# v = \# s = \Delta , \tag{2}$$

и поэтому система $\{f^*_v = 0\}$ является системой из Δ уравнений на Δ неизвестных. Поскольку эта система уравнений линейна по своей структуре, то она определяет матрицу коэффициентов, естественно набираемую из каждого уравнения типа приведенного на рисунке (1). Эта матрица и есть матрица коэффициентов линейной задачи.

Отметим одно из главных свойств матрицы коэффициентов: по причине локальности квантовые коэффициенты, относящиеся к различным вершинам, всегда коммутируют. На матричном языке это означает, что элементы различных столбцов матрицы коэффициентов всегда коммутируют.

Смысл введения вспомогательной линейной системы заключается в том, что ее можно рассматривать как представление нулевой кривизны. Пусть дан некоторый граф G, наделенный своей системой $\{\phi^*_s, \mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v\}$. Смещением некоторых линий, образующих данный G, можно получить иной граф G', который естественно наделить своей системой $\{\phi^{*\prime}, \mathrm{u}'_v, \mathrm{w}'_v\}$. Ключевым является следующий факт: условие линейной эквивалентности систем $\{f^*_v = 0\}$ для G и $\{f^{*\prime}_v = 0\}$ для G', доопределяемое некоторым образом для случая некоммутативных коэффициентов, однозначно фиксирует отображение $\{\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v\} \mapsto \{\mathrm{u}'_v, \mathrm{w}'_v\}$, при котором операторнозначные коэффициенты графа G' являются рациональными функциями операторно-значных коэффициентов исходного графа G. Более того, отображение явным образом сохраняет структуру локальной алгебры Вейля (1). Наличие такого отображения, его однозначность и каноничность позволяют строить квантовые интегрируемые модели [3, 2].

Для таких моделей вспомогательная линейная система играет первостепенную роль. Основным ее приложением является то, что формальный определитель матрицы коэффициентов (с точностью до некоторой нормировки) является производящим функционалом для инвариантов отображения $G \mapsto G'$, т.е. для интегралов движения. В случае же, когда параметр квантовой деформации q, фигурирующий в определении алгебры Вейля, является корнем из единицы, $q^N = 1$, и алгебра Вейля имеет конечномерные представления, в которых оператор отображения $\{\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v\} \mapsto \{\mathrm{u}'_v, \mathrm{w}'_v\}$ также может быть сделан конечным, на квантовый определитель возникает универсальное функциональное уравнение, позволяющее вычислять спектр интегралов движения [4]. Исследованию матриц коэффициентов и строгому выводу функционального уравнения и посвящена эта заметка.

Исследование свойств матриц коэффициентов мы разделили на два этапа. Сперва мы опишем наиболее общие их свойства, следующие из локальности алгебры коэффициентов. Затем же мы сосредоточимся на конечномерном случае, и основным результатом нашей работы будет строгий вывод функционального уравнения.

1. Матрицы класса $\mathcal{L}$ и их свойства

Итак, во введении была описана система линейных соотношений, коэффициенты которой являются некоммутативными объектами. Матрица коэффициентов линейной задачи является $\Delta \times \Delta$ матрицей, коэффициенты которой некоммутативны. В этом разделе мы изучим общие свойства матриц с некоммутативными матричными элементами, но такими, что матричные элементы их разных столбцов коммутируют. Это свойство положим в основу определения нашего основного объекта, для которого будут формулироваться леммы и теоремы данного раздела.

Определение 1. *Пусть $\mathcal{L}$ – класс матриц размером $\Delta \times \Delta$,*

$$\ell \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \ell = ||\ell_{s,v}|| , \quad s, v = 1, ..., \Delta , \tag{3}$$

таких, что матричные элементы $\ell_{s,v}$ являются образующими некоторого (некоммутативного) кольца с единицей, но так, что элементы разных столбцов v и v' всегда коммутируют:

$$\ell_{s,v} \cdot \ell_{s',v'} = \ell_{s',v'} \cdot \ell_{s,v} \quad \forall\, s, s', v, v' : v \neq v' . \tag{4}$$

Смысл этого определения и обозначений очевиден: матрицы коэффициентов квантовой линейной задачи принадлежат классу $\mathcal{L}$, а используемые матричные индексы обозначают s-клетка, v-вершина.

Определение 2. *Квантовым определителем матрицы $\ell \in \mathcal{L}$ называется элемент кольца $\{\ell_{s,v}\}$ следующего вида:*

$$\mathrm{J} \;=\; \det(\ell) \;=\; \sum_{\sigma} (-)^{\sigma} \prod_{s} \ell_{s,v=\sigma(s)} \;, \tag{5}$$

где σ – элемент группы перестановок Δ индексов. Элемент J хорошо определен по причине коммутативности различных столбцов, что приводит к коммутативности всех множителей в произведении.

Определение 3. *Матрицу $\ell \in \mathcal{L}$ будем называть невырожденной, если ее квантовый определитель обратим:*

$$\exists\ \mathrm{J}^{-1} \;:\; \det(\ell) \cdot \mathrm{J}^{-1} \;=\; 1 \;. \tag{6}$$

Лемма 1. *Для любой невырожденной матрицы из рассматриваемого класса существует матрица, обратная ей справа:*

$$\forall\ \ell \in \mathcal{L}\ \ \exists\ \ell^{-1} \;:\; \ell \cdot \ell^{-1} \;=\; 1 \;. \tag{7}$$

Доказательство. Коммутативность элементов различных столбцов матрицы $\ell \in \mathcal{L}$ приводит к тому, что не только формальный квантовый определитель, но и квантовые алгебраические дополнения хорошо определены. Пусть $A_{v,s}$ – алгебраическое дополнение к элементу $\ell_{s,v}$:

$$\mathrm{J} \;=\; \sum_{v} \ell_{s,v}\, A_{v,s} \quad \forall\, s \;. \tag{8}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{v} \ell_{s',v}\, A_{v,s} \;, \quad s \;\neq\; s' \;. \tag{9}$$

По смыслу эта сумма есть определитель матрицы, в которой s-я строка заменена на s'-ю. Столбцы такой матрицы по-прежнему коммутативны, а по причине совпадения двух строк ее определитель тождественно равен нулю. Следовательно,

$$\ell \cdot \ell^{-1} = 1\,, \quad \left(\ell^{-1}\right)_{v,s} = A_{v,s} \cdot \mathrm{J}^{-1}\,. \tag{10}$$

□

Лемма 2. *Для любой невырожденной $\ell \in \mathcal{L}$ матрица $\ell^{(2)}$ размера $\Delta(\Delta-1)/2 \times \Delta(\Delta-1)/2$, задаваемая формулой*

$$\ell^{(2)}_{s,s'|v,v'} = \ell_{s,v}\,\ell_{s',v'} - \ell_{s,v'}\,\ell_{s',v}\,, \quad v < v'\,, \;\; s < s' \tag{11}$$

где обозначения $v < v'$ и $s < s'$ подразумевают некоторое упорядочение пар индексов, также оратима справа.

Доказательство. Проанализируем матрицу вторых алгебраических дополнений, определяемую формулой

$$\mathrm{J} = \sum_{v<v'} \left(\ell_{s,v}\,\ell_{s',v'} - \ell_{s,v'}\,\ell_{s',v}\right) \cdot A^{(2)}_{v,v'|s,s'}\,, \quad \forall\; s,s' \,:\, s < s'\,, \tag{12}$$

где, по причине упорядоченности номеров матричных элементов в определении детерминанта, возникло упорядочение $v < v'$ и $s < s'$ в определении матрицы вторых алгебраических доплонений. Выпишем сумму

$$\ell^{(2)}_{s,s'|v,v'}\,A^{(2)}_{v,v'|t,t'} \tag{13}$$

и раскроем определение $\ell^{(2)}$. Проводя в получившемся выражении рассуждение о совпадающих строках, аналогичное проделанному при доказательстве леммы (1), сразу же заключаем, что

$$\ell^{(2)} \cdot \ell^{(2)-1} = 1\,, \quad \left(\ell^{(2)-1}\right)_{v,v'|s,s'} = A^{(2)}_{v,v'|s,s'}\,\mathrm{J}^{-1}\,. \tag{14}$$

□

Следующая теорема представляет исключительную важность для всех дальнейших построений.

Теорема 1. *Решения $\mathrm{z}_s(\varepsilon)$ системы линейных уравнений*

$$\sum_s \mathrm{z}_s\,\ell_{s,v} = \varepsilon_v \quad \forall\, v\,, \tag{15}$$

где ε_v – числа и $\ell \in \mathcal{L}$ – невырожденна, коммутативны:

$$\mathrm{z}_s(\varepsilon) \cdot \mathrm{z}_{s'}(\varepsilon) = \mathrm{z}_{s'}(\varepsilon) \cdot \mathrm{z}_s(\varepsilon)\,. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $s < s'$. Рассмотрим

$$Z_{v,v'} \;=\; \sum_{s<s'} \left(\mathrm{z}_s \mathrm{z}_{s'} \,-\, \mathrm{z}_{s'} \mathrm{z}_s\right) \,\cdot\, \ell^{(2)}_{s,s'|v,v'} \,. \tag{17}$$

Раскрывая скобки под знаком суммы и производя переобозначение индексов суммирования, приводим $Z_{v,v'}$ к виду

$$Z_{v,v'} \;=\; \sum_{\forall s,s'} \left(\mathrm{z}_s \mathrm{z}_{s'} \,-\, \mathrm{z}_{s'} \mathrm{z}_s\right) \,\cdot\, \ell_{s,v}\, \ell_{s',v'} \,. \tag{18}$$

Поскольку в этой сумме $v \neq v'$, то суммы по s, s' берутся сразу:

$$Z_{v,v'} \;=\; \sum_{s} \mathrm{z}_s\, \varepsilon_{v'}\, \ell_{s,v} \;-\; \sum_{s'} \mathrm{z}_{s'}\, \varepsilon_v\, \ell_{s',v'} \,. \tag{19}$$

Далее, поскольку ε – числа, то тождественно получается

$$Z_{v,v'} \;=\; \varepsilon_v \varepsilon_{v'} \,-\, \varepsilon_{v'} \varepsilon_v \;=\; 0\,. \tag{20}$$

Это в свою очередь, в силу обратимости матрицы $\ell^{(2)}$, лемма (2), означает

$$\mathrm{z}_s\, \mathrm{z}_{s'} \,-\, \mathrm{z}_{s'}\, \mathrm{z}_s \;=\; 0\,. \tag{21}$$

□

Утверждение теоремы (1) эквивалентно утверждению о следующей алгебре квантовых алгебраических дополнений: $\forall\ v, v', s, s'$

$$\begin{aligned} &A_{v,s}\mathrm{J}^{-1}A_{v',s'}\mathrm{J}^{-1} \,+\, A_{v',s}\mathrm{J}^{-1}A_{v,s'}\mathrm{J}^{-1} \\ &\qquad = A_{v,s'}\mathrm{J}^{-1}A_{v',s}\mathrm{J}^{-1} \,+\, A_{v',s'}\mathrm{J}^{-1}A_{v,s}\mathrm{J}^{-1}\,, \end{aligned} \tag{22}$$

и в частности, при $v' = v$,

$$A_{v,s}\mathrm{J}^{-1}A_{v,s'}\mathrm{J}^{-1} \;=\; A_{v,s'}\mathrm{J}^{-1}A_{v,s}\mathrm{J}^{-1}\,. \tag{23}$$

Эти соотношения получаются варьированием $\mathrm{z}_s\mathrm{z}_{s'} - \mathrm{z}_{s'}\mathrm{z}_s = 0$ по $\varepsilon_v\,,\ \varepsilon_{v'}$.

Пусть $\ell \,\in\, \mathcal{L}$ не обязательно невырожденна. Рассмотрим недоопределенную систему векторных уравнений

$$\sum_s \phi^*_s \,\cdot\, \ell_{s,v} \;=\; 0 \quad \forall\ v \,\neq\, v_0\,, \tag{24}$$

где все ϕ^*_s принадлежат левому модулю кольца $\{\ell_{s,v}\}$. Предположим, что для данного v_0 существует s_0, такой, что алгебраическое дополнение A_{v_0,s_0} обратимо. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Общее решение системы* (24) *для произвольной* $\ell \in \mathcal{L}$ *такой, что* $\exists\, v_0, s_0 : A_{v_0,s_0}$ *обратима, имеет вид*

$$\phi_s^* \;=\; \phi_0^* \cdot \mathrm{z}_{s,s_0}\;, \tag{25}$$

где элементы z_{s,s_0} *коммутативны при разных* s. *Кроме того, при описанных условиях на* ℓ *всегда имеет место соотношение*

$$\mathrm{z}_{s,s_0}\,\mathrm{J} \;=\; \mathrm{J}\,\widetilde{\mathrm{z}}_{s,s_0}\;. \tag{26}$$

Доказательство. Предположим сначала, что ℓ невырождена. Помножим (24) справа на алгебраические дополнения $A_{v,s}$ и просуммируем по v. Получим

$$0 \;=\; \phi_s^*\,\mathrm{J} \;-\; f_{v_0}^*\,A_{v_0,s}\;, \tag{27}$$

где возникло “недостающее” векторное уравнение $f_{v_0}^* = \sum_s \phi_s^*\,\ell_{s,v_0}$. В предположении о невырожденности ℓ и об обратимости A_{v_0,s_0}, сравнивая уравнения (27) для s и s_0, получаем

$$\phi_s^* \;=\; \phi_{s_0}^*\,\mathrm{z}_{s_0}^{-1}\,\mathrm{z}_s\;, \tag{28}$$

где $\mathrm{z}_s = A_{v_0,s}\,\mathrm{J}^{-1}$ – решения системы (15) при $\varepsilon_v \;=\; \delta_{v,v_0}$. В силу теоремы (1) все z_s коммутативны, и, значит,

$$\mathrm{z}_{s,s_0} \;=\; \mathrm{z}_s\,\mathrm{z}_{s_0}^{-1} \;=\; A_{v_0,s}\,A_{v_0,s_0}^{-1} \tag{29}$$

также коммутативны при различных s. Заметим теперь, что вид z_{s,s_0} не содержит обратных степеней квантового определителя J, всех их можно строить шаг за шагом, решая систему (24) относительно всех ϕ_s^* кроме $\phi_{s_0}^*$, при условии, что s_0 – невырожденный индекс. Таким образом, требование невырожденности матрицы ℓ не является необходимым ни для нахождения элементов z_{s,s_0}, ни для их коммутативности.

Соотношение же (26) есть также следствие коммутативности z_s, а именно, (23), записанном в виде

$$A_{v_0,s}\,A_{v_0,s_0}^{-1}\,\mathrm{J} \;=\; \mathrm{J}\,A_{v_0,s_0}^{-1}\,A_{v_0,s}\;, \tag{30}$$

откуда следует

$$\widetilde{\mathrm{z}}_{s,s_0} \;=\; A_{v_0,s_0}^{-1}\,A_{v_0,s}\;. \tag{31}$$

□

На этом завершим перечисление свойств матриц класса $\mathcal{L}$ и усилим требования на класс исследуемых матриц.

3. Матрица коэффициентов конечной линейной системы

Перейдем теперь к специальному виду матриц ℓ из класса $\mathcal{L}$, а именно, собственно наших матриц коэффициентов линейной системы в конечномерном случае.

Матрицы обсуждаемого вида удобнее всего определять как матрицы коэффициентов системы линейных соотношений

$$f_v^* \;=\; \sum_s \phi_s^* \cdot \ell_{s,v} \;, \tag{32}$$

в точности повторяя обозначения формулы рисунка (1).

Сначала напомним содержание требования конечности. Некоммутативные элементы $\{\ell_{s,v}\}$ собраны в столбцы, и мы будем предполагать, что элементы v-го столбца изоморфны некоторой $N \times N$-мерной матричной алгебре, так что элемент $\ell_{s,v}$ представим как $N \times N$-мерная матрица $\ell_s^{(v)}$ на v-м месте в тензорном произведении,

$$\ell_{s,v} \;=\; 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\ell_s^{(v)}}_{\substack{v-e \\ \text{место}}} \otimes \cdots \otimes 1\;. \tag{33}$$

Полное Гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}_\Delta$ теперь есть прямое произведение своих Δ штук N-мерных компонент, и имеет, таким образом, размерность N^Δ. Естественно, для класса $\mathcal{L}$ мы будем считать $\mathcal{H}_\Delta$ левым модулем. Мы считаем N одним и тем же для всех компонент, хотя это и не обязательно. Полная же размерность матрицы ℓ равна, таким образом, $\Delta\, N^\Delta \times \Delta\, N^\Delta$. Имеет место следующая

Лемма 3.

$$\mathrm{Det}\,\ell \;=\; \det\,\mathrm{J}\;, \tag{34}$$

где Det *обозначает полный,* $\Delta\, N^\Delta \times \Delta\, N^\Delta$, *определитель а* det J *берется по* J *как матрице размерности* $N^\Delta \times N^\Delta$.

По причине своей элементарности эта лемма не требует доказательства.

Определение 4. *Класс конечномерных матриц* $\ell \in \mathcal{L}$, *матричные элементы которых имеют структуру* (33), *их локальные образующие являются бесклеточными Вейлевскими генераторами, и подразумеваются тороидальные граничные условия на структуру* *решетки, на которой возникает система* (32), *мы будем называть классом матриц коэффициентов линейной задачи, или* $\mathcal{LP}$.

Лемма 4. *В точке общего положения матрицы коэффициентов линейной задачи как ее квантовый детерминант, так и все ее квантовые алгебраические дополнения обратимы.*

Доказательство. В силу леммы (3) обратимость квантового детерминанта и квантовых алгебраических дополнений эквивалентна отличию от нуля "большого" детерминанта, или самой матрицы ℓ, или большого детерминанта формального минора матрицы ℓ. Поскольку большие детерминанты являются аналитическими функциями параметров, то их отличие от нуля достаточно установить для какого-либо одного значения параметров. Например, при всех $\mathrm{u}_v = \mathrm{w}_v = 0$ элементарно устанавливается $\mathrm{Det}\,\ell = \mathrm{Det}\,A_{v=s} = 1$, что доказывает обратимость J и $A_{v,s}$ при $v = s$ в точке общего положения.

Для примера ненулевого большого детерминанта алгебраического дополнения $A_{v|s}$ следует занулить все $\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v$ кроме избранных, тех, что образуют некий естественный путь от вершины v до той вершины, среди окружающих которую клеток есть s (см. комбинаторное представление квантового детерминанта в виде путей на решетке, [3, 4]), и тогда $\mathrm{Det}A$ будет набираться перемножением N^{Δ}-х степеней выделенных образующих.
□

Определение 5. *Матрица* ℓ *коэффициентов линейной задачи называется минимально вырожденной, если* $\mathrm{Det}\,\ell = 0$, *но все квантовые алгебраические дополнения обратимы.*

Теперь мы выскажем некоторое предположение, которое основывается на непротиворечивости дальнейших результатов,

Предложение 1. *Минимально вырожденные матрицы коэффициентов линейной задачи существуют для любого* Δ.

Для малых Δ и N справедливость данного предположения, равно как и справедливость всех предыдущих и последующих теорем, поддается прямой верификации (причем ограничением являются лишь возможности настольного железного друга с кнопочками и степени математической испорченности автора (-ов) используемого програмного продукта). Кроме того, в дальнейшем станет очевидным, что достаточно предположить существование матриц, у которых при вырожденном J невырожденно как минимум всего одно квантовое алгебраическое дополнение.

Далее мы будем интересоваться матрицами коэффициентов линейной задачи как в точке общего положения, так и минимально вырожденными.

Пусть ℓ минимально вырождена. Пусть, далее $\mathcal{H}^{(0)}$ – подпространство полного Гильбертова пространства $\mathcal{H}_\Delta$, на котором $\mathrm{J} = 0$,

$$\phi^* \in \mathcal{H}^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \phi^* \cdot \mathrm{J} = 0\,. \tag{35}$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\sum_s \phi_s^* \cdot \ell_{s,v} = 0 \quad \forall\ v\,, \tag{36}$$

которая и будет теперь главным объектом при исследовании вырожденных матриц класса $\mathcal{L}P$.

Лемма 5. *Все векторы ϕ_s^* нетривиального решения* (36), *где ℓ – минимально вырожденная матрица коэффициентов линейной задачи, принадлежат подпространству $\mathcal{H}^{(0)}$.*

Доказательство. Выделим из системы (36) уравнение, соответствующее v_0-му столбцу матрицы ℓ. Оставшиеся уравнения совпадают с системой (24), и в предположении о невырожденности алгебраических дополнений и в силу теоремы (2) они разрешимы в виде

$$\phi_s^* = \phi_{s_0}^* \cdot \mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)\,, \tag{37}$$

причем оставшееся уравнение $f_{v_0}^* = 0$ имеет после использования формулы $\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0) = A_{v_0,s}A_{v_0,s_0}^{-1}$ вид

$$f_{v_0}^* = \sum_s \phi_s^*\,\ell_{s,v_0} = \phi_{s_0}^* \cdot \left(\sum_s A_{v_0,s}\,\ell_{s,v_0}\right) \cdot A_{v_0,s_0}^{-1} = 0\,. \tag{38}$$

Сумма в скобках в последнем выражении есть квантовый определитель, и, следовательно,

$$\phi_{s_0}^* \cdot \mathrm{J} = 0\,, \tag{39}$$

откуда в силу или второй части теоремы (2), соотношения (26), или же в силу произвольности выбора s_0 следует

$$\phi_s^* \cdot \mathrm{J} = 0 \quad \forall\ s\,. \tag{40}$$

□

Лемма 6. *Максимальная размерность пространства $\mathcal{H}^{(0)}$ для минимально вырожденной матрицы ℓ коэффициентов линейной задачи есть $N^{\Delta-1}$.*

Доказательство. Выберем (обратимое) алгебраическое дополнение A_{v,s_0}. Представим квантовый определитель в виде

$$\mathrm{J} \;=\; \sum_s \ell_{s,v}\, A_{v,s} \;=\; \left(\sum_s \mathrm{z}_{s,s_0}(v)\,\ell_{s,v}\right) A^{-1}_{v,s_0} \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \widehat{\ell}_v\, A^{-1}_{v,s_0}\,. \tag{41}$$

Напомним, что в нашем подходе вид суммы по s всегда таков:

$$\widehat{\ell}_v \;=\; \mathrm{z}_a \,+\, \mathrm{z}_b\, q^{1/2}\, \mathrm{u}_v \,+\, \mathrm{z}_c\, \mathrm{w}_v \,+\, \mathrm{z}_d\, \kappa_v\, \mathrm{u}_v\, \mathrm{w}_v\;, \tag{42}$$

где ассоциированные с клетками $\mathrm{z}_{a,b,c,d}$ коммутируют между собой и с $\mathrm{u}_v, \mathrm{w}_v$. Примечательно в этом соотношении то, что оператор $C_v \;=\; \mathrm{z}_a - \widehat{\ell}_v$ цикличен по v-му пространству, так что частичное условие совместности (42), имеющее вид $\widehat{\ell}_v^{(N)} \;=\; \mathrm{z}_a^N \;-\; C_v^N$, записывается как

$$\widehat{\ell}_v^{(N)} \;=\; \mathrm{z}_a^N \,-\, \mathrm{z}_b^N\, \epsilon_N\, \mathrm{u}_v^N \,+\, \mathrm{z}_c^N\, \epsilon_N\, \mathrm{w}_v^N \,+\, \mathrm{z}_d^N\, \kappa_v^N\, \mathrm{u}_v^N\, \mathrm{w}_v^N\;, \tag{43}$$

где

$$\epsilon_N \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; (-)^{N-1}\;. \tag{44}$$

Это, в частности, позволяет построить проектор на нулевой вектор ϕ^* оператора $\widehat{\ell}_v$ в v-м пространстве:

$$\pi_v \;=\; \frac{1}{N}\,\sum_j\, (-)^j\, \mathrm{z}_a^{N-j}\, C_v^j\;. \tag{45}$$

Таким образом, в точке общего положения по $\mathrm{u}_v^N, \mathrm{w}_v^N, \kappa_v$ нулевой вектор оператора $\widehat{\ell}_v$ одномерен по v-й компоненте полного пространства $\mathcal{H}_\Delta$. Следовательно, размерность линейной оболочки векторов $\phi^*\,:\,\phi^*\cdot\widehat{\ell}_v \;=\; 0$ не превосходит $\dim\mathcal{H}_\Delta/N \;=\; N^{\Delta-1}$.
□

Определение 6. *ζ – вектором называется вектор $\phi^*(\zeta)\;\in\;\mathcal{H}_\Delta$, удовлетворяющий при данных числах $\{\zeta_s\}$ системе из Δ локальных уравнений*

$$\phi^*(\zeta)\,\cdot\,\left(\sum_s\,\zeta_s\,\ell_{s,v}\right) \;=\; 0\;. \tag{46}$$

Набор всех возможных ненулевых ζ-векторов называется ζ-базисом.

Лемма 7. *Необходимым и достаточнвм условием существования ненулевого ζ-базиса для минимально вырожденной матрицы коэффициентов линейной задачи является*

$$\mathrm{J}_f^{(N)} \; = \; 0 \, , \tag{47}$$

где $\mathrm{J}_f^{(N)}$ – это определитель числовой матрицы $||\ell_{s,v}^{(N)}||$, аналогичной квантовой матрице линейной задачи $||\ell_{s,v}||$ с соответствием $\ell_{s,v} \;\mapsto\; \ell_{s,v}^{(N)}$ следующего вида

$$1 \;\mapsto\; 1 \, , \quad q^{1/2}\,\mathrm{u}_v \;\mapsto\; -\,\varepsilon_N\,\mathrm{u}_v^N \, , \quad \mathrm{w}_v \;\mapsto\; \mathrm{w}_v^N \, ,$$
$$\kappa_v\,\mathrm{u}_v\,\mathrm{w}_v \;\mapsto\; \kappa_v^N\,\mathrm{u}_v^N\,\mathrm{w}_v^N \, . \tag{48}$$

Доказательство. Как упоминалось при доказательстве леммы (6), необходимым и достаточным условием совместности нулевого уравнения типа (42),

$$\phi^* \cdot \Big(\zeta_a \,+\, \zeta_b\, q^{1/2}\,\mathrm{u} \,+\, \zeta_c\,\mathrm{w} \,+\, \zeta_d\,\kappa\,\mathrm{u}\,\mathrm{w} \Big) \;=\; 0 \tag{49}$$

является числовое соотношение типа (43),

$$\zeta_a^N \,-\, \zeta_b^N\,\varepsilon_N\,\mathrm{u}^N \,+\, \zeta_c^N\,\mathrm{w}^N \,+\, \zeta_d^N\,\kappa^N\,\mathrm{u}^N\,\mathrm{w}^N \;=\; 0 \, . \tag{50}$$

По форме эти числовые соотношения собираются в следующую систему однородных линейных уравнений

$$\sum_s \zeta_s^N\, \ell_{s,v}^{(N)} \;=\; 0 \, , \tag{51}$$

где числовые коэффициенты $\ell_{s,v}^{(N)}$ описываются в формулировке данной леммы. Необходимым и достаточным условием разрешимости числовой системы однородных уравнений является

$$\mathrm{J}_f^{(N)} \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \det\, ||\ell_{s,v}^{(N)}|| \;=\; 0 \, . \tag{52}$$

При этом неизвестные ζ_s^N восстанавливаются однозначно с точностью до нормировки. Поскольку мы работаем с матрицами коэффициентов общего положения, то можно считать, что все $\zeta_s^N \;\neq\; 0$, что как раз и соответствует минимальной вырожденности ℓ. Так что можно использовать нормировку $\zeta_{s_0} \;\equiv\; 1$ для произвольного s_0.

□

Лемма 8. *ζ-базис является полным базисом подпространства $\mathcal{H}^{(0)}$, размерность же этого подпространства максимальна и равна $N^{\Delta-1}$.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений, определяющую ζ-вектор, и применим к этой системе метод доказательства теоремы (1). Выделив произвольный столбец v_0 и строку s_0, для которой $\zeta_{s_0} \equiv 1$, мы можем разрешить систему уравнений для ζ-вектора для всех $v \neq v_0$ в виде

$$\phi^*(\zeta)\,\zeta_s \;=\; \phi^*(\zeta)\,\cdot\,\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)\,, \tag{53}$$

где $\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)$ определен при доказательстве теоремы (1), и при этом последнее, v_0-е, уравнение превратится в

$$\phi^*(\zeta)\,\cdot\,\sum_s \mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)\,\ell_{s,v_0} \;=\; \phi^*(\zeta)\,\cdot\,\mathrm{J}\;A^{-1}_{v_0,s_0} \;=\; 0\,. \tag{54}$$

Таким образом,

$$\forall\ \zeta \quad \phi^*(\zeta)\cdot\mathrm{J} \;=\; 0 \;\Leftrightarrow\; \phi^*(\zeta) \,\in\, \mathcal{H}^{(0)}\,. \tag{55}$$

Заметим, что при этом ζ_s (при $\zeta_{s_0} = 1$) является собственным значением оператора

$$\widehat{\zeta}_s \;=\; \mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)\,\pi_0 \;=\; \pi_0\,\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)\,\pi_0\,, \tag{56}$$

где π_0 – проектор на $\mathcal{H}^{(0)}$, пронесение π_0 сквозь $\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)$ справа налево есть следствие второй части теоремы (1), и в силу минимальной невырожденности, ℓ все $\widehat{\zeta}_s$ не зависят от v_0. Кроме того, все $\widehat{\zeta}_s^N$, очевидно, на $\mathcal{H}^{(0)}$ цикличны.

Далее, будучи собственными векторами набора операторов $\widehat{\zeta}_s$ с различными собственными значениями, все ζ-векторы линейно независимы (а $\widehat{\zeta}_s$ не содержат Жордановых клеток). Таким образом, размерность линейной оболочки ζ-векторов в силу нормировки $\zeta_{s_0} = 1$ есть $N^{\Delta-1}$, что совпадает с максимально возможной размерностью $\mathcal{H}^{(0)}$, и, таким образом, линейная оболочка ζ-векторов и есть $\mathcal{H}^{(0)}$.

□

Теперь все готово для доказательства основной теоремы:

Теорема 3. *Пусть ℓ – невырожденная матрица коэффициентов линейной задачи,* J *– ее квантовый определитель, а* $\mathrm{J}_f^{(N)}$ *– определитель матрицы коэффициентов N-х степеней ζ-базиса. Тогда*

$$\det \mathrm{J} \;=\; \left(\mathrm{J}_f^{(N)}\right)^{N^{\Delta-1}} . \tag{57}$$

Доказательство. Пользуясь произволом параметров ℓ, рассмотрим задачу минимального вырождения матрицы ℓ. Необходимым условием существования $\mathcal{H}^{(0)}$ с одной стороны является $\det \mathrm{J} \;=\; 0$, а с другой стороны, в силу необходимости и достаточности, доказанной в лемме (8), $\mathrm{J}_f^{(N)} \;=\; 0$. Отсюда следует, что с точностью до тривиального множителя

$$\det \mathrm{J} \;=\; \left(J_f^{(N)}\right)^{c} , \tag{58}$$

где c-некоторая степень. Простое сравнение размерности $\mathrm{J}_f^{(N)}$ и $\det \mathrm{J}$ по параметрам показывает, что

$$c \;=\; \dim \mathcal{H}^{(0)} \;=\; N^{\Delta-1} , \tag{59}$$

а элементарный комбинаторный анализ говорит о том, что возможный тривиальный множитель равен 1.
□

Комментарий: логично предположить, что цикличны не только $\widehat{\zeta}_s$, но и $\mathrm{z}_{s,s_0}(v_0)$, причем для невырожденной матрицы ℓ. Тогда эта высокая степень, в которую возводится J_f, уже видна при следующем вычислении в духе доказательства теоремы (2):

$$\begin{aligned}
\det \mathrm{J} \;&=\; \det\left(\sum_s A_{v,s}\,\ell_{s,v}\right)\\
&= \det\left(\sum_s \mathrm{z}_{s,s_0}(v)\,\ell_{s,v}\right)\,\det A_{v,s_0}\\
&= \prod_{\mathrm{z}_{s,s_0}(v)}\left(\sum_s \mathrm{z}_{s,s_0}^N\,\ell_{s,v}^{(N)}\right)\,\det A_{v,s_0}\\
&= \left(\sum_s \mathrm{z}_{s,s_0}^N\,\ell_{s,v}^{(N)}\right)^{N^{\Delta-1}}\,\det A_{v,s_0}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Теорема (3) и формула (57) и есть основной результат, последовательному выводу которого, в сущности, посвящена эта заметка. Соотношение (57) и есть функциональное уравнение. Чтобы это увидеть, следует вспомнить введение: квантовый определитель есть производящая функция для интегралов движения. Для конечномерного случая, когда размерность Гильбертова пространства $\dim\mathcal{H}_\Delta = N^\Delta$, число интегралов движения равно $\Delta+1$, см. [3, 2, 4]. Это говорит о переопределенности системы интегралов движения, среди которых есть одна некоммутативная пара, имеющая смысл канонической пары центра инерции. Обозначим эту пару как U, W, где подразумевается

$$\mathrm{U}\cdot\mathrm{W} = q\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{U}\,. \tag{61}$$

Остальные же $\Delta-1$ интегралов $\{\mathrm{t}_\alpha\}$ коммутативны между собой и коммутируют с парой U, W. Таким образом

$$\det\ \mathrm{J} = \prod_{\{\mathrm{t}_\alpha\}} \det_{\mathrm{U},\mathrm{W}}\ \mathrm{J}(\mathrm{U},\mathrm{W}|\{\mathrm{t}_\alpha\})\,, \tag{62}$$

где $\det\limits_{\mathrm{U},\mathrm{W}}$ обзначает определитель по тому блоку, в котором U, W действуют нетривиально. В нашей заметке мы опустили некоторые дополнительные свойства полной линейной задачи, связанные с возможностью наложить нетривиальные монодромические свойства на линейные переменные ϕ^*_s. Из этих свойств следует, что как J, так и $\mathrm{J}_f^{(N)}$, являются неприводимыми полиномами по квазимоментам. Из неприводимости следует, что произведение по собственным значениям t_α тривиально и соответствует той самой высокой степени $c = N^{\Delta-1}$ в формулировке теоремы (3). Получающееся уравнение

$$\det_{\mathrm{U},\mathrm{W}}\ \mathrm{J} = \mathrm{J}_f \tag{63}$$

и есть искомое функциональное уравнение, фактически производящее абелеву алгебру “настоящих” интегралов движения t_α.

Благодарности Автор хотел бы выразить искреннюю признательность А. Г. Изергину, Л. Д. Фаддееву, Р. М. Кашаеву, Г. П. Пронько, А. Г. Пронько и Ю. Г. Строганову за проявленный к работе интерес. Особенная благодарность Игорю Корепанову за исключительно полезные обсуждения в процессе получения результатов.

Эта работа частично поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, стипендия номер 98-01-00070.

Литература

1. S. M. Sergeev, *On a two dimensional system associated with the complex of the solutions of the tetrahedron equation.* solv-int/9709013, 1997, to appear in Intnl. J. of Mod. Phys.
2. S. M. Sergeev, *A three-dimensional integrable quantum mapping.* Proceedings of the International Conference of Mathematical physics, Chelyabinsk Theor. and Math. Phys., **118** (1999), pp. 378–384.
3. S. M. Sergeev, *Quantum 2+1 evolution model.* J. Phys. A: Math. Gen. V. 32, pp. 5639-5714 (1999).
4. S. M. Sergeev, *Auxiliary transfer matrices for three dimensional integrable models.* Theor. and Math. Phys., 2000, submitted.

Sergeev S. M. Quantum matrices of coefficients of a discrete linear problem.

Some of the most general properties of the quantum matrices is discussed. These matrices of coefficients of the quantum discrete auxiliary linear problem for three-dimensional integrable models. An universal functional equation for the quantum determinant is obtained in the case of a finite-dimensional representation of a local Weyl algebra.

Объединенный институт
ядерных исследований,
Дубна, Россия

Поступило 10 января 2000 г.