Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 269, 2000 г.

А. В. Цыганов

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МОПЕРТЮИ–ЯКОБИ И ЦЕПОЧКАХ ТОДЫ

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. Отображение Мопертюи–Якоби

Рассмотрим на произвольном $2n$-мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ с координатами $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ некоторую механическую систему с функцией Гамильтона натурального вида

$$H(p,q) = \sum_{i,j}^{n} q_{ij}(q) p_i p_j + V(q). \tag{1.1}$$

Согласно принципу Мопертюи [1, 2], при достаточно больших энергиях $E > \max V(x)$ на фиксированном $(2n-1)$ гладком многообразии $Q^{2n-1} = (H(p,q) = E)$, интегральные траектории векторного поля $X = \operatorname{sgrad} H(p,q)$ совпадают с траекториями другого векторного поля $\widetilde{X} = \operatorname{sgrad} \widetilde{H}(p,q)$, где новая функция Гамильтона $\widetilde{H}$ задается формулой

$$\widetilde{H}(p,q) = \sum_{i,j}^{n} \frac{q_{ij}(q)}{E - V(q)}. \tag{1.2}$$

Таким образом мы можем говорить об отображении Мопертюи [2]

$$X \to \widetilde{X},$$

которое переводит исходной векторное гамильтоново векторное поле X, заданное на многообразии $\mathcal{M}$, в другое векторное поле $\widetilde{X}$, также заданное на том же многообразии $\mathcal{M}$.

Из принципа Мопертюи сразу же следуют формулы замены времени вдоль интегральных траекторий полей X и $\widetilde{X}$. Именно, если t – время вдоль траекторий поля X, а $\widetilde{t}$ – время вдоль траекторий поля $\widetilde{X}$, то имеет место соотношение

$$d\widetilde{t} = (E - V(q))dt. \tag{1.3}$$

Преобразования функции Гамильтона $H(p,q) \to \widetilde{H}(p,q)$ (1.2) и соответствующие преобразования переменной времени $t \to \widetilde{t}$ (1.3) называются преобразованиями Якоби [8].

Для того, чтобы изучить свойства таких преобразований добавим к исходному фазовому пространству $\mathcal{M}$ переменную времени $q_{n+1} = t$ и гамильтониан $p_{n+1} = -H$. Полученное таким образом пространство $\mathcal{M}_E$ размерности $2n+2$ называют расширенным фазовым пространством [8]. Подчеркнем, что для функции Гамильтона нами используется обозначение $H(p,q)$, тогда как для независимой от координат p, q переменной p_{n+1} используется обозначение H.

Уравнения Гамильтонина–Якоби в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M}_E$ с обобщенным гамильтонианом

$$\mathcal{H} = H(p,q) - H \tag{1.4}$$

для координат $q_{n+1} = t$ и $p_{n+1} = -H$ имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dH}{d\tau} = 0.$$

Здесь τ – обобщенное время (параметр) отвечающий обобщенному гамильтониану $\mathcal{H}$. Таким образом, для рассматриваемых нами консервативных систем, время t является циклической координатой и соответствующий импульс H сохраняется.

Остальные $2n$ уравнений совпадают с исходными уравнениями Гамильтониана–Якоби в пространстве $\mathcal{M}$ на поверхности

$$\mathcal{H} = H(p,q) - H = 0.$$

Таким образом, исходная гамильтонова система на пространстве $\mathcal{M}$ может быть поднята до гамильтоновой системы в расширенном пространстве $\mathcal{M}_E$. Используя это вложение и канонические преобразования расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$ [8] можно построить отображение

$$\begin{array}{ccc}
 & (H,t) \text{ каноническое } \underset{\longrightarrow}{\text{преобразование}}\ (\widetilde{H},\widetilde{t}) & \\
\mathcal{M}_E & & \mathcal{M}_E \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathcal{M} & & \mathcal{M} \\
\uparrow & & \downarrow \\
H(p,q) & & \widetilde{H}(p,q)
\end{array}$$

исходной гамильтоновой системы с функцией $H(p,q)$ в другую гамильтонову систему с функцией $\widetilde{H}(p,q)$. Конечно, нам бы хотелось научиться строить подобные преобразования, которые сохраняли бы свойство интегрируемости.

Напомним, что преобразования сохраняющие канонический вид уравнений Гамильтониана–Якоби преобразования *каноническими* в большинстве учебников по вариационному исчислению и классической механике [3, 8, 9].

С другой стороны, в работах, посвященных геометрической теории фазового пространства, *каноническими* называются преобразования, сохраняющие дифференциальную 2-форму $\Omega_2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ данного симплектического многообразия [1]. Заметим, что эти два определения не эквивалентны [1].

Отображения Мопертюи–Якоби расширенного фазового пространства $\mathcal{M}$ сохраняют каноническую форму уравнения Гамильтона–Якоби
$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \tag{1.5}$$
Более того, преобразования Мопертюи–Якоби сохраняют и 2-форму $\Omega_2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ на изоэнергетическом уровне Q^{2n-1}, так как на Q^{2n-1} выполнено равенство
$$d\widetilde{H}(p,q) = \frac{1}{E - V(q)}\, dH(p,q).$$
Всюду далее мы будем использовать первое из определений канонических преобразований и, поэтому, преобразования Мопертюи–Якоби будем считать каноническими преобразованиями расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$.

Известно, что преобразования Мопертюи–Якоби отображают любую интегрируемую систему в другую интегрируемую систему. Данное свойство неоднократно использовалось для поиска новых интегрируемых систем [2]. Заметим, что это свойство остается справедливым и для гамильтоновых систем с функциями Гамильтона более общего вида [10].

В данной работе мы рассмотрим вопрос о построении общих преобразований расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$ вида
$$d\widetilde{t} = v^{-1}(p,q)dt \qquad \widetilde{H} = v(p,q)H, \tag{1.6}$$
которые также сохраняют каноническую форму уравнения Гамильтона–Якоби (1.5).

Предлагаемые преобразования также могут сохранять свойство интегрируемости. Для доказательства рассмотрим двумерный осциллятор с гамильтонианом

$$H_{\rm osc}(p,q) = p_1^2 + p_2^2 + a(q_1^2 + q_2^2) + b. \tag{1.7}$$

После преобразования (1.6) в пространстве $\mathcal{M}_E$ с функцией

$$v(p,q) = q_1^2 + q_2^2$$

и точечного преобразования переменных $(p_1, q_1, p_2, q_2) \to (p_x, x, p_y, y)$ гамильтониан двумерного осциллятора отображается в гамильтониан задачи Кеплера

$$\widetilde{H}_{\rm kepl}(p,x) = \frac{H_{\rm osc}(p,q)}{v(p,q)} = p_x^2 + p_y^2 + \frac{b}{\sqrt{x^2+y^2}} + a. \tag{1.8}$$

Очевидно, что преобразование Кеплера сохраняет свойство интегрируемости.

Известно, что любые канонические преобразования координат фазового пространства $\mathcal{M}$ сохраняют свойство интегрируемости. Для расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$ ситуация далеко не так тривиальна, нет регулярного способа нахождения канонических преобразований отображающих данную вполне интегрируемую систему в другую интегрируемую систему. Каждое найденное преобразование приводит либо к новой интегрируемой модели, либо устанавливает связи между известными интегрируемыми моделями, считавшимися до этого совершенно разными.

Если преобразование (1.6) расширенного пространства $\mathcal{M}_E$ связывает две интегрируемые системы, то можно предположить, что это преобразование порождает отображение соответствующих матриц Лакса и спектральных кривых. Таким образом, вопрос о построении преобразования (1.6), сохраняющего свойство интегрируемости, можно свести к изучению алгебраических преобразований матриц Лакса и геометрических преобразований соответствующих спектральных алгебраических кривых.

В данной работе мы рассмотрим, на примере цепочек Тоды, как обобщенные преобразования Мопертюи–Якоби–Кеплера (1.6) вляют на различные свойства данной интегрируемой системы.

2. Цепочки Тоды

Обычная периодическая цепочка Тоды – это система n взаимодействующих частиц с гамильтонианом

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}p_i^2+a_ie^{q_i-q_{i+1}}. \tag{2.1}$$

Здесь $\{p_i,q_i\}$ – координата и импульс i-й частицы, т.е. канонические координаты фазового пространства $\mathcal{M}=\mathbb{R}^{2n}$. Условие периодичности имеет вид $q_{i+n}=q_i$ и $p_{i+n}=p_i$ для любого индекса i.

Соответствующие уравнения движения обладают n интегралами движения, которые были получены впервые из матриц Лакса размерности $n\times n$ [7, 4]

$$\mathcal{L}^{(n)}(\mu)=\sum_{i=1}^{n}p_jE_{i,i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(e^{q_i-q_{i+1}}E_{i+1,i}+E_{i,i+1})+\mu e^{q_n-q_1}E_{1,n}+\mu^{-1}E_{n,1}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{A}^{(n)}(\mu,q)=\sum_{i=1}^{n-1}e^{q_i-q_{i+1}}E_{i+1,i}+\mu e^{q_n-q_1}E_{1,n}.$$

Здесь $E_{i,k}$ – матрица, элемент которой, стоящий в i-й строке и k-м столбце равен единице, а остальные элементы равны нулю.

Далее, мы будем иногда опускать верхний индекс n в обозначениях матриц Лакса (2.2). Эквивалентность уравнений движения и уравнения Лакса

$$\{H(p,q),\mathcal{L}\}=[\mathcal{L},\mathcal{A}]$$

проверяется путем непосредственных вычислений [7, 4].

Следуя [6], для данной интегрируемой системы можно ввести другие матрицы Лакса размерности 2×2

$$T^{(1\ldots n)}(\lambda)=L_1(\lambda)\ldots L_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathbb{A}(\lambda) & \mathbb{B}(\lambda)\\ \mathbb{C}(\lambda) & \mathbb{D}(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$L_j=\begin{pmatrix}\lambda+p_j & e^{q_j}\\ -e^{-q_j} & 0\end{pmatrix},\quad A_j=\begin{pmatrix}\lambda & e^{q_j}\\ -e^{-q_j} & 0\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

В данном случае уравнения Лакса могут быть предоставлены в виде

$$\{H(p,q),L_j\} = L_jA_j - A_{j-1}L_j, \quad \{H(p,q),T^{(1\dots n)}\} = [T^{(1\dots n)},A_n].$$

Далее мы также иногда будем опускать верхний индекс $(1\dots n)$ в обозначении матрицы монодромии $T(\lambda)$ (2.3).

Каноническое преобразование расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$

$$d\widetilde{t}_j = e^{q_j-q_{j+1}}dt, \quad \widetilde{H}_j = e^{q_{j+1}-q_j}(H+b), \quad b\in\mathbb{R} \tag{2.5}$$

Отображает цепочку Тоды в другую гамильтонову систему для любого $1\leqslant j\leqslant n$ [15]. Используя канонические преобразования переменных (p,q), можно доказать, что все функции Гамильтона $\widetilde{H}_j$ эквивалентны. В силу этого опустим индекс j для новой переменной времени $\widetilde{t}$ и нового гамильтониана $\widetilde{H}$.

Преобразование (2.5) индуцирует сдвиг матрицы Лакса размерности $n\times n$

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \widetilde{H}E_{j,j+1}, \quad \widetilde{\mathcal{L}}(\mu,q) = v^{-1}(q)\mathcal{A}(\mu,q). \tag{2.6}$$

Соответствующее преобразование матрицы монодромии имеет вид

$$\begin{aligned}\widetilde{T}^{1\dots n} &= T^{(1\dots n)} + T^{(1\dots j-1}\begin{pmatrix}H+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{(j+2\dots n)}\\ &= L_1\dots L_{j-1}\cdot\left[L_jL_{j+1}\begin{pmatrix}H+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot L_{j+2}\dots L_n,\\ &\widetilde{\mathcal{A}}_n(\lambda,q) = v^{-1}(q)A_n(\lambda,q).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Заметим, что в обоих случаях вторые матрицы Лакса преобразуется одинаково.

Преобразование (2.5) индуцирует преобразование спектральной кривой

$$\mathcal{C}:\ \det(\mathcal{L}(\mu)+\lambda I) = 0, \quad \text{или} \quad \det(T(\lambda)+\mu I) = 0,$$

которое сводится к перестановке коэффициентов (модулей кривой)

$$\begin{aligned} C:\ -\mu - \frac{1}{\mu}P(\lambda) &= \lambda^n + \lambda^{n-1}p + \lambda^{n-2}\left(\frac{p^2}{2} - H\right) + \dots\\ \widetilde{C}:\ -\mu - \frac{1-\widetilde{H}}{\mu}\widetilde{P}(\lambda) &= \lambda^n + \lambda^{n-1}p + \lambda^{n-2}\left(\frac{p^2}{2} - b\right) + \dots\end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $p = \sum p_j$ – полный импульс системы, H и $\widetilde{H}$ – функции Гамильтона.

Скобки Пуассона для матриц Лакса размерности $n \times n$ записываются в виде

$$\{\overset{1}{\mathcal{L}}(\mu), \overset{2}{\mathcal{L}}(\nu)\} = [r_{12}(\mu,\nu), \overset{1}{\mathcal{L}}(\mu)] + [r_{21}(\mu,\nu)\overset{2}{\mathcal{L}}(\nu)]. \tag{2.9}$$

Здесь мы использовали принятые обозначения

$$\overset{1}{\mathcal{L}}(\mu) = \mathcal{L}(\mu) \otimes I, \quad \overset{2}{\mathcal{L}}(\nu) = I \otimes \mathcal{L}(\nu),$$
$$r_{21}(\mu,\nu) = -\Pi r_{12}(\nu,\mu)\Pi,$$

и Π – оператор перестановки во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ [6].

Преобразование (2.5) сохраняет вид скобок Пуассона (2ю9) и отображает исходную постоянную r-матрицу,

$$r_{12}(\mu,\nu) = r_{12}^{\mathrm{const}}(\mu,\nu) = \frac{1}{\mu-\nu}\left(\nu\sum_{m\geqslant i} + \mu\sum_{m<i}\right) E_{im} \otimes E_{mi}$$

в динамическую r-матрицу вида

$$r_{12}(\mu,\nu) = r_{12}^{\mathrm{const}}(\mu,\nu) + r_{12}^{\mathrm{dyn}}(\mu,\nu), \quad r_{12}^{\mathrm{dyn}}(\mu,\nu) = \widetilde{\mathcal{A}}(\nu,q) \otimes E_{j,j+1}.$$

Заметим, что вторая матрица Лакса $\widetilde{\mathcal{A}}(\nu,q)$ и, соответственно, динамическая r-матрица зависит только от половины координат фазового пространства q_i.

Скобки Пуассона для матрицы монодромии $T(\lambda)$ (2.3) размерности 2×2 имеют вид

$$\{\overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\nu)\} = [R(\lambda-\nu), \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(\nu)], \quad R(\lambda-\nu) = \frac{\Pi}{\lambda-\nu}. \tag{2.10}$$

Преобразование (2.5) индуцирует сдвиг данных соотношений

$$\{\overset{1}{\widetilde{T}}(\lambda), \overset{1}{\widetilde{T}}(\nu)\} = [R(\lambda-\nu), \overset{1}{\widetilde{T}}(\lambda)\overset{1}{\widetilde{T}}(\nu)]$$
$$+ [r_{12}^{\mathrm{dyn}}(\lambda,\nu), \overset{1}{\widetilde{T}}(\lambda)] + [r_{21}^{\mathrm{dyn}}(\lambda,\nu), \overset{1}{\widetilde{T}}(\nu)],$$

и приводит к появлению динамических r-матриц

$$r_{12}^{\mathrm{dyn}}(\lambda,\nu) = A_n(\lambda,q) \otimes \left(L_1 \ldots L_{j-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot L_{j+1} \otimes L_n\right),$$

которые зависят от всех координат фазового пространства, кроме импульса p_j. Здесь все матрицы L_k зависят от спектрального параметра ν, а $A_n(\lambda, q)$ – вторая матрица Лакса (2.3).

Рассмотрим теперь переменные разделения и переменные действие-угол для цепочек Тоды и дуальных систем, следуя работам [7, 4, 12]. Для удобства положим $j = 1$, так что

$$\widetilde{H} = \exp(q_2 - q_1)(H + b),$$
$$\widetilde{T}^{(1\ldots n)} = T^{(1\ldots n)} + \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{(3\ldots n)} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbb{A}}(\lambda) & \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) \\ \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) & \widetilde{\mathbb{D}}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Заметим, что два элемента матрицы $T(\lambda)$ не изменяются

$$\mathbb{C}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda), \mathbb{D}(\lambda)\widetilde{\mathbb{D}}(\lambda).$$

Переменные разделения $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{n-1}\}$ определяются как нули одного из общих элементов матриц монодромии

$$\mathbb{C}(\lambda) = \widetilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \gamma \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_i), \tag{2.12}$$

Используя второй общий элемент матриц монодромии, определим переменные

$$\mu_i = \mathbb{D}(\lambda_i), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Для обоих систем пары канонически сопряженных переменных $\{\lambda_i, \log \mu_i\}$ [12]

$$\{\lambda_i, \log \mu_k\} = \delta_{ik},$$

являются переменными разделениями. Действительно, из соотношений $\det T(\lambda) = 1$ и $\det \widetilde{T}(\lambda) = (1 - \widetilde{H})$ сразу же следует, что

$$\mathbb{A}(\lambda_i) = \mu_i^{-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbb{A}}(\lambda_i) = (1 - \widetilde{H})\mu_i^{-1}$$

и, поэтому, соответствующие одномерные разделенные уравнения равны

$$\mu_i + \mu_i^{-1} = P(\lambda_i) \quad \text{и} \quad \mu_i + (1 - \widetilde{H})\mu_i^{-1} = \widetilde{P}(\lambda_i).$$

Здесь $P(\lambda) = \operatorname{tr} T(\lambda)$ и $\widetilde{P}(\lambda) = \operatorname{tr} \widetilde{T}(\lambda)$ – полиномы, определяющие правые части спектральных кривых (2.8).

Используя метод Арнольжа 1, 4] и каноническую форму гиперэллиптических спектральных кривых, определим переменные действия для обоих систем

$$
\begin{aligned}
s_i &= \oint_{\alpha_i} \frac{1}{2}\left(P(\lambda)+\sqrt{P(\lambda)^2-4}\right)d\lambda,\\
\widetilde{s}_i &= \oint_{\widetilde{\alpha}_i} \frac{1}{2}\left(\widetilde{P}(\lambda)+\sqrt{\widetilde{P}(\lambda)^2-4(1-\widetilde{H}}\right)d\lambda,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Здесь интегрирование ведеься по α-циклам соответствующих алгебраических кривых.

Рассмотрим теперь преобразование Беклунда B_ν для цепочек Тоды [5, 11]. Напомним, что преобразование Беклунда B_k является каноническим преобразованием $(p,q)\mapsto(P,Q)$ фазового пространства $\mathcal{M}$, сохраняющее форму интегралов движения. Более подробно свойства преобразования Беклунда описаны в работе [13].

Для цепочек Тоды преобразование Беклунда B_ν можно задать с помощью производящей функции [5] вида

$$
F_\nu(q\mid Q)=\sum_{i=1}^{n}(e^{q_i-Q_i}-e^{Q_i-q_{i+1}}-\nu(q_i-Q_i)),
\tag{2.14}
$$

так что

$$
p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i},\qquad P_i=-\frac{\partial F}{\partial Q_i}.
\tag{2.15}
$$

Для того, чтобы доказать инвариантность интегралов движения

$$
I_k(p,q)=I_k(P,Q),
\tag{2.16}
$$

докажем, что B_ν сохраняет спектр матрицы Лакса $L(\mu)$ (2.2), используя перестановочное соотношение вида

$$
\mathrm{M}(\mu,q,Q)\mathcal{L}(\mu,p,q)=\mathcal{L}(\mu,P,Q)\mathrm{M}(\mu,q,Q),
\tag{2.17}
$$

где

$$
\mathrm{M}(\mu,q,Q)=\sum_{i=1}^{n-1}e^{Q_i-q_{i+1}}E_{i+1,i}+\mu e^{Q_n-q_1}E_{1,n}.
\tag{2.18}
$$

Преобразование (2.5) расширенного фазового пространства $\mathcal{M}_E$ с произвольным индексом $1\leqslant j\leqslant n$ порождает сдвиг производящей функции преобразования Беклунда

$$
\widetilde{F}_\nu(q\mid Q)=F_\nu(q,Q)+\widetilde{T}e^{Q_j-q_{j+1}}=F_\lambda(q,Q)+\Delta F.
\tag{2.19}
$$

Здесь $\widetilde{H}$ независмая переменная расширенного пространства $\mathcal{M}_E$. Равенство (2.17) и вид матрицы $\mathrm{M}(\mu, q, Q)$ (2.18) не изменяются.

Преобразования B_ν (2.14) и $\widetilde{B}_\nu$ (2.19) являются изоспектральными преобразованиями для 2×2 матриц монодромии $T(\lambda)$ и $\widetilde{T}(\lambda)$. Так для цепочек Тоды соответствующие перестановочные соотношения имеют вид

$$M_i(\lambda, \nu) T_i(p, q) = T_i(P, Q) M_{i+1}(\lambda, \nu),$$

где

$$M_i(\lambda, \nu) = \begin{pmatrix} 1 & e^{Q_{i-1}} \\ -e^{-q_i} & \nu - \lambda - e^{Q_{i-1} - q_i} \end{pmatrix}.$$

При $i \neq j, j+1$ эти соотношения остаются справедливыми и после замены переменных (2.5). При этом одно добавочное соотношение не разлагается на множители

$$M_j(\lambda, \nu) \left[T_j(p, q) \begin{pmatrix} \lambda + p_{j+1} & a_j e^{q_{j+1}} \\ -e^{-q_{j+1}} (1 + \widetilde{H}) & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \left[T_j(P, Q) \begin{pmatrix} \lambda + P_{j+1} & a_j e^{Q_{j+1}} \\ -e^{-Q_{j+1}} (1 + \widetilde{H}) & 0 \end{pmatrix} \right] M_{j+2}(\lambda, \nu).$$

Напомним, что для цепочек Тоды ядро квантового оператора Бакстера $\mathbb{Q}$ в квазиклассическом пределе выражается через

производящую функцию преобразования Беклунда $F_\lambda(q \mid Q)$ [11, 13]. Таким образом, преобразование (2.5) порождает следующее преобразование ядра оператора Бакстера $\mathbb{Q}$ в квазиклассическом пределе

$$\widetilde{\mathbb{Q}} \sim \exp(-i\widetilde{F}/\hbar).$$

Литература

1. V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer, 2nd. edition (1989).
2. А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко, УМН, **50**, вып. 3 (1994), 4–31.
3. К. Якоби, *Лекции по динамике 1842–1843.* Гостехиздат, Л., 1936.
4. H. Flaschka, D. Mc. Laughlin, Prog. Theor. Phys., **55** (1976), 438.
5. М. Гаудин, *Ла фонцтион д'онде де Бетхе.* Массон, Парис (1983).
6. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* Наука, М., 1986.
7. M. Kac, P. Van Moerbeke, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **72** (1975), 1627, 2879.

8. C. Lanczos, *The variational principles of mechanics.* Toronto (1949).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика.* 1958.
10. С. П. Новиков, УМН, **37**, вып. 5 (1982), 3–49.
11. V. Pasquier, M. Gaudin, J. Phys. A., **25** (1992), 5243.
12. E. K. Sklyanin, Lect. Notes in Physics, **226** (1985), 196.
13. E. K. Sklyanin, V. B. Kuznetsov, J. Phys., **31** (1998), 2241.
14. A. V. Tsiganov, Teor. Math. Phys., **120** (1999), 27.
15. A. V. Tsiganov, *Canonical transformations of the extended phase, Toda lattices and Stäckel family of integrable systems.* Preprint solv-int/9909006, 1999.

Tsiganov A. V. On the Maupertuis–Jakobi transformation and Toda chains.

For the Toda lattice we consider properties of canonical transformations of the extended phase space, which preserve integrability. The separated variables are invariant undr change of the time. On the other hand, mapping of the time induces transformations of the action-angles variables and a shift of the generating function of the Bäcklund transformation.

Санкт-Петербургский
Государственный университет
e-mail:tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Поступило 24 января 2000 г.