Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

Б. Диттмар, А. Ю. Солынин

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА СТЕКЛОВА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И НОВЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОЛЬЦА ГРЕТША

1. Введение

Пусть Ω – область комплексной плоскости $\mathbf{C}$, граница которой $\partial\Omega$ состоит из конечного числа невырожденных континуумов. Пусть $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$, где $C_2 = C_2(\Omega)$ – объединение конечного числа открытых кусочно-гладких дуг и кусочно-гладких граничных компонент. Для неотрицательной плотности $\rho \geqslant 0$, заданной на C_2, будем рассматривать смешанную задачу Стеклова о собственных значениях:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \tag{1.1}$$

$$u = 0 \qquad \text{на} \quad C_1 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mu\rho u \qquad \text{на} \quad C_2, \tag{1.3}$$

где n – внешняя нормаль на C_2. Задача (1.1)–(1.3) изучалась в работах [11, 3, 4]. Классический случай $C_1 = \emptyset$ впервые рассматривался Стекловым [19].

Как хорошо известно [11], в случае $C_1 \neq \emptyset$ задача (1.1)–(1.3) имеет бесконечное число собственных значений

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \dots$$

Если u_1, u_2, ... – соответствующие собственные функции, то $\mu_k = R[u_k]$, где $R[v]$ – отношение Рэлея, т.е.

$$R[v] = \frac{\iint_\Omega |\nabla v|^2 \, dxdy}{\int_{C_2} \rho(s) v^2 \, ds}. \tag{1.4}$$

Работа второго автора частичного поддерживалась грантом РФФИ, грант № 00-01-00118.

Каждое собственное значение $\mu_n = \mu_n(\Omega, \rho)$ может быть охарактеризовано с помощью принципа Пуанкаре, см. [14] или [2, с. 97]:

$$\mu_n(\Omega, \rho) = \min_{S_n} \max_{u \in S_n} R[u], \tag{1.5}$$

где минимум берется по всем n-мерным пространствам липшицевых функций $u : \Omega \to \mathbf{R}$, таких что $u|_{C_1} = 0$. Это вариационное определение показывает, в частности, что μ_n возрастает относительно C_1, то есть $\mu_n(\Omega_1) \leqslant \mu_n(\Omega_2)$, если $\Omega_1 \subset \Omega_2$ и $C_2(\Omega_1) = C_2(\Omega_2)$.

В данной работе задача (1.1)–(1.3) изучается в основном в кольцевых (=двусвязных) областях Ω, а в качестве C_2 рассматривается одна из граничных компонент. Через $\operatorname{mod}(\Omega)$ обозначаем модуль такой области; по определению

$$\operatorname{mod}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1},$$

если кольцо $A(r_1, r_2) = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ конформно эквивалентно Ω.

Как показано Хершем и Пэйном [11], первое собственное значение $\mu_1(\Omega, \rho)$ кольцевой области Ω допускает простую верхнюю оценку

$$\mu_1(\Omega, \rho) \leqslant \frac{1}{M \operatorname{mod}(\Omega)}, \tag{1.6}$$

выраженную в терминах общей массы $M = \int_{C_2} \rho(s)\, ds$ и модуля области Ω. Эта оценка точна в том смысле, что для заданных Ω и $M > 0$ существует распределение масс с плотностью ρ на C_2, имеющее общую массу M и реализующее равенство в (1.6), [11, с. 809].

В противоположность этому μ_1 не допускает нетривиальной нижней оценки, выраженной только в терминах M и $\operatorname{mod}(\Omega)$. Соответствующий контрпример приведен в параграфе 5. В данной статье мы покажем, что характеристиками, отвечающими за нижнюю оценку μ_1, являются модуль области Ω и функция распределения плотности ρ. В параграфах 3 и 5 мы укажем точные нижние границы μ_1 для некоторых кольцевых конфигураций. При этом будет использоваться круговая симметризация Полиа и теорема Солынина о граничном искажении при однолистных конформных отображениях кольца $A(\tau, 1)$ [17]. Отметим, что наши нижние оценки μ_1 точны и достигаются для кольцевых областей Гретша. Тем самым найдено еще одно экстремальное свойство этих простых, но играющих существенную роль в теории конформных и квазиконформных отображений двусвязных областей. Система собственных функций задачи (1.1)–(1.3) в кольце Гретша изучается в параграфе 4.

В параграфе 6 мы рассматриваем задачу о максимизации μ_1 в классе кольцевых областей, имеющих полигональную внешнюю границу, описанную вокруг заданной окружности. Используя диссимметризацию, мы покажем, что "правильная" конфигурация реализует максимум μ_1 в данной задаче.

В заключительном параграфе приводятся условия, достаточные для существования собственной функции классической задачи Стеклова в кольцевой области, которая имеет замкнутую нодальную линию.

2. Конформная инвариантность и непрерывность собственных значений

Так как класс гармонических функций инвариантен относительно конформных отображений, задача (1.1)–(1.3), определенная в кольцевой области D, может быть трансформирована в эквивалентную задачу, определенную в другой кольцевой области Ω, модуль которой равен модулю исходной области. Более точно, если функция $z = f(\zeta)$ отображает Ω конформно и однолистно на D, так что $f(C'_k) = C_k$, где C'_1, C'_2 – граничные компоненты Ω, причем C'_2 гладкая кривая, то смешанная задача Стеклова, определенная в Ω для плотности

$$\rho_f(\zeta) = \rho(z(\zeta))|f'(\zeta)|, \tag{2.1}$$

имеет ту же самую последовательность собственных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots$, которую имеет исходная задача Стеклова в D. Соответствующими собственными функциями являются $u_1(f(\zeta))$, $u_2(f(\zeta)), \ldots$. Как видно из (2.1), гладкость границы влияет на решение (1.1)–(1.3) в той же степени, что и плотность ρ.

Далее во многих случаях будет использоваться конформная трансплантация рассматриваемых задач в круговое кольцо $A(\tau,1)$. Для постоянной плотности $\rho \equiv 1$, заданной на $\mathbf{T}$, где $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_r = \{z : |z| = r\}$, решение задачи (1.1)–(1.3) в $A(\tau,1)$

хорошо известно [4]:

$$\mu_1 = 1/\log(1/\tau),\ \mu_{2n} = \mu_{2n+1} = n(1+\tau^{2n})/(1-\tau^{2n}), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Нам потребуется утверждение о сходимости последовательности собственных значений $\mu_1^{(1)}$, $\mu_1^{(2)}$, ... и соответствующей последовательности собственных функций $u_{1,n}$, $n = 1, 2, \dots$, при условии, что последовательность кольцевых областей D_1, $D_2, \dots$ сходится к некоторой кольцевой области D_0 как к ядру. Такое свойство справедливо и для других собственных значений; здесь мы ограничиваемся простейшим случаем, необходимым для данной работы.

Лемма 1. *Пусть $D_1, D_2, \dots$ – последовательность кольцевых областей, таких что $\partial D_n = C_1^{(n)} \cup C_2$, которая сходится как к ядру к кольцевой области D_0 с границей $\partial D_0 = C_1^{(0)} \cup C_2$, где C_2 – аналитическая кривая Жордана.*

Пусть $\mu_1^{(n)}$ и $u_{1,n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, обозначают, соответственно, первое собственное значение и первую собственную функцию задачи (1.1)–(1.3) для области D_n и непрерывной плотности $\rho \geqslant 0$ (не зависящей от n) на C_2. Тогда $\mu_1^{(n)} \to \mu_1^{(0)}$ при $n \to \infty$. Кроме того, $u_{1,n} \to u_{1,0}$ равномерно на компактных подмножествах D_0, если функции $u_{1,n}$ подходящим образом нормированы, например, при выполнении равенств

$$\int_{C_2} \rho^2 u_{1,n}^2\, ds = 1 \quad \text{для} \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть функция $z = f_n(\zeta)$ отображает подходящее кольцо $A(1, r_n)$, $r_n > 1$, конформно и однолистно на область D_n, так что $f_n(\mathbf{T}) = C_2$, $f_n(1) = z_0$, где z_0 – некоторая фиксированная точка на C_2. Пересаживая рассматриваемые задачи в соответствующие кольца, будем иметь новые смешанные задачи Стеклова с плотностями

$$\rho_n(\zeta) = \rho(f_n(\zeta))|f_n'(\zeta)|, \quad n = 0, 1, \dots ,$$

заданными на $\mathbf{T}$.

Так как C_2 аналитическая кривая, а последовательность D_n, $n = 1, 2, \dots$, сходится как к ядру к кольцевой области D_0, то нетрудно показать, что $f_n(\zeta) \to f_0(\zeta)$ и $f_n'(\zeta) \to f_0'(\zeta)$ равномерно на компактных подмножествах из $D_0 \cup C_2$. Следовательно,

$\rho_n(\zeta) \to \rho_0(\zeta)$ равномерно на $\mathbf{T}$. Кроме того, из предположений леммы вытекает, что $r_n \to r_0$. Так как $\mu_1(A(1,r),\rho)$ убывает при возрастании радиуса r и плотности ρ, то из двух последних предельных соотношений вытекает существование постоянных m и M, таких что $0 < m \leqslant \mu_1^{(n)} \leqslant M < \infty$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, существует подпоследовательность $\mu_1^{(n_k)} \to \mu$, где $0 < \mu < \infty$.

Покажем, что соответствующая подпоследовательность собственных функций v_{1,n_k} равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на $\mathbf{T}$. Функция $v_{1,n}$, являясь решением задачи (1.1)–(1.3) в $A(1,r_n)$, удовлетворяет интегральному уравнению [8]

$$v_{1,n}(\zeta) = \mu_1^{(n)} \int\limits_{\mathbf{T}} R_{r_n}(e^{i\theta},\zeta)\rho_n(e^{i\theta})v_{1,n}(e^{i\theta})\,d\theta, \quad \zeta \in A(1,r_n), \tag{2.3}$$

где

$$R_r(z,\zeta) = (2\pi)^{-1}\left[\log r + 2\log|1 - z\zeta^{-1}| - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((\theta-\varphi)n)}{n(1+r^{2n})}\right], \tag{2.4}$$

$$\theta = \arg z, \quad \varphi = \arg \zeta,$$

– функция Робэна кольца $A(1,r)$ с логарифмическим полюсом в точке $z = \zeta$, такая что $R_r(z,\zeta) = 0$ при $z \in \mathbf{T}_r$, $\frac{\partial}{\partial n}R_r(z,\zeta) = 0$ при $z \in \mathbf{T}$, см. [8]. Легко проверить, что

$$R_r(z,\zeta) = g_{A(1/r,r)}(z,\zeta) + g_{A(1/r,r)}(1/\bar{z},\zeta), \tag{2.5}$$

где $g_{A(1/r,r)}$ – функция Грина кольца $A(1/r,r)$ с полюсом в точке $z = \zeta$; в [9, с. 192] указана аналогичная формула для функции Робэна единичного круга.

Из (2.5) (или (2.4)) следует, что $R_{r_n}(z,\zeta) \to R_{r_0}(z,\zeta)$ при $r_n \to r_0 > 1$ равномерно на компактных подмножествах из $\overline{U^*} \setminus \{\zeta\}$, где $U^* = \{z : |z| > 1\}$.

Из (2.3) и неравенства Шварца имеем

$$|v_{1,n}(\zeta)| \leqslant (\mu_1^{(n)})^2 \int\limits_{\mathbf{T}} R^2_{r_n}(e^{i\theta},\zeta)\,d\theta \int\limits_{\mathbf{T}} \rho_n^2 v_{1,n}^2\,d\theta$$

$$\leqslant 4M^2 \int\limits_{\mathbf{T}} g^2_{A(1/r_n,r_n)}(e^{i\theta},\zeta)\,d\theta \leqslant C < \infty,$$

и значит, последовательность $v_{1,n}$ равномерно ограничена на $\overline{U^*}$. Аналогично, при фиксированном $\varepsilon > 0$,

$$|v_{1,n}(\zeta_1) - v_{1,n}(\zeta_2)|^2 \leqslant M^2 \int\limits_{\mathbf{T}} |R_{r_n}(e^{i\theta}, \zeta_1) - R_{r_n}(e^{i\theta}, \zeta_2)|^2 \, d\theta =$$

$$= 4M^2 \int\limits_{\mathbf{T}} |g_{A(1/r_n, r_n)}(e^{i\theta}, \zeta_1) - g_{A(1/r_n, r_n)}(e^{i\theta}, \zeta_2)|^2 \, d\theta \leqslant \varepsilon$$

для всех $\zeta_1, \zeta_2 \in \bar{A}(1, r_0)$ таких, что $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta$, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от n. Таким образом, последовательность $v_{1,n}$ равностепенно непрерывна на $\bar{A}(1, r_0)$.

Используя теорему Арцела, можем предполагать, не ограничивая общности, что u_{n_k} сходится к некоторой функции v, которая в этом случае непрерывна на $\bar{A}(1, r_0)$, гармоническая в $A(1, r_0)$ и равна нулю на $\mathbf{T}_{r_0}$. Переходя к пределу в (2.3), получаем

$$v(\zeta) = \mu \int\limits_{\mathbf{T}} R_{r_0}(e^{i\theta}, \zeta) \rho_0(e^{i\theta}) v_{1,0}(e^{i\theta}) \, d\theta$$

для всех $\zeta \in A(1, r_0)$. Это равенство показывает, что v является собственной функцией смешанной задачи Стеклова в кольце $A(1, r_0)$ для плотности $\rho_0(e^{i\theta})$. Так как $v \geqslant 0$ в $A(1, r_0)$, то v должна быть первой собственной функцией рассматриваемой задачи. Так как при нормировке (2.2) такая функция единственна, то $v = u_{1,0}$, $\mu = \mu_1^{(0)}$. Последнее, в силу произвольности выбора подпоследовательностей $\mu_1^{n_k}$, u_{1,n_k}, доказывает требуемое утверждение. □

3. Первое собственное значение и симметризация

Пусть D – открытое или замкнутое множество на $\bar{\mathbf{C}}$. Под круговой симметризацией (другое название – симметризация Полиа) множества D относительно отрицательной вещественной оси $\mathbf{R}_- = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \ \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ понимается множество D^*, определяемое следующим образом:

(a) $0 \in D^*$, $\infty \in D^*$ тогда и только тогда, когда $0 \in D$, $\infty \in D$, соответственно;

(b) $\mathbf{T}_r \subset D^*$ или $D^* \cap \mathbf{T}_r = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}_r \subset D$ или $D \cap \mathbf{T}_r = \emptyset$, соответственно;

(с) в остальных случаях $D^*\cap\mathbf{T}_r=\{z=re^{i\theta}:\ 2|\theta-\pi|<\operatorname{meas}(D\cap\mathbf{T}_r)\}$, если D открыто, и $D^*\cap\mathbf{T}_r=\{z=re^{i\theta}:\ 2|\theta-\pi|\leqslant\operatorname{meas}(D\cap\mathbf{T}_r)\}$, если D замкнуто. Здесь и ниже через meas обозначается угловая мера Лебега на окружностях.

Пусть f – вещественнозначная функция и $f\in L(\mathbf{T}_r)$. Через $f^*=f^*(re^{i\theta})$ будем обозначать симметричную относительно $\mathbf{R}$ и неубывающую по θ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, перестановку функции f. Тогда

$$\sup\int\limits_E f(re^{i\varphi})\,d\varphi=\int\limits_{\pi-\theta}^{\pi+\theta}f^*(re^{i\varphi})\,d\varphi \tag{3.1}$$

для всех θ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, см., например, [1]. Супремум в (3.1) берется по всем измеримым множествам E с мерой $\operatorname{meas}E=2\theta$.

Пусть $f,g\in L(\mathbf{T}_r)$. По определению, $f\prec g$ (f мажорируется функцией g) на $\mathbf{T}_r$, если

$$\int\limits_{\pi-\theta}^{\pi+\theta}f^*(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant\int\limits_{\pi-\theta}^{\pi+\theta}g^*(re^{i\varphi})\,d\varphi \tag{3.2}$$

при всех θ, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Пусть $f:A(r_1,r_2)\to\bar{\mathbf{R}}$ и пусть $f|_{\mathbf{T}_r}\in L(\mathbf{T}_r)$ для каждого r, $r_1<r<r_2$. Под круговой симметризацией f относительно $\mathbf{R}_-$ будем понимать функцию f^*, такую что $f^*|_{\mathbf{T}_r}=(f|_{\mathbf{T}_r})^*$ для каждого r, $r_1<r<r_2$.

Наши применения понятия мажоризации к смешанной задаче Стеклова базируются на следующем результате.

Теорема 1. *Пусть D – подобласть единичного круга $U=\{z:|z|<1\}$, имеющая на границе открытое множество $E\subset\partial D\cap\mathbf{T}$ с мерой $0<\operatorname{meas}E\leqslant2\pi$, и пусть D^* и E^* обозначают круговую симметризацию D и E, соответственно, относительно $\mathbf{R}_-$. Пусть $\mu_1(D,\rho_1)$ и $\mu_1(D^*,\rho_2)$ – первые собственные значения смешанных задач Стеклова для плотностей ρ_1 на E и ρ_2 на E^*, соответственно. Если ρ_2 кругосимметрична относительно $\mathbf{R}_-$, то есть $\rho_2^*(e^{i\theta})=\rho_2(e^{i\theta})$, и если ρ_1 (продолженная нулем на $\mathbf{T}\setminus E$) мажорируется ρ_2 (продолженной нулем на $\mathbf{T}\setminus E^*$) на $\mathbf{T}$, то*

$$\mu_1(D,\rho_1)\geqslant\mu_1(D^*,\rho_2). \tag{3.3}$$

Равенство в (3.3) достигается тогда и только тогда, когда пара (D, ρ_1) совпадает с парой (D^*, ρ_2) с точностью до вращения вокруг начала.

Аналогичный результат выполняется и для областей D, лежащих в кольце $A(r_1, r_2)$. В этом случае мы рассматриваем два открытых граничных подмножества $E_k \subset \partial D \cap \mathbf{T}_{r_k}$, $k = 1, 2$, имеющих положительную угловую меру. Пусть $E = E_1 \cup E_2$ и пусть D^* и $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ обозначают соответствующие круговые симметризации относительно $\mathbf{R}_-$. Пусть ρ и $\hat{\rho}$ – плотности на E и E^*, соответственно; $\rho_k = \rho|_{E_k}$, $\hat{\rho}_k = \hat{\rho}|_{E_k^*}$, $k = 1, 2$.

Теорема 2. *Если $\hat{\rho}_k$ кругосимметрична относительно $\mathbf{R}_-$, и если ρ_k мажорируется (в смысле теоремы 1) плотностью $\hat{\rho}_k$ на $\mathbf{T}_{r_k}$, $k = 1, 2$, то*

$$\mu_1(D, \rho) \geqslant \mu_1(D^*, \hat{\rho}).$$

Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда пара (D, ρ) совпадает с парой $(D^*, \hat{\rho})$ с точностью до вращения вокруг начала.

Доказательства теорем 1 и 2 почти идентичны. Поэтому приводим только

Доказательство теоремы 1. Пусть u и v – первые собственные функции смешанных задач Стеклова, определенных в областях D и D^*, соответственно. По принципу Рэлея,

$$\mu_1(D, \rho_1) = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 \, dx dy}{\int_{\mathbf{T}} \rho_1 u^2 \, ds}. \tag{3.4}$$

Интеграл Дирихле убывает при симметризации, см. [15], поэтому

$$\iint\limits_D |\nabla u|^2 \, dx dy \geqslant \iint\limits_{D^*} |\nabla u^*|^2 \, dx dy, \tag{3.5}$$

со знаком равенства в том и только том случае, когда $u = u^*$ с точностью до вращения вокруг начала. Здесь через u^* обозначена круговая симметризация функции u относительно $\mathbf{R}_-$. Так как ρ_1 мажорируется ρ_2 на $\mathbf{T}$, то по неравенству Харди–Литтлвуда [10, гл. 10]

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \rho_1 u^2 \, d\theta \leqslant \int\limits_{\mathbf{T}} \rho_2 \, {u^*}^2 \, d\theta. \tag{3.6}$$

Из (3.4)–(3.6) и принципа Рэлея вытекает неравенство

$$\mu_1(D,\rho_1) \geqslant \frac{\iint_{D^*} |\nabla u^*|^2\, dxdy}{\int_{\mathbf{T}} \rho_2\, {u^*}^2\, d\theta} \geqslant \mu_1(D^*,\rho_2), \tag{3.7}$$

со знаком равенства во втором из этих неравенств только в случае $u^* = v$. Следовательно, (3.3) доказано.

Для того, чтобы доказать утверждение о равенстве, предположим, что $\mu_1(D,\rho_1) = \mu_1(D^*,\rho_2)$. Тогда мы должны иметь знак равенства в каждом из неравенств (3.5) и (3.7). Следовательно, $v = u^*$, т.е. v кругосимметрична и совпадает с u с точностью до вращения вокруг начала. Последнее вместе с (1.3) влечет, что при некотором $\alpha \in \mathbf{R}$ $\rho_1(e^{i\theta}) = \rho_2(e^{i(\alpha+\theta)})$ при всех θ, таких что $v(e^{i\theta}) \neq 0$. Покажем, что равенство $v(e^{i\theta}) = 0$ невозможно. Допуская противное, из (1.3) имеем $\frac{\partial v(e^{i\theta})}{\partial n} = 0$ при некотором $\theta \in \mathbf{R}$. Последнее равенство очевидным образом противоречит известной лемме Хопфа для положительных гармонических функций, имеющих минимум в точке $e^{i\theta}$, см. [16, с. 65]. Доказательство завершено. $\square$

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 1 *или теоремы* 2

$$\mu_1(D,1) > \mu_1(D^*,1),$$

если пара $\{D^*,E^*\}$ *не является вращением пары* $\{D,E\}$.

Замечание. Утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, выполняются для симметризации Штейнера; они также имеют n-мерные аналоги.

4. Смешанная задача Стеклова в кольце Гретша

Под кольцом Гретша понимается двусвязная область $R_G(r) = U \setminus [0,r]$, $0 < r < 1$, где через $[a,b]$ обозначен прямолинейный отрезок, соединяющий точки $a, b \in \mathbf{C}$. Кольцо Гретша служит экстремальной областью во многих задачах теории функций комплексного переменного. В параграфе 5 мы покажем, что оно доставляет наилучшую нижнюю границу для первого собственного значения в смешанной задаче Стеклова в подходящем классе областей.

Пусть функция $z = F(\zeta)$ отображает кольцо $A(\tau,1)$ конформно и однолистно на $R_G(r)$, так что $F(1) = 1$. В силу конформной инвариантности модуля, радиус τ определяется равенством

$$\tau = \exp\left\{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}'(r)}{\mathbf{K}(r)}\right\},$$

где через $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ обозначены полные эллиптические интегралы первого рода, [13]. Функция F играет роль функции Кебе для класса однолистных отображений кольца $A(\tau, 1)$, см. [7, 13, 17]. Известно явное выражение для F, см., например, [13]:

$$F(\zeta) = r\,\mathrm{sn}^2(w, r), \tag{4.1}$$

где

$$w = \pi^{-1}\mathbf{K}(r)i(\log\zeta - \log\tau - i\pi).$$

Дифференцируя (4.1), получаем

$$|F'(e^{i\theta})| = 2\pi^{-1}r^{1/2}\mathbf{K}(r)|1 - re^{i\varphi(\theta)}|^{1/2}|1 - r^{-1}e^{i\varphi(\theta)}|^{1/2}, \tag{4.2}$$

где $e^{i\varphi(\theta)} = \mathrm{sn}(\frac{\pi-\theta}{\pi}\mathbf{K}(r) + \frac{i}{2}\mathbf{K}'(r))$, откуда следует, что $\varphi(\theta)$ растет от 0 до π, когда θ пробегает промежуток $[0, \pi]$. Последнее вместе с (4.2) показывает, что $|F'(e^{i\theta})|$ строго убывает от $a_{\min}$ до $a_{\max}$, где

$$a_{\min} = F'(1) = 2\pi^{-1}(1 - r)\mathbf{K}(r), \quad a_{\max} = F'(-1) = 2\pi^{-1}(1 + r)\mathbf{K}(r),$$

когда θ изменяется от 0 до π. Указанное свойство монотонности потребуется ниже при доказательстве теоремы 3. Величины $a_{\min}$ и $a_{\max}$ дают точные границы

$$a_{\min} \leqslant |f'(e^{i\theta})| \leqslant a_{\max} \tag{4.3}$$

для класса однолистных отображений f кольца $A(\tau, 1)$, нормированных условиями $f(A(\tau, 1)) \subset U \setminus \{0\}$ и $f(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, [7].

Ниже будет рассматриваться также симметричное кольцо Гретша: $R_G^{(2)}(r) := \{z : \ z^2 \in R_G(r)\}$. Пусть $\mu_n(r)$ и $\nu_n(r)$ – n-е собственные значения задачи (1.1)–(1.3), рассматриваемой в кольцах $R_G(r)$ и $R_G^{(2)}(r)$, соответственно, для постоянной плотности $\rho \equiv 1$ на $\mathbf{T}$. Пусть $u_{r,n}$ и $v_{r,n}$ обозначают соответствующие собственные функции. Очевидно, если $u(z)$ является собственной функцией в $R_G(r)$, то $u(z^2)$ – собственная функция в $R_G^{(2)}(r)$. Кроме того, $u(z)$ – первая собственная функция с соответствующим значением $\mu_1(r)$ тогда и только тогда, когда $u(z^2)$ – первая собственная функция, соответствующая $\nu_1(r)$. Отсюда следует, что

$$\nu_1(r) = 2\mu_1(r).$$

Легко проверить, что

$$q_n(z) = \operatorname{Im}\{z^n\} = s^n \sin n\theta, \quad z = se^{i\theta}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

являются собственными функциями рассматриваемых смешанных задач Стеклова, определенных в областях $R_G(r)$ и $R_G^{(2)}(r)$; соответствующие им собственные значения равны n. Следующая лемма и ее следствие показывают, как множество функций (4.4) соотносится со всем семейством собственных функций соответствующих задач Стеклова в $R_G^{(2)}(r)$ и $R_G(r)$.

Лемма 2. *При $0 < r < 1$ и $n = 1, 2, \ldots$ имеем*
(1) $\nu_{2n}(r) = n$ *и* $v_{r,2n} = q_n$*;*
(2) $n - 1 < \nu_{2n-1}(r) < n$ *и*
(2a) $v_{r,4n-3}(z) = v_{r,4n-3}(\bar{z}), \ \ v_{r,4n-3}(z) = v_{r,4n-3}(-z)$*;*
(2b) $v_{r,4n-1}(z) = v_{r,4n-1}(\bar{z}), \ \ v_{r,4n-1}(z) = -v_{r,4n-1}(-z)$.

Кроме того, функция $v_{r,3}(z)$ не меняет знак в $\Delta_r^+ = \{z \in R_G^{(2)}(r) : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Доказательство. Пусть $p_n(z) = \operatorname{Re}\{z^n\} = s^n \cos n\theta$. Функции q_n, p_n, $n = 1, 2, \ldots$ являются собственными функциями классической задачи Стеклова в круге U для плотности $\rho \equiv 1$. Соответствующими собственными значениями являются

$$1, 1, 2, 2, \ldots$$

Рассмотрим n-мерное линейное пространство S_n, натянутое на собственные функции $v_{r,1}, \ldots, v_{r,n}$. Тогда S_n допустимо в смысле вариационного определения (1.5) для n-го собственного значения такой классической задачи Стеклова. Следовательно, согласно (1.4) и (1.5),

$$\langle n/2 \rangle \leqslant \max_{u \in S_n} R[u] = \nu_n(r) \tag{4.5}$$

при всех $n = 1, 2, \ldots$. Здесь через $\langle a \rangle$ обозначена целая часть a. Более того, равенство в (4.5) имеет место тогда и только тогда, когда $v_{r,n}$ гармоническая в U. Так как $v_{r,n} = 0$ на $[-r, r]$, то из гармоничности следует, что $v_{r,n} = 0$ на всем диаметре $I = [-1, 1]$.

Отсюда легко вытекает, что n четное, $n = 2k$, и $v_{r,2k} = q_k$ в случае равенства в (4.5).

Теперь мы рассмотрим задачу (1.1)–(1.3), определенную на открытом несвязном множестве $U \setminus I$, считая, что $C_2 = \mathbf{T} \setminus \{-1, 1\}$. Нетрудно найти систему всех собственных функций этой задачи:

$$\tilde{q}_1(z) = q_1(z), \ \ \tilde{q}_2 = s \sin|\theta|, \ \ \tilde{q}_3 = s^2 \sin 2\theta, \ \ \tilde{q}_4 = s^2 \sin 2|\theta|, \ldots,$$

и соответствующую систему собственных значений:

$$\tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2 = 1, \ \ \tilde{\nu}_3 = \tilde{\nu}_4 = 2, \ \ \ldots .$$

Пусть $\widetilde{S}_n$ – n-мерное линейное пространство, натянутое на функции $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n$. Так как $\widetilde{S}_n$ допустимо в смысле вариационного определения (1.5) для рассматриваемой смешанной задачи Стеклова в $R_G^{(2)}(r)$, мы имеем

$$\nu_n(r) \leqslant \max_{u \in \widetilde{S}_n} R[u] = k, \tag{4.6}$$

где $k = \langle n/2 \rangle + 1$, если n нечетное, и $k = \langle n/2 \rangle$, если n четное.

Более того, собственная функция $v_{r,n}$ гармоническая в $R_G^{(2)}(r)$. Отсюда легко следует, что равенство в (4.6) выполняется тогда и только тогда, когда $n = 2k - 1$ и $\tilde{q}_n = s^{2k} \sin(2k\theta)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь (4.5) и (4.6) показывают, что $\nu_{2n}(r) = n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $v_{r,2n} = s^n \sin n\theta$. Это вместе с замечаниями о случаях равенства в (4.5) и (4.6) влечет неравенства (2).

Собственной функции $v_{r,2n-1}$, соответствующей собственному значению $\nu_{2n-1}(r)$, $n = 1, 2, \ldots$, сопоставим функцию

$$v^+(z) = (1/2)(v_{r,2n-1}(z) + v_{r,2n-1}(\bar{z})).$$

Если $v^+ \equiv 0$, то $v_{r,2n-1} = 0$ на $[-1, 1]$. Последнее влечет, что $v_{r,2n-1}$ принадлежит семейству функций (4.4). Как мы уже показали, функции этого семейства не могут соответствовать значению $\nu_{2n-1}(r)$. Таким образом, $v^+ \not\equiv 0$. Следовательно, v^+ является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\nu_{2n-1}(r)$ кратности 1. Значит, $v_{r,2n-1} = cv^+$ при $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$. Тогда

$$v_{r,2n-1}(z) = v_{r,2n-1}(\bar{z}) \quad \text{для всех} \quad z \in U. \tag{4.7}$$

Далее, рассмотрим функцию

$$v^-(z) = (1/2)(v_{r,2n-1}(z) + v_{r,2n-1}(-z)).$$

Тогда $v^- \equiv 0$ или v^- – собственная функция, соответствующая $\nu_{2n-1}(r)$. В первом случае

$$v_{r,2n-1}(z) = -v_{r,2n-1}(-z). \tag{4.8}$$

Во втором случае имеем $v_{r,2n-1} = c\,v^-$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$. Отсюда следует, что

$$v_{r,2n-1}(z) = v_{r,2n-1}(-z).$$

Рассмотрим первый случай. Как показывают (4.7) и (4.8), $v_{r,2n-1}(z) = 0$, если $\mathrm{Re}\, z = 0$. Следовательно, $v_{r,2n-1}$ – собственная функция смешанной задачи Стеклова в односвязной области Δ_r^+ с $C_2(\Delta_r^+) = \{z \in \mathbf{T} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ и $\rho \equiv 1$. Пусть $\tau_n(r)$ и $\omega_{r,n}(z)$ обозначают n-е собственное значение и n-ю собственную функцию этой смешанной задачи Стеклова.

Как и выше, мы рассмотрим две вспомогательные системы функций:

$$p_1 = s\cos\theta,\ p_2 = s^2\sin 2\theta,\ p_3 = s^3\cos 3\theta,\ p_4 = s^4\sin 4\theta, \dots \tag{4.9}$$

и

$$\tilde{p}_1 = s^2\sin 2\theta,\ \tilde{p}_2 = s^2\sin 2|\theta|,\ \tilde{p}_3 = s^4\sin 4\theta,\ \tilde{p}_4 = s^4\sin 4|\theta|, \dots \tag{4.10}$$

Легко проверить, что (4.9) и (4.10) дают полные системы собственных функций, определенных на множествах Δ_0^+ и Δ_1^+, соответственно. Соответствующими собственными значениями являются числа

$$1, 2, 3, 4, \dots \quad \text{и} \quad 2, 2, 4, 4, \dots \tag{4.11}$$

Свойство монотонности собственных значений и (4.9)–(4.11) показывают, что

$$\tau_{2n}(r) = 2n, \quad \omega_{r,2n} \equiv p_{2n}$$

и

$$2n - 1 \leqslant \tau_{2n-1}(r) \leqslant 2n$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, рассуждая как и выше, легко показать, что

$$\omega_{r,2n-1}(z) = \omega_{r,2n-1}(\bar{z}).$$

Теперь мы покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между собственными функциями $v_{r,2n-1}$, удовлетворяющими (4.7) и (4.8), и собственными функциями $\omega_{r,2m-1}$, такое что $v_{r,2n-1}|_{\Delta_r^+} \equiv \omega_{r,2m-1}$, если $v_{r,2n-1}$ соответствует $\omega_{r,2m-1}$. Действительно, если $v_{r,2n-1}$ удовлетворяет (4.7) и (4.8), то $v_{r,2n-1}|_{\Delta_r^+}$ является собственной функцией смешанной задачи Стеклова в Δ_r^+. Тогда $v_{r,2n-1}|_{\Delta_r^+} \equiv \omega_{r,2m-1}$ при некотором $m = m(n)$. Так как соответствующие собственные значения удовлетворяют неравенствам $n-1 < \nu_{2n-1} < n$ и $2m-1 \leqslant \tau_{2m-1}(r) \leqslant 2m$, мы должны иметь равенство $n = 2m$.

С другой стороны, каждая собственная функция $\omega_{r,2m-1}$ порождает функцию

$$\tilde{v}(z) = \begin{cases} \omega_{r,2m-1}(z), & \operatorname{Re} z \geqslant 0, \\ -\omega_{r,2m-1}(-z), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, является собственной функцией смешанной задачи Стеклова в $R_G^{(2)}(r)$, удовлетворяющей (4.7) и (4.8). Вновь неравенства для соответствующих собственных значений показывают, что $\tilde{v} = v_{r,4m-1}$.

Объединив полученные результаты, завершаем доказательство соотношений (2a) и (2b).

Предыдущие рассуждения показывают также, что $v_{r,3}$ является первой собственной функцией в смешанной задаче Стеклова, рассматриваемой в Δ_r^+. Следовательно, $v_{r,3}$ не меняет знак в Δ_r^+. Доказательство завершено. $\square$

Рассматривая соответствующую смешанную задачу Стеклова в $R_G(r)$, можно показать, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, что каждая собственная функция $u_{r,n}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$u_{r,n}(z) = u_{r,n}(\bar{z}) \quad \text{или} \quad u_{r,n}(z) = -u_{r,n}(\bar{z}).$$

Как мы отмечали выше, $u_{r,n}(z^2)$ является собственной функцией смешанной задачи Стеклова в $R_G^{(2)}(r)$. Кроме того, легко видеть, что $v_{r,m}$ может быть представлена в виде $u_{r,n}(z^2)$ с некоторым $n = n(m)$ тогда и только тогда, когда $v_{r,m}(-z) \equiv v_{r,m}(z)$. Последнее вместе с утверждением леммы 2 влечет

Следствие 2. (1) *$n-1 < \mu_{2n-1}(r) < n$ и $u_{r,2n-1}(z) = v_{r,4n-3}(z^{1/2})$, $n = 1, 2, \ldots$.*

(2) *$\mu_{2n}(r) = n$ и $u_{r,2n}(z) = s^n \sin n\theta$, $n = 1, 2, \ldots$.*

В следующей лемме доказываются некоторые простые свойства $\mu_1(r)$ как функции параметра r, $0 < r \leqslant 1$.

Лемма 3. (a) $\mu_1(r)$ – *непрерывная, строго возрастающая функция, отображающая интервал* $(0,1]$ *на интервал* $(0,1/2]$*;*

(b) $\mu_1(r)\log(1/r)$ – *выпуклая функция от* $\log^2 r$*;*

(c) $2\frac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\mu_1(r) < \mu_1(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}) < 2\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\mu_1(r)$.

Доказательство. (a) Свойство монотонности следует из определения; непрерывность на открытом интервале $(0,1)$ доказана в лемме 1. Кроме того,

$$\mu_1(r) < (2\pi m_G(r))^{-1} \to 0 \qquad \text{при} \quad r \to 0,$$

в соответствии с неравенством (1.6) Херша–Пэйна. Остается доказать, что $\mu_1(r) \to 1/2$ при $r \to 1$.

Легко проверить, что функция $q_1(z)$, определенная в (4.4), допустима в смысле вариационного определения $\nu_1(r)$, $0 < r < 1$, и что она является первой собственной функцией, соответствующей $\nu_1(1)$. Следовательно,

$$\mu_1(r) = (1/2)\nu_1(r) < \frac{1}{2}\frac{\iint_U |\nabla q_1|^2\,dxdy}{\int_0^{2\pi} q_1^2\,d\theta} = \frac{1}{2}\nu_1(1) = \mu_1(1) = \frac{1}{2}$$

для всех $0 < r < 1$. Таким образом, $\mu_1(r) \to a \leqslant 1/2$ при $r \to 1$.

Предположим, что $0 < a < 1/2$. Окончание этого доказательства аналогично доказательству леммы 1. Пусть $u_{r,1}$ нормирована так, что

$$\int_0^{2\pi} u_{r,1}(e^{i\theta})\,d\theta = 1, \qquad 0 < r < 1.$$

Тогда $u_{r,1}$ удовлетворяет уравнению

$$u_{r,1}(\zeta) = \mu_1(r)\int_0^{2\pi} R_r(e^{i\theta},\zeta)u_{r,1}(e^{i\theta})\,d\theta, \tag{4.12}$$

где $R_r(z,\zeta)$ – функция Робэна кольца $R_G(r)$.

Легко проверить, что

$$R_r(z,\zeta) = g_r(z,\zeta) + g_r(1/\bar{z},\zeta), \tag{4.13}$$

где $g_r(z,\zeta)$ обозначает функцию Грина области $R_T(r) = \mathbf{C}\setminus([0,r]\cup[1/r,\infty])$, $0 < r \leqslant 1$ (в случае $r = 1$ $R_T(1)$ односвязна).

Из (4.12), (4.13) следует равенство

$$u_{r,1}(\zeta) = 2\mu_1(r)\int\limits_0^{2\pi} g_r(e^{i\theta},\zeta)u_{r,1}(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{4.14}$$

Нетрудно показать, что

$$g_r(e^{i\theta},\zeta) \to g_1(e^{i\theta},\zeta) \quad \text{при} \quad r \to 1 \tag{4.15}$$

равномерно на компактных подмножествах в $\mathbf{T}\times\bar{U}\setminus\{\zeta\}$.

Используя неравенство Шварца, получим

$$|u_{r,1}(\zeta)|^2 \leqslant \int\limits_0^{2\pi} g_r^2(e^{i\theta},\zeta)\,d\theta. \tag{4.16}$$

(4.15) и (4.16) показывают, что функции $u_{r,1}$ равномерно ограничены на $\overline{U}$. Кроме того, $u_{r,1}(1)\to 0$ при $r\to 1$.

Аналогично, неравенство

$$|u_{r,1}(\zeta_1) - u_{r,1}(\zeta_2)|^2 \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |g_r(e^{i\theta},\zeta_1) - g_r(e^{i\theta},\zeta_2)|^2\,d\theta$$

легко влечет равностепенную непрерывность семейства функций $u_{r,1}$, $0<r<1$.

Применяя теорему Арцела, можем выбрать подпоследовательность $u_{r_n,1}$, $r_n\to 1$, сходящуюся к некоторой функции $v\geqslant 0$, непрерывной на $\bar{U}$, гармонической в $R_G(1)$ и такой, что $v\equiv 0$ на $[0,1]$. Переходя к пределу в (4.12) и используя (4.14), (4.15), получаем

$$v(\zeta) = a\int\limits_0^{2\pi} R_1(e^{i\theta},\zeta)v(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Это равенство показывает, что v является собственной функцией смешанной задачи Стеклова в $R_G(1)$, соответствующей собственному значению a. Таким образом, предположение $a<1/2$ противоречит тому факту, что $1/2$ является первым собственным значением рассматриваемой задачи.

(b) Применим метод конформной трансплантации Полиа и Шиффера [14]. Пусть $u(re^{i\theta})$ – первая собственная функция, соответствующая значению $\mu_1(t_0)$. Тогда функция

$$U(r,\theta) = u(r^{k(t)}e^{i\theta})$$

при $k(t) = \log t_0/\log t$ допустима для вариационного определения $\mu_1(t)$. Следовательно,

$$\begin{gathered}\mu_1(t) \leqslant \frac{\iint_{R_G(t)} \left[U_r^2 + \frac{1}{r^2}U_\theta^2\right] r\,drd\theta}{\int_0^{2\pi} U^2(1,\theta)\,d\theta} = \\ \frac{\iint_{R_G(t)} \left[k^2(t) r^{2(k(t)-1)} u_1^2(r^{k(t)}e^{i\theta}) + \frac{1}{r^2}u_2^2(r^{k(t)}e^{i\theta})\right] r\,drd\theta}{\int_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta},\end{gathered} \tag{4.17}$$

где через u_1 и u_2 обозначены производные от u относительно $|z|$ и $\arg z$, соответственно. Выполняя замену переменной интегрирования, из (4.17) легко получаем

$$\mu_1(t)\log(1/t) \leqslant A(\log t)^2 + B, \tag{4.18}$$

где

$$A = \iint\limits_{R_G(t_0)} u_2^2(re^{i\theta}) r^{-1}\,drd\theta \Bigg/ \left(\log(1/t_0)\int\limits_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta\right),$$

$$B = \log(1/t_0)\iint\limits_{R_G(t_0)} u_1^2(re^{i\theta}) r\,drd\theta \Bigg/ \int\limits_0^{2\pi} u^2(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Так как при $t = t_0$ (4.18) выполняется со знаком равенства, то (4.18) влечет вогнутость функции $\mu_1(t)\log t$ относительно $\log^2 t$. (4.18) показывает также, что прямая $\eta = A\tau + B$ является опорной прямой функции $\sqrt{\tau}\mu_1(e^{\sqrt{\tau}})$ в соответствующей точке.

(c) Функция $w = (z+\sqrt{r})/(1+z\sqrt{r})$ отображает $R_G^{(2)}(r)$ конформно и однолистно на область $R_G(2\sqrt{r}/(1+r))$. Так как

$$(1-\sqrt{r})/(1+\sqrt{r}) \leqslant |w'(e^{i\theta})| \leqslant (1+\sqrt{r})/(1-\sqrt{r}),$$

то требуемое неравенство легко следует из свойства монотонности μ_1 как функции плотности. $\square$

5. Нижние оценки для первого собственного значения

Как было отмечено во введении, не существует нетривиальных нижних оценок μ_1, выраженных только в терминах полной массы M и модуля $\operatorname{mod} D$ кольца D. Соответствующий контрпример может быть построен с использованием плотности

$$\rho_{\delta,M}(e^{i\theta}) = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad |\theta-\pi| < M/(2\delta), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\delta > 0$, имеющей общую массу M.

При заданных s, t, $0 < s < t < 1$, пусть $R(s,t) = A(s,1) \setminus [t,1]$. Пусть функция $z = f_{s,t}(\zeta)$ отображает $R(s,t)$ конформно и однолистно на подходящее кольцо $A(\tau,1)$ так, что $f_{s,t}(-1) = -1$. Тогда для любых $0 < \varphi < \pi$ и $0 < \tau < 1$ найдутся параметры s и t такие, что обратная функция $f_{s,t}^{-1}(z)$ отображает $A(\tau,1)$ на $R(s,t)$ и $f_{s,t}(e^{\pm i\varphi}) = 1 \pm i0$ (в смысле граничного соответствия). Очевидно, что при фиксированном τ

$$s \to 0, \; t \to 0, \qquad \text{когда} \quad \varphi \to \pi. \tag{5.2}$$

Пусть $u_1(z)$ – первая собственная функция смешанной задачи Стеклова в $A(\tau,1)$ для плотности $\rho_{\delta,M}(e^{i\theta})$, определенной в (5.1), и пусть $\varphi = \pi - (M/2\delta)$. Пусть параметры s и t выбраны таким образом, что $f_{s,t}$ отображает $R(s,t)$ на $A(\tau,1)$ так, что $f_{s,t}(1 \pm i0) = e^{\pm i\varphi}$. Тогда $v = u_1(f_{s,t}(\zeta))$ – первая собственная функция соответствующей задачи Стеклова в $R(s,t)$ для соответствующей плотности ρ_1, распределенной на $\mathbf{T} \cup [t,1)$, с общей массой M и такой, что $\rho_1 \equiv 0$ на $(t,1)$. Последнее показывает, что $\frac{\partial}{\partial n} v \equiv 0$ на $(t,1)$. Следовательно, функция v, которая симметрична относительно вещественной оси, может быть продолжена до функции, гармонической в $A(s,1)$. Функция, продолженная таким образом, будет являться первой собственной функцией смешанной задачи Стеклова в области $A(s,1)$ для плотности $\rho_2 \equiv \rho_1|_{\mathbf{T}}$ с общей массой $M > 0$ на $\mathbf{T}$. Из неравенства Херша–Пэйна и (5.2) следует соотношение

$$\mu_1 \leqslant (M \operatorname{mod} A(s,1))^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad \varphi \to \pi,$$

доказывающее, что нетривиальная нижняя оценка для μ_1 не может выражаться только в указанных выше терминах.

Наша следующая теорема дает нижнюю оценку μ_1, выраженную в терминах модуля и функции распределения для плотности.

Теорема 3. *Пусть D, $0 \notin D$, – кольцевая область с граничными компонентами $\mathbf{T}$ и $C \subset U$. Пусть $\mu_1(D,\rho)$ обозначает первое собственное значение смешанной задачи Стеклова для плотности $\rho = \rho(e^{i\theta})$, распределенной на $\mathbf{T}$. Если $\operatorname{mod} D = m_G(r)$ и плотность ρ мажорируется на $\mathbf{T}$ плотностью ρ_G, которая кругосимметрична относительно $\mathbf{R}_-$, то*

$$\mu_1(D,\rho) \geqslant \mu_1(R_G(r),\rho_G). \tag{5.3}$$

Равенство достигается в (5.3) тогда и только тогда, когда пара $\{D,\rho\}$ совпадает с парой $\{R_G(r),\rho_G\}$ с точностью до вращения вокруг начала.

Доказательство. Пусть $\zeta = f(z)$ и $\zeta = F(z)$ – функции, отображающие соответственно D и $R_G(r)$ конформно и однолистно на кольцо $A(\tau,1)$, так что $f(1) = 1$ и $F(1) = 1$. Пересаживая рассматриваемые задачи Стеклова в кольцо $A(\tau,1)$, получим новые задачи Стеклова, которым соответствуют плотности

$$\rho_f(e^{i\varphi}) = \rho(e^{i\theta})|f'(e^{i\theta})|^{-1} \quad \text{и} \quad \rho_F(e^{i\varphi}) = \rho_G(e^{i\theta})|F'(e^{i\theta})|^{-1},$$

где $e^{i\varphi} = f(e^{i\theta})$ в первом случае и $e^{i\varphi} = F(e^{i\theta})$ во втором случае. Функция $|F'(e^{i\theta})|^{-1}$ кругосимметрична относительно $\mathbf{R}_-$. Значит, ρ_F также кругосимметрична относительно $\mathbf{R}_-$.

Покажем, что ρ_f мажорируется плотностью ρ_F на $\mathbf{T}$. Пусть E – измеримое подмножество $\mathbf{T}$ с мерой $\operatorname{meas} E = 2\psi$, $0 < \psi < \pi$, и пусть $E(\gamma)$ обозначает дугу $\{e^{i\theta} : |\theta - \pi| < \gamma\}$.

Тогда

$$\int\limits_E \rho_f(e^{i\theta})\,d\theta = \int\limits_E \rho(e^{i\varphi})|f'(e^{i\varphi})|^{-1}\,d\theta = \int\limits_{f^{-1}(E)} \rho(e^{i\varphi})\,d\varphi \tag{5.4}$$

и

$$\int\limits_{E(\psi)} \rho_F(e^{i\theta})d\theta = \int\limits_{E(\psi)} \rho_G(e^{i\varphi})|F'(e^{i\varphi})|^{-1}\,d\theta = \int\limits_{F^{-1}(E(\psi))} \rho_G(e^{i\varphi})\,d\varphi. \tag{5.5}$$

Пусть $2\alpha = \operatorname{meas} f^{-1}(E)$ и $2\beta = \operatorname{meas} F^{-1}(E(\psi))$. По теореме искажения граничных множеств из работы [17],

$$\beta \geqslant \alpha \tag{5.6}$$

со знаком равенства только в случае совпадения с точностью до вращения вокруг начала пар $\{D, f^{-1}(E)\}$ и $\{R_G(r),\ F^{-1}(E(\psi))\}$.

Так как ρ и ρ_G неотрицательны и ρ мажорируется ρ_G на $\mathbf{T}$, используя (5.6), получаем

$$\int\limits_{E(\beta)} \rho_G(e^{i\theta})\,d\theta \geqslant \int\limits_{E(\alpha)} \rho_G(e^{i\theta})\,d\theta \geqslant \int\limits_{f^{-1}(E)} \rho(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{5.7}$$

Более того, если $\rho_G \not\equiv 0$ на $\mathbf{T}\setminus\{-1\}$ и если D не является вращением $R_G(r)$, то в первом из соотношений (5.7) имеем строгое неравенство для всех E с достаточно малой положительной мерой.

Из (5.4)–(5.7) с учетом (3.1) и (3.2) получаем

$$\rho_f \prec \rho_F \quad \text{на} \quad \mathbf{T}. \tag{5.8}$$

Так как собственные значения инвариантны при конформных отображениях, а ρ_F кругосимметричны относительно $\mathbf{R}_-$, то из (5.8) и теоремы 1 вытекает (5.3).

Если $\mu_1(D,\rho) = \mu_1(R_G(r),\rho_G)$ для некоторых D, ρ и ρ_G, удовлетворяющих предположениям теоремы, то мы должны иметь $\mu_1(A(\tau,1),\rho_f) = \mu_1(A(\tau,1),\rho_F)$. Следовательно, по утверждению о случаях равенства в теореме 1

$$\rho_f(e^{i\theta}) = \rho_F(e^{i(\theta_0+\theta)}) \qquad \text{для всех} \quad \theta\in\mathbf{R} \tag{5.9}$$

при некотором $\theta_0\in\mathbf{R}$.

Из (5.9) и замечания о случаях равенства в (5.7) вытекает, что $D = e^{i\alpha}R_G(r)$ при некотором $\alpha\in\mathbf{R}$. Отсюда легко следует утверждение теоремы о случаях равенства в (5.3). $\square$

Плотность $\rho \geqslant 0$ на $\mathbf{T}$ с общей массой M и максимальным значением $\rho_{\max}$:

$$0 < \rho_{\max} = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \rho(e^{i\theta}) < \infty$$

мажорируется на $\mathbf{T}$ функцией $\rho_{\tau,M}(e^{i\theta})$, определенной в (5.1) с $\tau = \rho_{\max}$. Следовательно, из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть D и ρ определены в теореме 3. Если ρ имеет общую массу M и максимальное значение $\rho_{\max} = \tau$, $0<\tau<\infty$, то*

$$\mu_1(D,\rho) \geqslant \mu_1(R_G(r),\rho_{\tau,M}). \tag{5.10}$$

Равенство в (5.10) *имеет место тогда и только тогда, когда пара* $\{D,\rho\}$ *совпадает с парой* $\{R_G(r),\rho_{\tau,M}\}$ *с точностью до вращения вокруг начала.*

Для постоянной плотности $\rho\equiv 1$ на $\mathbf{T}$ имеем

Следствие 4. *Если область* D*, определенная выше, не является вращением* $R_G(r)$*, то*

$$\mu_1(D,1)>\mu_1(R_G(r),1).$$

Используя оценки (4.3), легко получить более грубые, зато явные оценки $\mu_1(D,\rho)$. Для этого нужно использовать конформное отображение $z=f(\zeta)$ кольца $A(\tau,1)$ на область D, для того чтобы пересадить рассматриваемые задачи в $A(\tau,1)$. Согласно (4.3) пересаженная плотность $\rho_\zeta=\rho(f(\zeta))|f'(\zeta)|$ удовлетворяет неравенствам

$$2\pi^{-1}\rho_{\min}(1-r)\mathbf{K}(r)\leqslant\rho_\zeta\leqslant 2\pi^{-1}\rho_{\max}(1+r)\mathbf{K}(r),$$

где r определяется из уравнения $\tau=\exp\{-(\pi\mathbf{K}'(r))/(2\mathbf{K}(r))\}$. Так как μ_1 монотонно относительно плотности и $\mu_1(A(\tau,1),1)=1/\log(1/\tau)$, последние соотношения приводят к следующему утверждению.

Теорема 4. *Если* $\operatorname{mod}D=m_G(r)$*, то*

$$\big(\rho_{\max}(1+r)\mathbf{K}'(1/r)\big)^{-1}<\mu_1(D,\rho)<\big(\rho_{\min}(1-r)\mathbf{K}'(1/r)\big)^{-1}. \quad (5.11)$$

Оценки (5.11) не являются точными, однако для постоянной плотности отношение указанных в (5.11) границ стремится к 1 при $r\to 0$.

6. Изопериметрическое неравенство для многоугольников

Пусть D – область в $\mathbf{C}$. Число $r_a(D)=\sup_{r>0}\{r:\mathbf{T}_r(a)\subset D\}$, где $\mathbf{T}_r(a)=\{z:|z-a|=r\}$, будем называть вписанным радиусом D относительно a. Пусть D_n – кольцевая область в $\mathbf{C}$ с граничными континуумами $\mathbf{T}$ и C_n, где C_n состоит из $n\geqslant 1$ прямолинейных граничных отрезков (конечных или нет). Такую кольцевую область будем называть полигональной. При фиксированных $n\in\mathbf{N}$ и $r>1$ рассмотрим задачу о максимальном значении величины $\mu_1(D_n,1)$ среди всех полигональных областей D_n, имеющих заданный вписанный радиус $r_0(D_n)=r$. Здесь $\mu_1(D_n,1)$

соответствует смешанной задаче Стеклова в D_n для плотности $\rho \equiv 1$, определенной на $\mathbf{T}$. Правильное кольцо $D_n(r)$, т.е. кольцевая область, ограниченная $\mathbf{T}$ и $C_n(r) \ni r$, где $C_1(r)$ есть линия $\{z : \operatorname{Re} z = r\}$, $C_2(r) = \{z : |\operatorname{Re} z| = r\}$ – объединение двух линий и $C_n(r)$, $n = 3, 4, \dots$ – граница правильного n-угольника, описанного вокруг $\mathbf{T}_r$, представляется наиболее подходящим на роль экстремальной области рассматриваемой задачи.

Теорема 5. *Пусть $m \leqslant n$, $m, n \in \mathbf{N}$, и $r > 1$ фиксированы. Пусть D_m – полигональная кольцевая область, определенная выше. Если $r_0(D_m) = r$ и D_m не является вращением $D_n(r)$, то*

$$\mu_1(D_m, 1) < \mu_1(D_n(r), 1). \tag{6.1}$$

В противоположность симметризационным результатам в параграфах 3 и 5, (6.1) дает точную верхнюю оценку первого собственного значения соответствующей смешанной задачи Стеклова. Для доказательства (6.1) мы применим геометрическое преобразование, называемое диссимметризацией, которое в определенном смысле противоположно симметризации. Первое такое преобразование было введено В. Н. Дубининым [5]; определения см. также в [6, 18].

Прежде чем доказывать теорему 5, приведем необходимые результаты из [18]. Пусть Γ_n – группа преобразований $\bar{\mathbf{C}}$, порожденная преобразованиями симметрии относительно прямых $l_k^* = \{z = te^{i\pi(k-1)/n}, -\infty < t < +\infty\}$, $k = 1, \dots, 2n$. Очевидно, $\gamma(D_n(r)) = D_n(r)$ при всех $\gamma \in \Gamma_n$.

Из построения, приведенного в доказательстве теоремы 1 [18], следует, что для каждого полигонального кольца D_m, такого что $r_0(D_m) = r$, существует диссимметризация $\lambda(z)$ области $D_n(r)$ на полигональное кольцо $\tilde{D}$, ограниченное $\mathbf{T}$ и $\tilde{C}$, и такое, что $\tilde{D} \subset D_m$ и $\tilde{D} \neq D_m$, если D_m не является вращением $D_n(r)$. Кроме того, $\lambda(z)$ конструируется в [18] таким образом, что если функция $v : \overline{D_n(r)} \to \mathbf{R}$ непрерывна на $\overline{D_n(r)}$, липшицева в $D_n(r)$ и автоморфна относительно группы Γ_n, т.е. $v(\gamma(z)) \equiv v(z)$ для каждого $\gamma \in \Gamma_n$, то функция $V(z) = v(\lambda^{-1}(z))$ определена корректно на $\overline{\tilde{D}}$ и удовлетворяет следующим условиям:

(1) V непрерывна на $\overline{\tilde{D}}$ и липшицева в $\tilde{D}$;

(2) $V \equiv 0$ на $\tilde{C}$, если $v \equiv 0$ на $C_n(r)$;

(3) при каждом фиксированном ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, функция $V(\rho e^{i\theta})$ является равноизмеримой перестановкой функции $v(\rho e^{i\theta})$ на $\mathbf{T}_\rho$;

(4) $\iint_{\tilde{D}} |\nabla V|^2\, dxdy = \iint_{D_n(r)} |\nabla v|^2\, dxdy.$

Доказательство теоремы 5. Пусть $u(z)$ – первая собственная функция смешанной задачи Стеклова в $D_n(r)$. Тогда для каждого $\gamma \in \Gamma_n$ функция $u(\gamma(z))$ также является собственной функцией этой задачи, соответствующей тому же собственному значению $\mu_1(D_n(r), 1)$. Так как первая собственная функция единственна, то $u(\gamma(z)) \equiv u(z)$. Таким образом u автоморфна относительно группы Γ_n.

Пусть $\lambda(z)$ – диссимметризация области $D_n(r)$ на кольцевую область $\tilde{D} \subset D_m$, описанная выше, и пусть $V(z) = u(\lambda^{-1}(z))$. Согласно (1) и (2) функция $V(z)$ допустима в смысле вариационного определения первого собственного значения области $\tilde{D}$. Следовательно, используя (3) и (4), мы получим

$$\mu_1(D_n(r), 1) = \frac{\iint_{D_n(r)} |\nabla u|^2\, dxdy}{\int_{-\pi}^{\pi} u^2(e^{i\theta})\, d\theta} = \frac{\iint_{\tilde{D}} |\nabla V|^2\, dxdy}{\int_{-\pi}^{\pi} V^2(e^{i\theta})\, d\theta} \geqslant$$

$$\geqslant \mu_1(\tilde{D}, 1) > \mu_1(D_m, 1).$$

Строгое неравенство в последнем из этих соотношений следует из свойства строгой монотонности μ_1 как функции области. $\square$

Следствие 5. *Пусть $\mu^{(1)}(r)$, $\mu^{(2)}(r)$ и $\mu^{(k)}(r)$, $k = 3, 4, \ldots$ обозначают первые собственные значения, соответствующие правильным конфигурациям $D_1(r)$, $D_2(r)$, $D_k(r)$. Тогда*

$$\mu^{(1)}(r) < \mu^{(2)}(r) < \mu^{(3)}(r) < \ldots < \mu^{(k)}(r) < \mu^{(k+1)}(r) < \ldots .$$

Первое из этих неравенств тривиально, остальные нетривиальны и, насколько нам известно, получены впервые. Мы не знаем другого метода, кроме диссимметризации, позволяющего доказать, например, второе из этих неравенств.

7. Существование замкнутой нодальной линии

Будем говорить, что собственная функция u классической задачи Стеклова о собственных значениях в кольцевой области Ω для плотности ρ, распределенной на $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$, имеет замкнутую нодальную линию $L \subset \Omega$, если $\Omega \setminus L$ состоит из двух кольцевых областей Ω_1 и Ω_2, $\partial\Omega_k = C_k \cup L$, $k = 1, 2$, таких что

$u^{(1)} = u|_{\Omega_1} > 0$ в Ω_1 и $u^{(2)} = u|_{\Omega_2} < 0$ в Ω_2. Понятно, что $u^{(k)}$ является первой собственной функцией смешанной задачи Стеклова в области Ω_k для плотности $\rho_k = \rho|_{C_k}$. В качестве примера отметим, что задача Стеклова в кольце $A(r_1, r_2)$ имеет собственную функцию с замкнутой нодальной линией для любой плотности ρ, постоянной на окружностях $\mathbf{T}_{r_1}$ и $\mathbf{T}_{r_2}$.

В этом параграфе мы покажем, что, зная решение некоторой экстремальной задачи для двух смешанных задач Стеклова, можно найти (при подходящих условиях) собственную функцию исходной задачи Стеклова, которая имеет замкнутую нодальную линию.

Сформулируем упомянутую экстремальную проблему. Пусть Ω – кольцевая область с гладкой границей $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$ и пусть ρ_k – плотность на C_k, $k = 1, 2$. Рассмотрим задачу о нахождении минимакса

$$\inf \max\{\mu_1(\Omega_1, \rho_1), \mu_1(\Omega_2, \rho_2)\}, \tag{7.1}$$

в семействе всех пар неналегающих кольцевых областей Ω_1 и Ω_2, лежащих в Ω и таких, что Ω_k имеет кривую C_k на своей границе.

Теорема 6. *Если существует пара кольцевых областей Ω_1^0 и Ω_2^0, реализующая инфимум в* (7.1)*, то задача Стеклова в Ω для плотности ρ имеет собственную функцию с замкнутой нодальной линией.*

Доказательство. Так как μ_1 монотонна относительно области, экстремальные кольцевые области должны иметь равные первые собственные значения:

$$\mu_1(\Omega_1^0, \rho_1) = \mu_1(\Omega_2^0, \rho_2). \tag{7.2}$$

Пусть $u_{1,k}$ – первая собственная функция смешанной задачи Стеклова в Ω_k. Рассмотрим функцию u_0 в $\bar{\Omega}$, определенную соотношениями $u_0|_{\bar{\Omega}_k} = u_{1,k}$. Без ограничения общности можем считать, что

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} u_0 \rho ds = 0. \tag{7.3}$$

Если функция u_0 – гармоническая в Ω, то она является искомой собственной функцией. Предположим, что u_0 не является гармонической. Для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ линии уровня $C_{\pm\varepsilon_0} = \{z : u_0(z) = \pm\varepsilon_0\}$ являются замкнутыми аналитическими кривыми Жордана, ограничивающими кольцевую область $\Omega_{\varepsilon_0} \supset L$, где $L = \Omega \setminus (\Omega_1^0 \cup \Omega_2^0)$.

Пусть v – гармоническая в Ω_{ε_0} функция, совпадающая с u_0 на $\partial\Omega_{\varepsilon_0}$. Отметим, что $v \not\equiv u_0$, так как u_0 не является гармонической в Ω_{ε_0}. Тогда каждое множество уровня $C'_\varepsilon = \{z : v(z) = \varepsilon\}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, является замкнутой аналитической кривой Жордана, разделяющей кривые $C_{-\varepsilon_0}$ и C_{ε_0}. Из монотонности μ_1 относительно области и равенства (7.2) следует существование ε_1, $|\varepsilon_1| < \varepsilon_0$, такого что C'_{ε_1} разбивает Ω на две кольцевые области Ω'_1 и Ω'_2, удовлетворяющие условию

$$\mu_1(\Omega'_1, \rho_1) = \mu_1(\Omega'_2, \rho_2). \tag{7.4}$$

Рассмотрим функцию

$$h(z) = \begin{cases} u_0 & \text{на} \quad \Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_0}, \\ v & \text{на} \quad \Omega_{\varepsilon_0}, \end{cases}$$

которая непрерывна на $\bar\Omega$ и липшицева в Ω. Функция $h_k(z) = h(z) - \varepsilon_1|_{\Omega'_k}$ допустима в смысле вариационного определения $\mu_1(\Omega'_k, \rho_k)$. Следовательно,

$$\mu_1(\Omega'_k, \rho_k) \int\limits_{C_k} (u_0 - \varepsilon_1)^2 \rho ds \leqslant \iint\limits_{\Omega'_k} |\nabla h|^2 \, dxdy, \quad k = 1, 2.$$

Последнее вместе с (7.2)–(7.4) влечет

$$\mu_1(\Omega'_1, \rho_1)\Big(\int\limits_{C_1} u_{1,1}^2 \rho_1 ds + \int\limits_{C_2} u_{1,2}^2 \rho_2 ds + \varepsilon_1^2 \int\limits_{\partial\Omega} \rho ds \Big) \leqslant \iint\limits_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dxdy =$$

$$\iint\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_0|^2 \, dxdy + \iint\limits_{\Omega_{\varepsilon_0}} |\nabla v|^2 \, dxdy <$$

$$\iint\limits_{\Omega\setminus\Omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_0|^2 \, dxdy + \iint\limits_{\Omega_{\varepsilon_0}} |\nabla u_0|^2 \, dxdy =$$

$$\iint\limits_{\Omega_1^0} |\nabla u_{1,1}|^2 \, dxdy + \iint\limits_{\Omega_2^0} |\nabla u_{1,2}|^2 \, dxdy =$$

$$\mu_1(\Omega_1^0, \rho_1)\Big(\int\limits_{C_1} u_{1,1}^2 \rho_1 ds + \int\limits_{C_2} u_{1,2}^2 \rho_2 ds \Big).$$

Строгое неравенство в этой цепочке следует из принципа Дирихле, так как u_0 не является гармонической в Ω_{ε_0} согласно нашему предположению.

Полученные соотношения показывают, что $\mu_1(\Omega_k', \rho_k) < \mu_1(\Omega_k^0, \rho_k)$. Последнее противоречит предположению об экстремальности пары Ω_1^0, Ω_2^0 в задаче (7.1). Доказательство завершено. □

Следствие 6. *Рассмотрим задачу Стеклова в кольцевой области Ω для плотности ρ на $\partial\Omega = C_1 \cup C_2$. Предположим, что существует пара кольцевых областей Ω_1, Ω_2, реализующая минимум в* (7.1). *Пусть λ_0 – соответствующее этим областям собственное значение. Тогда*

$$\lambda_0 \operatorname{mod}(\Omega) \leqslant \frac{1}{\int_{C_1} \rho\, ds} + \frac{1}{\int_{C_2} \rho\, ds}. \tag{7.5}$$

Если рассматриваемая задача Стеклова конформно эквивалентна задаче в круговом кольце для постоянной плотности, то (7.5) *выполняется со знаком равенства.*

Для доказательства (7.5) нужно применить (1.6) для кольцевых подобластей $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$, $C_k \subset \partial\Omega_k$, таких что $\operatorname{mod}(\Omega_1) + \operatorname{mod}(\Omega_2) = \operatorname{mod}(\Omega)$ и $\mu_1(\Omega_1, \rho) = \mu_1(\Omega_2, \rho)$, а затем использовать свойство минимальности значения λ_0.

Замечание. Неравенство (7.5) с $\lambda_0 = \mu_2$ доказано в [12], где приведена также характеризация модуля кольцевой области, связанная с решением задачи Стеклова. Из наших результатов вытекает аналогичная характеризация модуля:

$$\max_{\rho} \lambda_0 \left(\frac{1}{\int_{C_1} \rho\, ds} + \frac{1}{\int_{C_2} \rho\, ds} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{mod}(\Omega)}.$$

Используя теорему 6, укажем явное условие, достаточное для существования собственной функции, имеющей замкнутую нодальную линию.

Теорема 7. *Пусть $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_2 \geqslant 0$ – плотности на окружностях $\mathbf{T}_R$ и $\mathbf{T}_{1/R}$, $R > 1$, имеющие общие массы $M_1 = \int_{\mathbf{T}_R} \rho_1\, ds$, $M_2 = \int_{\mathbf{T}_{1/R}} \rho_2\, ds$, $M = M_1 + M_2$.*

Пусть $\rho_m^{(1)} = \max \rho_1(z)$ *при* $z \in \mathbf{T}_R$, $\rho_m^{(2)} = \max \rho_2(z)$ *при* $z \in \mathbf{T}_{1/R}$, $\rho_m^{(k)} < \infty$, $k = 1, 2$. *Если*

$$\operatorname{mod}(A(1/R, R)) > \frac{2M}{M_1 M_2} \min\{\rho_m^{(1)} R, \rho_m^{(2)}/R\}, \qquad (7.6)$$

то задача Стеклова в $A(1/R, R)$ *для плотностей* ρ_1, ρ_2 *имеет собственную функцию с замкнутой нодальной линией.*

Доказательство. Рассмотрим экстремальную проблему (7.1), соответствующую рассматриваемой задаче Стеклова. Пусть $\{\Omega_1^{(n)}, \Omega_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – минимизирующая последовательность пар областей данной задачи. Выбирая, если необходимо, подпоследовательность, можем предполагать, что выполняется одно из следующих условий:

(1) Последовательности $\Omega_1^{(n)}$ и $\Omega_2^{(n)}$ сходятся к ядрам Ω_1 и Ω_2, которые являются невырожденными кольцевыми областями.

(2) $\operatorname{mod}(\Omega_1^{(n)}) \to 0$ или $\operatorname{mod}(\Omega_2^{(n)}) \to 0$.

В первом случае из леммы 1 получаем:

$$\mu_1(\Omega_k, \rho_k) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(\Omega_k^{(n)}, \rho_k), \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, пара $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ реализует минимум в рассматриваемой экстремальной задаче (7.1). В силу теоремы 6 последнее влечет существование желаемой собственной функции.

Рассмотрим второй случай. Пусть $\operatorname{mod}(\Omega_1^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$. Применяя отображение $z \mapsto z/R$ и используя теорему 3 и лемму 3а, получим следующие соотношения:

$$\mu_1(\Omega_1^{(n)}, \rho_1) \geqslant \mu_1(R_G(r_1^{(n)}), 1)(\rho_m^{(1)} R)^{-1} \to (2\rho_m^{(1)} R)^{-1}, \qquad (7.7)$$

при $n \to \infty$, где $r_1^{(n)}$ определяется из уравнения $\operatorname{mod}(R_G(r_1^{(n)})) = \operatorname{mod}(\Omega_1^{(n)})$.

Аналогично, если $\operatorname{mod}(\Omega_2^{(n)}) \to 0$ при $n \to \infty$, имеем

$$\mu_1(\Omega_2^{(n)}, \rho_2) \geqslant \mu_1(R_G(r_2^{(n)}), 1)(R/\rho_m^{(2)}) \to (R/2\rho_m^{(2)}). \qquad (7.8)$$

Выберем R_0, такое что

$$\log R_0 = \frac{M_1 - M_2}{M} \log R.$$

Тогда $1/R < R_0 < R$. В силу неравенства Херша–Пэйна (1.6),

$$\frac{1}{M_1 \operatorname{mod}(A(R_0, R))} = \frac{M}{M_1 M_2 \operatorname{mod}(A(1/R, R))} \geqslant$$
$$\max\{\mu_1(A(R_0, R), \rho_1), \mu_1(A(1/R, R_0), \rho_2)\}. \tag{7.9}$$

Так как пара колец $A(1/R, R_0)$, $A(r_0, R)$ допустима для рассматриваемой экстремальной задачи, (7.9) вместе с (7.7) и (7.8) влечет неравенство

$$\operatorname{mod}(A(1/R, R)) \leqslant 2M(M_1 M_2)^{-1} \min\{\rho_m^{(1)} R, \rho_m^{(2)}/R\}.$$

Итак, в случае (2) получили противоречие с условием (7.6). Доказательство завершено. □

Литература

1. A. Baernstein II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization.* Acta Math., **133** (1974), 139–169.
2. C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications.* Pitman Publ., London 1980.
3. B. Dittmar, *Stekloffsche Eigenwerte und konforme Abbildungen.* Z. f. Anal. und Anwend., **7(2)** (1988), 149–163.
4. B. Dittmar, *Ein Stekloffsches Eigenwertproblem in Ringgebieten.* Mitt. Math. Sem. Giessen, **228** (1996), 1–7.
5. В. Н. Дубинин, *Об изменении гармонической меры при симметризации.* Мат. Сб., **124** (1984), 272–279.
6. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Успехи мат. наук, **49**, No. 1 (1994), 3–76.
7. P. Duren, M. Schiffer, *A variational method for functions schlicht in an annulus.* Arch. Rat. Mech. Anal., **9** (1962), 260–272.
8. P. Duren, M. Schiffer, *Robin function and energy functionals of multiply connected domains.* Pacific J. Math., **148** (1991), 251–273.
9. P. Duren, M. Schiffer, *Robin function and distortion of capacity under conformal mapping.* Complex Variables, **21** (1993), 189–196.
10. G.H Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities.* Cambridge, 1959.
11. J. Hersch, L. P. Payne, *Extremal principles and isoperimetric inequalities for some mixed problems of Stekloff's type.* Zeitschr. Angew. Math. Phys., **19** (1968), 802–819.
12. J. Hersch, L. P. Payne, and M. M. Schiffer, *Some inequalities for Stekloff eigenvalues.* Arch. Rat. Mech. Anal., **57** (1974), 99–114.
13. Z. Nehary, *Conformal Mapping.* McGraw-Hill, 1952.
14. G. Pólya and M. Schiffer, *Convexity of functionals by transplantation.* J. d'Anal. Math., **3** (1954), 245–345.
15. G. Pólya and G. Szegö, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.* Princeton University Press, 1951.

16. M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principle in Differential Equations.* Prentice-Hall, Inc., 1984.
17. А. Ю. Солынин, *Граничное искажение и изменение модуля при расширении двусвязной области.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **201** (1992), 157–164.
18. А. Ю. Солынин, *Изометрические неравенства для многоугольников и диссимметризация.* Алгебра и анализ, **2** (1992), 210–234.
19. M. W. Stekloff, *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **19** (1902), 455–490.

Dittmar B. and Solynin A. Yu. Mixed Stekloff eigenvalue problem and new extremal properties of the Grötzsch ring.

We study the mixed Stekloff eigenvalue problem in doubly-connected domains. Using circular symmetrization and a distortion theorem on conformal mapping of an annulus, we find a lower bound for the first eigenvalue that is sharp for the Grötzsch ring. We solve also an extremal problem for some polygonal doubly-connected domains and prove some results concerning the existence of a closed nodal line.

Поступило 3 апреля 2000

Martin-Lüther Universität
zu Halle-Wittenberg,
Fachbereich Mathematik und Informatik
Halle, Deutschland
E-mail:dittmar@cantor.mathematik.uni-halle.de

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:solynin@pdmi.ras.ru