Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

В. И. Васюнин

ОПИСАНИЕ ГИПЕРИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ СЖАТИЙ В ТЕРМИНАХ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хорошо известно (см., например, [1]), что существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами вполне неунитарного сжатия и регулярными факторизациями его характеристической функции. Целью настоящей заметки является описание тех регулярных факторизаций, для которых соответствующие инвариантные подпространства являются гиперинвариантными. Будет доказана следующая теорема:

Теорема. *Пусть T – вполне неунитарное сжатие, действующее в гильбертовом пространстве, $\Theta \in H^\infty(E \to E_*)$ – его характеристическая функция. Пусть $L \in \operatorname{Lat} T$, и $\Theta = \Theta'\Theta''$ – соответствующая регулярная факторизация, $\Theta' \in H^\infty(E \to F)$, $\Theta'' \in H^\infty(F \to E_*)$. Положим $\Delta'_* = (I - \Theta'\Theta'^*)^{1/2}$, $\Delta'' = (I - \Theta''^*\Theta'')^{1/2}$. Тогда $L \in \operatorname{HypLat} T$ в том и только в том случае, когда выполнены два следующих условия:*

1°) $\operatorname{supp} \Delta'_* \cap \operatorname{supp} \Delta''$ *– множество лебеговой меры ноль;*
2°) *для любой пары оператор-функций $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$, сплетаемых функцией Θ, т.е. такой что $\Theta A = A_*\Theta$, существует функция $A_F \in H^\infty(F \to F)$, сплетаемая множителем Θ' с A и множителем Θ'' с A_*, т.е. $\Theta' A = A_F\Theta'$, $\Theta'' A_F = A_*\Theta''$.*

1. Основные понятия и обозначения

Основные понятия, которые будут использоваться в данной статье, могут быть найдены в классической книге Сёкефальви-Надя–Фойаша [1]. Однако я буду использовать так называемую бескоординатную технику, опирающуюся на понятие функциональных вложений. Подробное описание бескоординатной моде-

---

Работа частично поддержана грантом РФФИ 98-01-00312, ФЦП "Интеграция" рег. No. 326.53 и грантом Шведской Королевской Академии Наук.

ли можно найти в [2] или [3]. А тут будет приведено лишь краткое описание возникающих объектов.

Пусть T – вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H. Если $\mathcal{H}$ – пространство его минимальной унитарной дилатации $\mathcal{U}$, то $\mathcal{H}$ может быть разложено в ортогональную сумму

$$\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G,$$

где $\mathcal{U}G \subset G, \mathcal{U}^*G_* \subset G_*$. Минимальность дилатации означает, что

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}\{\, \mathcal{U}^n H : n \in \mathbb{Z}\,\},$$

откуда вытекает, что $\mathcal{U}|G$ и $\mathcal{U}^*|G_*$ – чистые изометрии, т.е. операторы сдвига. Следовательно, они унитарно эквивалентны операторам умножения на z в некоторых H^2-пространствах. А именно, можно взять два вспомогательных гильбертовых пространства E и E_*, размерности которых равны кратностям наших изометрий

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim(G \ominus \mathcal{U}G),\\ \dim E_* &= \dim(G_* \ominus \mathcal{U}^*G_*),\end{aligned}$$

и затем определить изометрические вложения π и π_* пространств $L^2(E)$ и $L^2(E_*)$ в $\mathcal{H}$, сплетающие умножение на z с оператором $\mathcal{U}$, и такие что

$$G = \pi H^2(E), \quad G_* = \pi H^2_-(E_*).$$

Тогда

$$H = \mathcal{H} \ominus \big(\pi H^2(E) \oplus \pi H^2_-(E_*)\big),$$

и ортогональный проектор на H задается формулой

$$P_H = I - \pi P_+ \pi_* - \pi^* P_- \pi_*^*,$$

где P_+ – проектор Рисса в L^2 на H^2, а $P_- = I - P_+$ – ортогональный проектор на $H^2_- = L^2 \ominus H^2$. Оператор $\Theta \overset{\text{def}}{=} \pi_*^*\pi$ является оператором умножения на некоторую сжимающую аналитическую функцию, называемую характеристической функцией оператора T.

Подпространства

$$\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi_* L^2(E_*) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_* \overset{\text{def}}{=} \mathcal{H} \ominus \pi L^2(E)$$

называются остаточным и $*$-остаточным подпространствами. Они также могут быть представлены как образы некоторых изометрий, действующих из L^2-пространств и сплетающих умножение на z с $\mathcal{U}$. А именно, положим

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta^*\Theta)^{1/2}, \qquad \Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} (I - \Theta\Theta^*)^{1/2},$$

и

$$L^2(\Delta E) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta L^2(E), \qquad L^2(\Delta_* E_*) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos} \Delta_* L^2(E_*).$$

Определим теперь операторы $\tau\colon L^2(\Delta E) \to \mathcal{H}$ и $\tau_*: L^2(\Delta_* E_*) \to \mathcal{H}$ формулами

$$\tau\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \pi_*\Theta, \qquad \tau_*\Delta_* \stackrel{\text{def}}{=} \pi_* - \pi\Theta^*.$$

Первоначально заданные на плотных подмножествах, эти операторы могут быть продолжены на все пространство по непрерывности. Операторы $\tau\tau^*$ и $\tau_*\tau_*^*$ являются ортогональными проекторами на $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_*$, т.е.

$$\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^* = I, \qquad \pi_*\pi_*^* + \tau\tau^* = I.$$

В дальнейшем будут постоянно использоваться соотношения между вложениями π и τ без специальных упоминаний. Поэтому приведем здесь некоторые полезные тождества, вытекающие непосредственно из определений:

$$\begin{array}{llll}
\pi^*\pi = I, & \pi^*\pi_* = \Theta^*, & \pi^*\tau = \Delta, & \pi^*\tau_* = 0, \\
\pi_*^*\pi = \Theta, & \pi_*^*\pi_* = I, & \pi_*^*\tau = 0, & \pi_*^*\tau_* = \Delta_*, \\
\tau^*\pi = \Delta, & \tau^*\pi_* = 0, & \tau^*\tau = I, & \tau^*\tau_* = -\Theta^*, \\
\tau_*^*\pi = 0, & \tau_*^*\pi_* = \Delta_*, & \tau_*^*\tau = -\Theta, & \tau_*^*\tau_* = I.
\end{array}$$

Чтобы получить функциональную модель в форме Сёкефальви-Надя–Фойаша, нужно выбрать $\mathcal{H} = L^2(E_*) \oplus L^2(\Delta E)$, или, записывая в форме столбцов,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} L^2(E_*) \\ L^2(\Delta E) \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix} H^2(E), \qquad G_* = \begin{pmatrix} H^2_-(E_*) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi = \begin{pmatrix} \Theta \\ \Delta \end{pmatrix}, \qquad \pi_* = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \qquad \tau_* = \begin{pmatrix} \Delta_* \\ -\Theta^* \end{pmatrix}.$$

Два классических результата (а именно, теорема о подъеме и связь между инвариантными подпространствами и регулярными факторизациями характеристической функции) будут использоваться в бескоординатной форме, как они представлены в [4] (в [2] также можно найти это представление). Для удобства приведем здесь формулировки этих теорем.

Теорема о подъеме. *Если X – ограниченный оператор в H, коммутирующий с T, то существует оператор Y в $\mathcal{H}$ с той же самой нормой, коммутирующий с $\mathcal{U}$, и такой, что*

$$YG \subset G, \quad Y^*G_* \subset G_*, \quad \text{и} \quad X = P_H Y|H.$$

Более того, оператор Y имеет вид

$$Y = \pi_* A_* \pi_*^* + \tau \Delta A \pi^* + \tau B \tau_*^*, \tag{1}$$

или (что то же самое)

$$Y = \pi A \pi^* + \pi_* A_* \Delta_* \tau_*^* + \tau B \tau_*^*.$$

Здесь $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$, $B \in L^\infty(\Delta_* E_* \to \Delta E)$, и $A_* \Theta = \Theta A$, где Θ – характеристическая функция оператора T.

Теорема об инвариантных подпространствах. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *T имеет инвариантное подпространство;*
(ii) *Θ допускает регулярную факторизацию;*
(iii) *существует такое изометрическое вложение η пространства $L^2(F)$ в $\mathcal{H}$, что*
  (a) *$\eta^* G \subset H^2(F)$;*
  (b) *$\eta^* G_* \subset H^2_-(F)$;*
  (c) *$\pi_*^*(I - \eta\eta^*)\pi = 0$.*

В дальнейшем нам понадобится не только абстрактная эквивалентность инвариантных подпространств, регулярных факторизаций и соответствующих функциональных вложений η, но и явные формулы, связывающие эти объекты.

Прежде всего напомним определение регулярной факторизации. Факторизация

$$\Theta = \Theta'' \Theta', \tag{2}$$

где $\Theta' \in H^\infty(E \to F)$, $\Theta'' \in H^\infty(F \to E_*)$, называется *регулярной* если оператор

$$Z\colon L^2(\Delta E) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta' E) \\ L^2(\Delta'' F) \end{pmatrix}, \qquad Z\Delta \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z' \\ Z'' \end{pmatrix} \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' \\ \Delta''\Theta' \end{pmatrix},$$

является унитарным. Здесь Z', Z'' – проекции оператора Z на подространства $L^2(\Delta' E)$ и, соответственно, $L^2(\Delta'' F)$, и $\Delta' \overset{\text{def}}{=} (I - \Theta'^*\Theta')^{1/2}$, $\Delta'' \overset{\text{def}}{=} (I - \Theta''^*\Theta'')^{1/2}$. Если η – изометрическое вложение, совместимое с π и π_*, т.е. для него выполнены условия (a)–(c) теоремы об инвариантных подпространствах, то полагая $\Theta' = \eta^*\pi$, $\Theta'' = \pi_*^*\eta$, мы получаем регулярную факторизацию (2). Наоборот, если задана регулярная факторизация (2), то дополнительное вложение η, обладающее свойствами (a)–(c), можно определить формулой

$$\eta = \pi_*\Theta'' + \tau Z''^*\Delta''. \tag{3}$$

Симметричным образом можно ввести оператор Z_*:

$$Z_*\colon L^2(\Delta_* E_*) \to \begin{pmatrix} L^2(\Delta_*'' E_*) \\ L^2(\Delta_*' F) \end{pmatrix}, \qquad Z_*\Delta_* \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Z_*'' \\ Z_*' \end{pmatrix} \Delta_* = \begin{pmatrix} \Delta_*'' \\ \Delta_*'\Theta''^* \end{pmatrix},$$

где $\Delta_*' \overset{\text{def}}{=} (I - \Theta'\Theta'^*)^{1/2}$, $\Delta_*'' \overset{\text{def}}{=} (I - \Theta''\Theta''^*)^{1/2}$, а Z_*', Z_*'' – проекции оператора Z_* на подпространства $L^2(\Delta_*' F)$ и, соответственно, $L^2(\Delta_*'' E_*)$. Тогда можно написать следующую формулу для η (симметричную формуле (3)):

$$\eta = \pi\Theta'^* + \tau_* Z_*'^*\Delta_*'. \tag{4}$$

Следует отметить, что Z унитарен (т.е. факторизация $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ регулярна) тогда и только тогда, когда Z_* унитарен.

Введем теперь еще четыре изометрических вложения:

$$\tau' \overset{\text{def}}{=} \tau Z'^*, \qquad \tau'' \overset{\text{def}}{=} \tau Z''^*, \qquad \tau_*' \overset{\text{def}}{=} \tau_* Z_*'^*, \qquad \tau_*'' \overset{\text{def}}{=} \tau_* Z_*''^*.$$

Каждый из этих операторов является произведением двух изометрий, поэтому все они – изометрические вложения соответствующих L^2-пространств в $\mathcal{H}$. Положим

$$\mathcal{R}' \overset{\text{def}}{=} \tau' L^2(\Delta' E), \qquad \mathcal{R}'' \overset{\text{def}}{=} \tau'' L^2(\Delta'' F),$$
$$\mathcal{R}_*' \overset{\text{def}}{=} \tau_*' L^2(\Delta_*' F), \qquad \mathcal{R}_*'' \overset{\text{def}}{=} \tau_*'' L^2(\Delta_*'' E_*).$$

Так как Z и Z_* унитарны, то

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}'', \qquad \mathcal{R}_* = \mathcal{R}'_* \oplus \mathcal{R}''_*.$$

Нетривиальным фактом является то, что для регулярных факторизаций подпространства $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''_*$ ортогональны, а их сумма – это ортогональное дополнение в $\mathcal{H}$ подпространства $\eta L^2(F)$. Таким образом, справедливы три следующих ортогональных разложения пространства минимальной унитарной дилатации:

$$\mathcal{H} = \eta L^2(F) \oplus \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''_* = \pi L^2(E) \oplus \mathcal{R}'_* \oplus \mathcal{R}''_* = \pi_* L^2(E_*) \oplus \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}'',$$

а T-инвариантным подпространством, соответствующим нашему вложению η, будет подпространство

$$L = \big(\eta H^2(F) \oplus \mathcal{R}'\big) \ominus G = \big(\eta H^2(F) \oplus \tau' L^2(\Delta' E)\big) \ominus \pi H^2(E).$$

Для ко-инвариантного подпространства $L^\perp \stackrel{\mathrm{def}}{=} H \ominus L$ справедливо представление

$$L^\perp = \big(\eta H^2_-(F) \oplus \mathcal{R}''_*\big) \ominus G_* = \big(\eta H^2_-(F) \oplus \tau''_* L^2(\Delta''_* E_*)\big) \ominus \pi_* H^2_-(E_*).$$

2. Индивидуальная лемма

Прежде чем описывать подпространства, инвариантные относительно всех операторов из коммутанта, опишем те подпространства, которые инвариантны относительно какого-либо одного фиксированного оператора X, коммутирующего с T.

Лемма. *Пусть $X \in \{T\}'$, а Y – подъем оператора X с функциональными параметрами $\{A, A_*, B\}$, задающими Y по формуле (1). Определим два вспомагательных функциональных параметра подъема Y : $C \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau^* Y \tau = \Delta A \Delta - B\Theta$ и $C_* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau_*^* Y \tau_* = \Delta_* A_* \Delta_* - \Theta B$. Пусть $L \in \operatorname{Lat} T$ и формула (2) дает соответствующую регулярную факторизацию характеристической функции. Тогда $L \in \operatorname{Lat} X$ в том и только в том случае, когда выполнены следующие три условия:*

1) $\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^* + \Delta'' Z'' B Z'^*_* \Delta'_* \in H^\infty(F \to F)$;
2) $Z'' C Z'^* = 0$;
3) $Z''_* C_* Z'^*_* = 0$.

Доказательство. Прежде всего перепишем соотношения 1)–3) в терминах функциональных вложений:

1′) $\eta^* Y \eta \in H^\infty(F \to F)$;

2′) $\tau''^{*}Y\tau' = 0$;

3′) $\tau''^{*}_{*}Y\tau'_{*} = 0$.

Равносильность утверждений 2) $\leftrightarrow$ 2′) и 3) $\leftrightarrow$ 3′) вытекает сразу из определения параметров C и вложений τ с соответствующими индексами. Нам нужно только проверить, что $\eta^{*}Y\eta = \Theta''^{*}A_{*}\Theta'' + \Delta''^{2}\Theta' A\Theta'^{*} + \Delta'' Z'' B Z'^{*}_{*}\Delta'_{*}$Ж

$$\begin{aligned}\eta^{*}Y\eta &= \eta^{*}(\pi_{*}A_{*}\pi_{*}^{*} + \tau\Delta A\pi^{*} + \tau B\tau_{*}^{*})\eta\\ &= \Theta''^{*}A_{*}\Theta'' + \Delta'' Z''\Delta A\Theta'^{*} + \Delta'' Z'' B Z'^{*}_{*}\Delta'_{*}\\ &= \Theta''^{*}A_{*}\Theta'' + \Delta''^{2}\Theta' A\Theta'^{*} + \Delta'' Z'' B Z'^{*}_{*}\Delta'_{*}.\end{aligned}$$

Здесь были использованы определения сомножителей Θ', Θ'' в терминах вложения η и соотношения $\eta^{*}\tau = \Delta'' Z''$, $\tau_{*}^{*}\eta = Z'^{*}_{*}\Delta'_{*}$, которые непосредственно следуют из тождеств (3) и (4).

Перепишем теперь в терминах функциональных вложений условие $L \in \operatorname{Lat} X$. Заметим, что это равносильно вложению

$$Y(L \oplus G) \subset L \oplus G. \tag{5}$$

Действительно, поскольку $YG \subset G$, условие (5) равносильно вложению $YL \subset L \oplus G$. Но последнее вложение равносильно тому, что $P_{H}YL \subset L$, потому что всегда имеет место вложение $Y(H \oplus G) \subset H \oplus G$. Напомним, что в модельных терминах

$$L \oplus G = \eta H^{2}(F) \oplus \tau' L^{2}(\Delta' E),$$

поэтому условие (5) равносильно паре вложений

$$Y\eta H^{2}(F) \subset \eta H^{2}(F) \oplus \tau' L^{2}(\Delta' E), \tag{6}$$

$$Y\tau' L^{2}(\Delta' E) \subset \eta H^{2}(F) \oplus \tau' L^{2}(\Delta' E). \tag{7}$$

А учитывая разложение

$$\mathcal{H} = \eta L^{2}(F) \oplus \tau' L^{2}(\Delta' E) \oplus \tau''_{*} L^{2}(\Delta''_{*}E_{*}),$$

мы видим, что (6) равносильно следующей паре условий

$$\begin{aligned}&\eta^{*}Y\eta H^{2}(F) \subset H^{2}(F), &&\text{т.е.}\quad \eta^{*}Y\eta \in H^{\infty}(F\to F),\\ &\tau''^{*}_{*}Y\eta H^{2}(F) = 0, &&\text{т.е.}\quad \tau''^{*}_{*}Y\eta = 0,\end{aligned}$$

а (7) равносильно условиям

$$\eta^{*}Y\tau' L^{2}(\Delta' E) \subset H^{2}(F), \tag{8}$$

$$\tau''^{*}_{*}Y\tau' L^{2}(\Delta' E) = 0, \qquad \text{т.е.}\quad \tau''^{*}_{*}Y\tau' = 0.$$

Умножая обе части вложения (8) на $\bar{z}^n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что левая часть остается неизменной, а правая стремится к нулю, следовательно, (8) равносильно утверждению

$$\eta^* Y \tau' L^2(\Delta' E) = 0, \qquad \text{т.е.} \quad \eta^* Y \tau' = 0.$$

Подытоживая сказанное, заключаем, что вложение $XL \subset L$ имеет место в том и только в том случае, когда выполняются следующие четыре условия:

i) $\eta^* Y \eta \in H^\infty(F \to F)$;
ii) $\tau_*''^* Y \eta = 0$;
iii) $\eta^* Y \tau' = 0$;
iv) $\tau_*''^* Y \tau' = 0$.

Условие i) совпадает с условием 1′), таким образом нам надо проверить, что условия ii)–iv) выполняются тогда и только тогда, когда выполнены условия 2′) – 3′). Эта равносильность немедленно вытекает из следуюущих соотношений:

$$\tau_*''^* Y \eta = \tau_*''^* Y \tau_*' \Delta_*'; \tag{9}$$

$$\eta^* Y \tau' = \Delta'' \tau''^* Y \tau'; \tag{10}$$

$$\tau_*''^* Y \tau' = -\tau_*''^* Y \tau_*' \Theta' = -\Theta'' \tau''^* Y \tau'. \tag{11}$$

Действительно, тождество (9) показывает, что 3′) $\Longrightarrow$ ii), а (10) показывает, что 2′) $\Longrightarrow$ iii), а тождество iv) вытекает как из 2′), так и из 3′) в силу соотношений (11). Обратно, поскольку из (9) и (11) вытекает равенство

$$\tau_*''^* Y \tau_*' = \tau_*''^* Y \eta \Delta_*' - \tau_*''^* Y \tau' \Theta'^*,$$

мы получаем импликацию ii) & iv) $\Longrightarrow$ 3′), а так как из (10) и (11) следует тождество

$$\tau''^* Y \tau' = \Delta'' \eta^* Y \tau' - \Theta''^* \tau_*''^* Y \tau',$$

мы получаем импликацию iii)&iv) $\Longrightarrow$ 2′). Таким образом, чтобы завершить доказательство, нужно проверить справедливость тождеств (9)–(11).

Прежде всего заметим, что $\pi_*^* Y \tau = 0$ и $\tau_*^* Y \pi = 0$. И докажем тождество (9), подставляя выражение (4) для η, а тождество (10), подставляя выражение (3). Соотношения (11) доказываются чуть более сложно, тут нам понадобятся следующие тождества

$$\Theta'^* Z_*' = Z' \Theta^* \qquad \text{и} \qquad Z_*'' \Theta = \Theta'' Z'',$$

которые могут быть проверены, исходя прямо из определения функций Z и Z_*. Используя первое из этих тождеств, мы получаем первое соотношение из (11):

$$\begin{aligned}\tau_*''^*Y\tau' &= \tau_*''^*Y(\pi\pi^* + \tau_*\tau_*^*)\tau Z'^* \\ &= \tau_*''^*Y\tau_*(-\Theta)Z'^* = -\tau_*''^*Y\tau_*Z_*'^*\Theta' = -\tau_*''^*Y\tau_*'\Theta'.\end{aligned}$$

Используя второе, аналогичным способом получаем:

$$\begin{aligned}\tau_*''^*Y\tau' &= Z_*''\tau_*^*(\pi_*\pi_*^* + \tau\tau^*)Y\tau' \\ &= Z_*''(-\Theta)\tau^*Y\tau' = -\Theta''Z''\tau^*Y\tau' = -\Theta''\tau''^*Y\tau'.\end{aligned}$$

Таким образом, мы проверили равносильность условий $1') - 3')$ и i)–iv), что завершает доказательство леммы. $\bullet$

3. Доказательство теоремы

Предоложим, что условия 1°) и 2°) теоремы выполнены и X – произвольный оператор, коммутирующий с T, а Y – его подъем с параметрами $\{A, A_*, B\}$. Тогда $Z''BZ_*'^* = 0$, поскольку $\operatorname{supp} Z''BZ_*'^* \subset \operatorname{supp}\Delta'' \cap \operatorname{supp}\Delta_*'$. Следовательно, условия 1)–3) леммы принимают вид

1'') $\Theta''^*A_*\Theta'' + \Delta''^2\Theta'A\Theta'^* \in H^\infty(F\to F)$;
2'') $\Delta''\Theta'A\Delta' = 0$;
3'') $\Delta_*''A_*\Theta''\Delta_*' = 0$.

Однако из условия 1°) вытекают равенства

$$\begin{aligned}\Delta''\Theta'A\Delta' &= \Delta''A_F\Theta'\Delta' = (\Delta''A_F\Delta_*')\Theta' = 0,\\ \Delta_*''A_*\Theta''\Delta_*' &= \Delta_*''\Theta''A_F\Delta_*' = \Theta''(\Delta''A_F\Delta_*') = 0,\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{supp}(\Delta''A_F\Delta_*') \subset \operatorname{supp}\Delta'' \cap \operatorname{supp}\Delta_*'$, и, следовательно, функция в скобках почти всюду равна нулю.

Итак условия $2'') - 3'')$ выполнены, и нам остается проверить справедливость условия $1''$). Используя сплетающее соотношение из 2°) и еще раз тот факт, что $\Delta''A_F\Delta_*' = 0$, мы приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}\Theta''^*A_*\Theta'' + \Delta''^2\Theta'A\Theta'^* &= \Theta''^*\Theta''A_F + \Delta''^2A_F\Theta'\Theta'^* \\ &= A_F - \Delta''^2A_F\Delta_*'^2 = A_F \in H^\infty(F\to F).\end{aligned}$$

Обратно, пусть теперь выполнены условия 1)–3) леммы для всех $B \in L^\infty(\Delta_*E_*\to\Delta E)$ и для любой пары A, A_*. Прежде всего выберем $A = 0$, $A_* = 0$ и $B = Z''^* B_0 Z'_*$, где B_0 – произвольная функция из $L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)$. Тогда 1) можно переписать в виде $\Delta'' B_0 \Delta'_* \in H^\infty(F \to F)$, т.е. $\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* \subset H^\infty(F \to F)$, откуда

$$\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* H^2(F) \subset H^2(F).$$

Поскольку левая часть этого включения инвариантна относительно умножения на $\bar z$, это – нулевое подпространство в $L^2(F)$. Та же самая инвариантность дает нам

$$\{0\} = \Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* H^2(F) = \Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* \bar z^n H^2(F),$$

и, следовательно, $\Delta'' L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F)\Delta'_* L^2(F) = \{0\}$, т.е. $L^\infty(\Delta'_* F \to \Delta'' F) = \{0\}$, что и означает равенство нулю лебеговой меры множества $\operatorname{supp}\Delta'_* \cap \operatorname{supp}\Delta''$. Таким образом, условие 1°) теоремы выполнено.

Как мы уже знаем, при выполнении 1°) условия 1)–3) леммы превращаются в $1'') - 3'')$. Теперь требуемую условием 2°) функцию A_F мы возьмем из $1'')$ и проверим, что эта функция A_F удовлетворяет сплетающим соотношениям.

$$\begin{aligned}
A_F\Theta' &= (\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^*)\Theta' \\
&= \Theta''^* A_* \Theta + \Delta''^2 \Theta' A (I - \Delta'^2) \qquad \text{используем } 2'') \\
&= (\Theta''^* \Theta'' + \Delta''^2)\Theta' A = \Theta' A; \\
\Theta'' A_F &= \Theta''(\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta''^2 \Theta' A \Theta'^*) \\
&= \Theta''\Theta''^* A_* \Theta'' + \Delta_*''^2 \Theta A \Theta'^* \\
&= A_*\Theta'' - \Delta_*''^2 A_* \Theta'' + \Delta_*''^2 A_* \Theta \Theta'^* \\
&= A_*\Theta'' - \Delta_*''^2 A_* \Theta'' \Delta_*'^2 = A_*\Theta'' \qquad \text{в силу } 3'').
\end{aligned}$$

Таким образом, условие 2°) выполнено, и теорема доказана. •

4. Заключительные замечания

Отметим, что условие 1°) теоремы влечет дополнительную ортогональность среди частей остаточных подпространств, а именно,

$$\mathcal{R}'' \perp \mathcal{R}'_*.$$

Это вытекает из соотношения $\tau'^*_* \tau'' = \Delta'_* \Delta''$.

Второе замечание относится к сжатиям со скалярной характеристической функцией. Для таких сжатий регулярная факторизация (2) соответствует гиперинвариантному подпространству в том и только в том случае, когда вспомогательное подпространство F не более, чем одномерно.

Случай $\dim F = 0$ с очевидностью дает гиперинвариантное подпространство, поскольку в этом случае $\Delta'' = \Delta'_* = 0$, как операторы в нулевом пространстве, и $A_F = 0$ удовлетворяет обоим сплетающим соотношениям, так как оба сомножителя характеристической функции Θ равны нулю.

Если $\dim F = 1$ и $\Theta = 0$, то факторизация $0 = \Theta''\Theta'$ является регулярной, если или $\Theta' = 0$, а Θ'' – внутренняя, или $\Theta'' = 0$, а Θ' – внутренняя. В первом случае $\Delta'' = 0$, во втором – $\Delta'_* = 0$, следовательно условие 1°) выполнено. Чтобы удовлетворить условию 2°), положим $A_F = A_*$, если $\Theta' = 0$, и $A_F = A$, если $\Theta'' = 0$.

Теперь пусть Θ – ненулевая скалярная функция. Тогда из равенства $\Theta A = A_*\Theta$ вытекает, что $A = A_*$, и, следовательно, мы удовлетворим условию 2°), положив $A_F = A$. Условие 1°) всегда выполнено, поскольку для скалярных факторизаций скалярной характеристической функции существует измеримое подмножество ω единичной окружности $\mathbb{T}$, такое что

$$\Delta' = \Delta'_* = \chi_\omega \Delta \qquad \text{и} \qquad \Delta'' = \Delta''_* = \chi_{\mathbb{T}\setminus\omega}\Delta,$$

где χ_ω – индикатор множества ω.

Наконец, нам надо проверить, что в случае $\dim F = 2$ нет гиперинвариантных подпространств. В этом случае и Δ'', и Δ'_* являются проекторно-значными функциями, их значения суть проекторы ранга один почти всюду, т.е. не выполнено условие 1°).

Литература

1. Б. Сёкефальви-Надь и Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* М., Мир, 1971.
2. N. Nikolski and V. Vasyunin, *Elements of spectral theory in terms of the free function model. I. Basic constructions.* Holomorphic spaces (Axler, McCarthy, Sarason, ed.), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 33, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998, pp. 211–302.
3. N. Nikolski and V. Vasyunin, *A unified approach to function models, and the transcription problem.* Operator Theory Adv. Appl, vol. 41. Basel-Boston, Birkhäuser, 1989, pp. 405–434.

4. В. Васюнин, *Две классические теорему о модели в бескоординатном изложении.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **178** (1989), 5–22.

Vasyunin V. I. Description of hyperinvariant subspaces of a contraction in terms of its characteristic function.

If T is a completely nonunitary contraction on a Hilbert space and L is its invariant subspace corresponding to a regular factorizations of its characteristic function $\Theta = \Theta'\Theta''$, then L is hyperinvariant if and only if the following two conditions are fulfilled:

1°) $\operatorname{supp} \Delta'_* \cap \operatorname{supp} \Delta''$ is of Lebesgue measure zero;

2°) for every pair $A \in H^\infty(E \to E)$, $A_* \in H^\infty(E_* \to E_*)$ intertwinned by Θ, i.e., such that $\Theta A = A_*\Theta$, there exists a function $A_F \in H^\infty(F \to F)$ intertwinned by Θ' with A and by Θ'' with A_*, i.e., $\Theta' A = A_F \Theta'$, $\Theta'' A_F = A_* \Theta''$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 марта 2000