Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

Н. А. Славнов

ФРЕДГОЛЬМОВ ДЕТЕРМИНАНТ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Введение

В настоящей работе рассматривается шестивершинная модель (модель льда) на двумерной квадратной решетке со специальными граничными условиями "доменной стенки" [1]. Впервые шестивершинная модель была решена в работах [2, 3], где была вычислена статистическая сумма и плотность свободной энергии в случае периодических граничных условий. При условиях доменной стенки явное выражение для статистической суммы на решетке конечного объема было найдено А. Г. Изергиным [4]. В представление Изергина входит детерминант матрицы порядка N (где N^2 – число узлов решетки). Таким образом, вопрос о поведении статистической суммы в термодинамическом пределе сводится к изучению асимптотических свойств детерминанта при $N \to \infty$.

Целью данной работы является получение нового представления для статистической суммы, удобного для асимптотического анализа. Таким удобным представлением, на наш взгляд, является фредгольмов детерминант. Поясним в вкратце основную идею предлагаемого подхода.

Пусть дана матрица $\mathcal{M}$ порядка N, матричные элементы которой $\mathcal{M}_{jk}(t)$ зависят от некоторого параметра t. Детерминанты этой матрицы $\det \mathcal{M}$ при различных N образуют последовательность функций $f_N(t)$. Ответ на вопрос о свойствах предельной функции $f_\infty(t) = \lim_{N\to\infty} f_N(t)$ зачастую оказывается весьма сложным. Несмотря на то, что $\det \mathcal{M}$ является конечной суммой

Настоящая работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 99-01-00151, и INTAS-99-1782.

конечных произведений, при больших N это "явное" выражение становится крайне громоздким и редко поддается анализу.

Предположим однако, что нам удалось заменить $\det \mathcal{M}$ на фредгольмов детерминант

$$\det \mathcal{M} = \det(I + V)$$

некоторого интегрального оператора, ядро которого параметрически зависит от t и $N : V(x, y) = V_N(x, y|t)$. Фредгольмов детерминант является бесконечной суммой, каждое слагаемое которой представимо в виде кратного интеграла, например,

$$\det(I + V) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \int V_N(x_1, x_2|t) \cdots V_N(x_k, x_1|t)\, d^k x\right).$$

Если при конечном N вычисления указанных интегралов весьма сложные, то при $N \to \infty$ наличие большого параметра в подынтегральных выражениях часто позволяет асимптотически оценить не только каждый интеграл, но и весь ряд в целом. Тем самым появляется возможность получить оценку для детерминанта. Таким образом, можно сказать, что при $N \to \infty$ представления в виде детерминанта матриц конечного порядка становятся "менее явными", в то время как фредгольмовы детерминанты становятся "более явными".

Такого сорта преобразования конечных детерминантов в фредгольмовы действительно оказываются полезными, например, при асимптотическом анализе корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей, вычислении асимптотики ортогональных полиномов, спектра случайных матриц и др. Мы рассчитываем, что и в рассматриваемом случае представление в виде фредгольмова детерминанта поможет, в конечном итоге, решить вопрос о термодинамическом пределе статистической суммы шестивершинной модели.[1]

Остановимся кратко на содержании работы. В следующем разделе даются основные сведения о шестивершинной модели и приводится формула Изергина для статистической суммы. В

[1]Недавно гармонический предел шестивершинной модели исследовался с помощью уравнения цепочки тоды [5] и методов матричных моделей [6]. Подход, предлагаемый в настоящей работе, радикальным образом отличается от упомянутых методов, и мы надеемся, что он также заслуживает внимания.

третьем разделе проводятся преобразования указанной формулы к представлению в виде детерминанта Фредгольма. Применимость полученной формулы для асимптотического анализа обсуждается в последнем разделе.

2. Шестивершинная модель

Рассмотрим статистическую модель на квадратной решетке размера $N\times N$, с каждым ребром которой ассоциирована некоторая переменная (классический спин), принимающая значения ± 1. Обычно эти переменные обозначают стрелками, отождествляя $\uparrow$, $\rightarrow$ с 1, а $\downarrow$, $\leftarrow$ с -1. Таким образом, в общем случае в каждой вершине возможны 16 различных конфигураций стрелок. Шестивершинная модель выделяется дополнительным условием, что число входящих и выходящих стрелок в каждой вершине совпадает. Возможные типы вершин показаны на Рис. 1. Каждой из перечисленных вершинных конфигураций приписываются статистические веса, которые, вообще говоря, могут зависеть от номера вершины. Мы рассматриваем модель, симметричную относительно одновременного поворота всех стрелок. Таким образом, мы имеем $3N^2$ статистических весов $w_{jk}=\{a_{jk},\ b_{jk},\ c_{jk}\}$, где индексы $j,k=0,1,\dots,N-1$ нумеруют вершины. Граничные условия доменной стенки соответствуют входящим стрелкам на верхних и нижних гранях, и выходящим на боковых.

Рис. 1. Вершины шестивершинной модели
и их статистические веса.

Статистическая сумма дается следующей формулой

$$Z_N=\sum_{\{C\}}\prod_{j,k=0}^{N-1} w_{jk}. \tag{2.1}$$

Здесь суммирование ведется по всем возможным конфигурациям C на всей решетке.

Шестивершинная модель оказывается точно решаемой, если $3N^2$ весов $\{a_{jk},b_{jk},c_{jk}\}$, параметризуются $2N+1$ переменными λ_j

и ξ_j, $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ и η:

$$a_{jk} = \varphi(\lambda_j - \xi_k + \eta), \quad b_{jk} = \varphi(\lambda_j - \xi_k), \quad c_{jk} = \varphi(\eta). \tag{2.2}$$

Параметры λ_j ассоциируются с горизонтальными линиями, ξ_j – с вертикальными (см. Рис. 2), η – произвольная комплексная константа. Функция $\varphi(x)$ определена с точностью до мультипликативной постоянной и равна

$$\varphi(x) = \sinh(x), \quad \text{либо} \quad \varphi(x) = x. \tag{2.3}$$

В первом случае модель эквивалентна квантовому магнетику XXZ, во втором – магнетику XXX.

Рис. 2. Параметризация ребер и вершин решетки.

Формула Изергина для статистической суммы шестивершинной модели на решетке конечного объема с граничными условиями доменной стенки имеет вид

$$Z_N = \frac{\prod\limits_{a,b=0}^{N-1} \varphi(\lambda_a - \xi_b + \eta)\varphi(\lambda_a - \xi_b)}{\prod\limits_{N>a>b\geqslant 0} \varphi(\lambda_a - \lambda_b)\varphi(\xi_b - \xi_a)} \times$$

$$\times \det\left(\frac{\varphi(\eta)}{\varphi(\lambda_j - \xi_k)\varphi(\lambda_j - \xi_k + \eta)}\right). \tag{2.4}$$

Мы обращаем внимание читателя на то, что здесь и в дальнейшем нумерация матричных индексов начинается не с единицы, а с нуля: $j, k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Нас будет интересовать однородный предел, когда статистические веса не зависят от номера узла решетки. Иными словами $\lambda_j = \lambda$, $\xi_j = \xi$, $j = 0, 1 \ldots, N-1$. Соответствующий предельный переход в (2.4) можно осуществить, воспользовавшись формулой

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \lambda \\ \xi_k \to \xi}} \frac{\det[\Phi(\lambda_j, \xi_k)]}{\Delta(\lambda)\Delta(\xi)} = \det\left[\frac{1}{j!k!}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\Phi(\lambda, \xi)\right]. \tag{2.5}$$

Здесь $\Phi(\lambda,\xi)$ – некоторая, достаточно гладкая функция двух переменных $\Delta(\lambda)$ и $\Delta(\xi)$ – определители Вандермонда от переменных $\{\lambda\}$ и $\{\xi\}$ соответственно.

В рациональном случае, когда $\varphi(x)=x$ непосредственное применение (2.5) дает

$$Z_N^{(XXX)}= \\ =\frac{\Bigl[\nu(\nu+\eta)\Bigr]^{N^2}}{\prod\limits_{m=0}^{N-1}(m!)^2}\det\left[(j+k)!\left(\nu^{-j-k-1}-(\nu+\eta)^{-j-k-1}\right)\right], \qquad (2.6)$$

где $\nu=\lambda-\xi$.

В тригонометрическом случае удобно сначала перейти к переменным $u_j=e^{2\lambda_j}$, $v_j=e^{2\xi_j}$ и $q=e^{\eta}$. Тогда (2.4) принимает вид

$$Z_N^{(XXZ)}=\prod_{a=0}^{N-1}\left(e^{\lambda_a-\xi_a}\right)\frac{\prod\limits_{a,b=0}^{N-1}\sinh(\lambda_a-\xi_b+\eta)(u_a-v_b)}{\prod\limits_{N>a>b\geqslant 0}(u_a-u_b)(v_b-v_a)}\times \\ \times\det\left(\frac{1}{u_j-v_k}-\frac{q}{qu_j-q^{-1}v_k}\right). \qquad (2.7)$$

К последней формуле уже без труда может быть применено правило (2.5), что после несложных преобразований дает

$$Z_N^{(XXZ)}=e^{N\nu}\frac{\Bigl[\sinh(\nu)\sinh(\nu+\eta)\Bigr]^{N^2}}{\prod\limits_{m=0}^{N-1}(m!)^2}\times \\ \times\det\left[\frac{(j+k)!}{\sinh^{j+k+1}(\nu)}-\frac{q^{j-k+1}(j+k)!}{\sinh^{j+k+1}(\nu+\eta)}\right]. \qquad (2.8)$$

Здесь, как и в (2.6) $\nu=\lambda-\xi$, а $q=e^{\eta}$.

В дальнейшем мы остановимся на тригонометрическом случае (2.8), как наиболее общем. Формула для статистической суммы $Z_N^{(XXX)}$, как обычно, может быть получена из тригонометрической в пределе $\nu=\epsilon\nu$, $\eta=\epsilon\eta$, $\epsilon\to 0$.

Наша задача состоит в том, чтобы привести выражение (2.8) к виду, удобному для асимптотического анализа $N \to \infty$. В формуле (2.8) имеются множители с тривиальной асимптотикой: $e^{N\nu}$ и $\Big[\sinh(\nu)\sinh(\nu+\eta)\Big]^{N^2}$. Несложно также вычислить поведение фактора $\prod_{m=0}^{N-1}(m!)^2$ при $N \to \infty$. Основную проблему представляет детерминант. В следующем разделе мы рассмотрим некоторые специальные преобразования формулы (2.8), которые в конечном итоге дают новое представление для статистической суммы, содержащее определитель интегрального оператора.

3. Фредгольмов детерминант

В качестве первого шага удобно вынести из детерминанта (2.8), например, $\sinh^{-j-k-1}(\nu)$. Тогда (2.8) принимает вид

$$Z_N^{(XXZ)} = e^{N\nu}\frac{\sinh^{N^2}(\nu+\eta)}{\prod\limits_{m=0}^{N-1}(m!)^2}\det[A - qtQTATQ^{-1}]. \tag{3.1}$$

Здесь

$$A_{jk} = (j+k)!, \quad T_{jk} = \delta_{jk}t^j, \quad Q_{jk} = \delta_{jk}q^j, \quad t = \frac{\sinh(\nu)}{\sinh(\nu+\eta)}. \tag{3.2}$$

Замечание. С тем же успехом можно было бы вынести множители $\sinh^{-j-k-1}(\nu+\eta)$. Возникающее при этом выражение с точностью до замен $t \to t^{-1}$, $q \to q^{-1}$ и тривиального общего множителя совпадает с (3.1).

Преобразуем теперь (3.1) следующим образом

$$\det[A - qtQTATQ^{-1}] = \det A \cdot \det[I - U],$$
$$\text{где} \quad U = qtA^{-1}QTATQ^{-1}. \tag{3.3}$$

Преимущество этого способа действий состоит в том, что $\det A$ сокращает произведение факториалов в знаменателе, так как

$$\det A = \prod_{m=0}^{N}(m!)^2, \tag{3.4}$$

(см. Приложение 1). Таким образом, задача сводится к нахождению обратной матрицы A^{-1} и вычислению произведения $U =$

$qtA^{-1}QTATQ^{-1}$. Обратная матрица A^{-1} может быть легко записана через полиномы Лагерра, поэтому ниже мы напоминанием их основные свойства.

Полиномы Лагерра $L_n(x)$ определяются формулой

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{3.5}$$

и образуют ортогональную систему на полуоси R_+ с весом e^{-x}:

$$\int\limits_0^\infty L_n(x)L_m(x)\, e^{-x}\, dx = \delta_{nm}. \tag{3.6}$$

Ключевым объектом, определяющим матрицу A^{-1} является ядро

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)L_k(y). \tag{3.7}$$

Еще одно полезное представление для $K_n(x,y)$ следует из формулы Кристоффеля–Дарбу:

$$K_n(x,y) = -\frac{n+1}{x-y}\Big(L_{n+1}(x)L_n(y) - L_{n+1}(y)L_n(x)\Big). \tag{3.8}$$

Очевидно, что для произвольного полинома $\pi_m(x)$ степени m, меньшей или равной n, выполняется

$$\int\limits_0^\infty \pi_m(x)K_n(x,y)e^{-x}\, dx = \pi_m(y), \quad 0 \leqslant m \leqslant n. \tag{3.9}$$

Для доказательства (3.9) достаточно подставить в левую часть разложение $\pi_m(x)$ по полиномам Лагерра $\pi_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k L_k(x)$ и воспользоваться определением (3.7).

Будучи полиномом по переменным x и y, ядро $K_n(x,y)$ представимо в виде

$$K_n(x,y) = \sum_{j,k=0}^{n} K_{jk}^{(n)} x^j y^k, \tag{3.10}$$

где

$$K_{jk}^{(n)} = \frac{1}{j!k!}\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j\, \partial y^k} K_n(x,y)\Big|_{x=y=0}. \tag{3.11}$$

Теперь мы готовы сформулировать теорему об обратной матрице.

Теорема 1. *Пусть* $A_{jk} = (j+k)!$, $j, k = 0, 1 \ldots, N-1$. *Тогда обратная матрица имеет элементы*

$$(A^{-1})_{jk} = K_{jk}^{(N-1)}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Воспользовавшись интегральным представлением для $(j+k)!$, имеем

$$\sum_{l=0}^{N-1} A_{jl} K_{lk}^{(N-1)} = \\ = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \int_0^\infty s^{j+l} e^{-s} K_{N-1}(x, y)\, ds \Big|_{x=y=0}. \tag{3.13}$$

Ряд по l является рядом Тэйлора (фактически, так как $K_{N-1}(x, y)$ является полиномом по x степени $N-1$, указанный ряд сводится к конечной сумме). Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{N-1} A_{jl} K_{lk}^{(N-1)} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \int_0^\infty s^j e^{-s} K_{N-1}(s, y)\, ds \Big|_{y=0}. \tag{3.14}$$

В силу (3.9) интеграл в (3.14) равен y^j. Таким образом, мы приходим к

$$\sum_{l=0}^{N-1} A_{jl} K_{lk}^{(N-1)} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} y^j \Big|_{y=0} = \delta_{jk}. \tag{3.15}$$

Теорема доказана.

Замечание. Обобщение соотношений между матрицами Ханкеля и ядрами Кристоффеля–Дарбу можно найти в [7].

Полученное явное выражение для A^{-1} позволяет легко вычислить матрицу U (3.3). Действительно,

$$U_{jk} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{l=0}^{N-1} t^{l+k+1} q^{l-k+1} \times \\ \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \int_0^\infty s^{j+l} e^{-s} K_{N-1}(x, y)\, ds \Big|_{x=y=0}. \tag{3.16}$$

Так же, как и при доказательстве Теоремы 1, сумма по l легко вычисляется и дает

$$U_{jk} = \frac{qt}{k!}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\int_0^\infty x^j (q^{-1}t)^k e^{-x} K_{N-1}(xqt, y)\,dx\bigg|_{y=0}. \qquad (3.17)$$

Итак, статистическая сумма $Z_N^{(XXZ)}$ оказывается пропорциональной детерминанту матрицы $\delta_{jk} - U_{jk}$ (3.17). Для вычисления последнего удобно воспользоваться формулой

$$\det(I-U) = \exp\{\operatorname{tr}\log(I-U)\} = \exp\left\{-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\operatorname{tr} U^n\right\}. \qquad (3.18)$$

Таким образом, требуется найти следы степеней матрицы U. Легко видеть, что

$$(U^n)_{jk} = \frac{(qt)^n}{k!}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\int_0^\infty x_1^j (q^{-1}t)^k K_{N-1}(x_1 qt, x_2 q^{-1}t)\cdots$$

$$\cdots K_{N-1}(x_n qt, y) e^{-\sum_{m=1}^n x_m}\, d^n x\bigg|_{y=0}. \qquad (3.19)$$

Действительно, для $n = 1$ (3.19) совпадает с (3.17). Предполагая справедливость (3.19) для U^n, мы немедленно получаем

$$\sum_{l=0}^{N-1} (U^n)_{jl} U_{lk} =$$

$$= \frac{(qt)^{n+1}}{k!}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\int_0^\infty x_1^j (q^{-1}t)^k K_{N-1}(x_1 qt, x_2 q^{-1}t)\cdots \qquad (3.20)$$

$$\cdots K_{N-1}(x_n qt, x_{n+1} q^{-1}t) K_{N-1}(x_{n+1} qt, y) e^{-\sum_{m=1}^{n+1} x_m}\, d^{n+1}x\bigg|_{y=0}.$$

(Здесь снова суммирование по l сводится к ряду Тэйлора.) Отсюда

$$\operatorname{tr}(U^n) = (qt)^n \int_0^\infty K_{N-1}(x_1 qt, x_2 q^{-1}t)\cdots$$

$$\cdots K_{N-1}(x_n qt, x_1 q^{-1}t) e^{-\sum_{m=1}^{n} x_m} d^n x. \tag{3.21}$$

Полученная формула (3.21) для следа U^n позволяет заменить $\det(\delta_{jk} - U_{jk})$ на фредгольмов детерминант. Для этого введем интегральный оператор $I - V$, действующий на R_+

$$[(I-V)f](x) = f(x) - \int_0^\infty V(x,y) f(y)\, dy, \tag{3.22}$$

и имеющий ядро

$$V(x,y) = qtK_{N-1}(xqt, yq^{-1}t) e^{-(x+y)/2} =$$

$$= qt \sum_{k=0}^{N-1} L_k(xqt) L_k(yq^{-1}t)\, e^{-(x+y)/2}. \tag{3.23}$$

В силу (3.8) $V(x,y)$ также может быть представлено в виде

$$V(x,y) = \frac{qN}{qx - q^{-1}y} \Big(L_{N-1}(xqt) L_N(yq^{-1}t) -$$

$$- L_N(xqt) L_{N-1}(yq^{-1}t) \Big) e^{-(x+y)/2}. \tag{3.24}$$

Тогда в силу (3.21)

$$\operatorname{tr} U^n = \operatorname{tr} V^n, \tag{3.25}$$

и мы окончательно получаем

$$\det(\delta_{jk} - U_{jk}) = \det(I - V). \tag{3.26}$$

4. Обсуждение

Итак, мы получили новое представление для статистической суммы шестивершинной модели, содержащее фредгольмов детерминант интегрального оператора с ядром (3.23), (3.24):

$$Z_N^{(XXZ)} = e^{N\nu} \Big[\sinh(\nu) \sinh(\nu + \eta) \Big]^{N^2} \det(I - V). \tag{4.1}$$

Поскольку ядро V является вырожденным, мы всегда можем вернуться к детерминанту матрицы конечного порядка

$$\det \left(I - qt \sum_{k=0}^{N-1} L_k(xqt) L_k(yq^{-1}t) e^{-(x+y)/2} \right) =$$

$$= \det\left(\delta_{jk} - qt\int\limits_0^\infty L_j(xqt)L_k(xq^{-1}t)e^{-x}\,dx\right). \qquad (4.2)$$

Однако для асимптотического анализа при $N\to\infty$, представление в виде фредгольмова детерминанта по ряду причин выглядит более предпочтительным.

Во-первых, формула (3.9) показывает, что ядро $K_N(x,y)$ действует как единичный оператор на подпространстве полиномов степени N. Можно было бы предполагать, что при N, стремящемся к бесконечности, $K_N(x,y)$ стремится к единичному оператору (дельта-функций). Разумеется, подобный предельный переход требует тщательного анализа сходимости. Замечательно однако, что при отдельных значениях q и t такая наивная интерпретация ядра (3.23) действительно оказывается верной, и в пределе $N\to\infty$ фредгольмов детерминант можно вычислить явно.

Во-вторых, аналогичные интегральные операторы с ядрами, зависящими от полиномов Лагерра часто встречаются в теории случайных матриц и случайных перестановок [8, 9]. Некоторые методы анализа таких операторов могут быть непосредственно перенесены на рассматриваемый случай. Кроме того, при больших N полиномы Лагерра могут быть аппроксимированы функциями Бесселя, что также приводит нас к интегральному оператору, чьи аналоги изучались в работах [10–12].

В-третьих, в частном случае статистической суммы $Z_N^{(XXX)}$, когда $q=1$, ядро $V(x,y)$ принимает вид

$$V(x,y) = \frac{N}{x-y}\left(L_{N-1}(xt)L_N(yt) - L_N(xt)L_{N-1}(yt)\right)e^{-(x+y)/2}.$$

Интегральный оператор с ядром (4.3) принадлежит к классу вполне интегрируемых операторов [3]. Соответствующие фредгольмовы детерминанты оказываются τ-функциями точно решаемых классических уравнений и могут быть вычислены с помощью методов матричной задачи Римана–Гильберта. Мы рассчитываем провести подробный асимптотический анализ статистической суммы шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки в последующих публикациях.

Автор благодарит А. Р. Итса за полезные обсуждения.

Приложение 1. Вычисление детерминанта

Один из способов доказать (3.4) – воспользоваться известной формулой для детерминанта Коши

$$\frac{\prod\limits_{N>a>b\geqslant 0}(\alpha_a-\alpha_b)(\beta_b-\beta_a)}{\prod\limits_{a,b=0}^{N-1}(\alpha_a-\beta_b)}=\det\left(\frac{1}{\alpha_j-\beta_k}\right). \qquad (\Pi.1)$$

Здесь $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ – произвольные комплексные переменные. Поделив обе части (П.1) на определители Вандермонда $\Delta(\alpha)$ и $\Delta(\beta)$ и взяв однородный предел $\alpha_j\to\alpha$, $\beta_j\to\beta$, $j=0,1,\ldots,N-1$, мы с помощью (2.5) приходим к

$$(\alpha-\beta)^{-N^2}=\prod_{m=0}^{N-1}(m!)^{-2}\det\left(\frac{(j+k)!}{(\alpha-\beta)^{j+k+1}}\right), \qquad (\Pi.2)$$

откуда уже немедленно следует (3.4).

Другой способ вычисления $\det A$ основан на применении полиномов Лагерра. Приведем также и этот метод, поскольку он позволяет не только доказать (3.4), но и вычислить A^{-1}.

Воспользовавшись интегральным представлением для факториала, имеем

$$\det A=\det\left(\int\limits_0^\infty e^{-s}s^{j+k}\,ds\right). \qquad (\Pi.3)$$

Обозначая в j-ой строке переменную интегрирования через s_j, мы сводим детерминант к кратному интегралу

$$\det A=\int\limits_0^\infty ds_0\cdots ds_{N-1}\det\left(e^{-s_j}s_j^{j+k}\right)=$$

$$=\int\limits_0^\infty ds_0\cdots ds_{N-1}\prod_{j=0}^{N-1}\left(e^{-s_j}s^j\right)\Delta(s), \qquad (\Pi.4)$$

где $\Delta(s)$ – определитель Вандермонда. Воспользуемся хорошо известным тождеством

$$\Delta(s)=\det[p_k(s_j)], \qquad (\Pi.5)$$

где $p_k(s)$ – система *произвольных* полиномов со старшим коэффициентом, равным 1:

$$p_k(s) = s^k + o(s). \tag{П.6}$$

В частности мы можем выбрать полиномы Лагерра

$$p_k(s) \equiv \widetilde{L}_k(s) = (-1)^k e^s \frac{d^k}{ds^k}(s^k e^{-s}). \tag{П.7}$$

Нормировка в (П.7) отличается о нормировки в (3.5) множителем $(-1)^k k!$, чтобы обеспечить условие (П.6). По этой причине полиномы (П.7) обозначены через $\widetilde{L}_k$. Условие ортогональности тогда принимает вид

$$\int_0^\infty \widetilde{L}_m(s)\widetilde{L}_n(s)e^{-s}\,ds = (n!)^2\delta_{nm}. \tag{П.8}$$

Таким образом, формула (П.4) переходит в

$$\det A = \int_0^\infty ds_0 \cdots ds_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \left(e^{-s_j} s^j\right) \det[\widetilde{L}_k(s_j)]. \tag{П.9}$$

Интегрируя под знаком детерминанта, получаем

$$\det A = \det\left(\int_0^\infty e^{-s} s^j \widetilde{L}_k(s)\,ds\right). \tag{П.10}$$

В силу ортогональности полиномов $\widetilde{L}_k(s)$ матричные элементы в (П.10) равны 0, если $j < k$. Таким образом, мы имеем дело с детерминантом треугольной матрицы, а, следовательно,

$$\det A = \prod_{m=0}^{N-1}\left(\int_0^\infty e^{-s} s^m \widetilde{L}_m(s)\,ds\right). \tag{П.11}$$

Остается заметить, что разложение s^m по $\widetilde{L}_m(s)$ имеет вид

$$s^m = \widetilde{L}_m(s) + \text{младшие полиномы},$$

откуда в силу (П.8)

$$\det A = \prod_{m=0}^{N-1}(m!)^2, \tag{П.12}$$

что и завершает доказательство.

Указанным методом можно вычислять не только $\det A$, но также и миноры порядка $N-1$, что дает возможность получить ответ для A^{-1}.

Литература

1. V. E. Korepin, — Commun. Math. Phys. **86** (1982), 391.
2. E. H. Lieb, — Phys. Rev. **18** (1967), 1046; **19** (1967), 108.
3. B. Sutherland, — Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 103.
4. А. Г. Изергин,, — ДАН СССР **297** (1987), 331.
5. V. E. Korepin and P. Zinn-Justin, Preprint cond-mat/0004250.
6. P. Zinn-Justin, Preprint math-ph/0005008.
7. A. Borodin, Preprint math.CA/9804027.
8. M. L. Metha, *Random Matrices*. 2nd ed., Academic Press, San Diego (1991).
9. C. A. Tracy and H. Widom, *On the Distribution of the Lengths of the Longest Monotone Subsequences in Random Words*. math.CO/9904042.
10. S. Nishigaki, — Phys. Lett. **B387** (1996), 139.
11. C. A. Tracy and H. Widom, — Commun. Math. Phys., **161** (1994), 289.
12. E. L. Basor and C. A. Tracy, — J. Stat. Phys., **73** (1993), 415.
13. A. R. Its, A. G. Izergin, V. E. Korepin and N. A. Slavnov, — Int. Journ. Mod. Phys. **B4** (1990), 1003.

Slavnov N. A. Fredholm determinant representation for the partition function of the six-vertex model.

The six-vertex model with domain wallboundary conditions is considered. A Fremholm determinant representation for the partition function of the model is ontained. The kernel of the corresponding integral operator depends on Laguerre polynomials.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 мая 2000 г.