Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. Т. Караев

О СИМВОЛЕ БЕРЕЗИНА

Введение. В статье обсуждаются некоторые вопросы, связанные с символами Березина линейных ограниченных операторов, действующих в функциональных гильбертовых пространствах.

Функциональное гильбертово пространство (ф.г.п.) – это гильбертово пространство $H = H(\mathcal{Q})$ комплекснозначных функций на некотором множестве $\mathcal{Q}$ такое, что для каждого $\lambda \in \mathcal{Q}$ функционал $\varphi_\lambda(f) = f(\lambda)$ непрерывен в H. В силу теоремы Рисса, для каждого $\lambda \in \mathcal{Q}$ существует единственная функция $k_\lambda \in H$ такая, что

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$$

для всех $f \in H$ (символ $\langle\, , \rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве H). Семейство $\{k_\lambda : \lambda \in \mathcal{Q}\}$ называют воспроизводящим ядром пространства H. Подробнее изложение теории ф.г.п. и воспроизводящих ядер дано в [1, 2].

Символом Березина линейного ограниченного оператора A, действующего в ф.г.п. H, называют комплекснозначную функцию

$$\widetilde{A}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \big\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \big\rangle, \quad \lambda \in \mathcal{Q},$$

где $\widehat{k}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}$ – общий член нормированного воспроизводящего ядра пространства H.

Эта функция впервые введена Ф. А. Березиным [3, 4]. Ясно, что $\widetilde{A}$ – ограниченная функция на множестве $\mathcal{Q}$, значения которой лежат в числовой области оператора A. Символ Березина подробно изучен для теплицевых и ганкелевых операторов в [5–9].

Ф.г.п. H называется стандартным [10], если множество $\mathcal{Q}$ содержится в некотором топологическом пространстве и имеет непустую границу $\partial\mathcal{Q}$, причем последовательность $\widehat{k}_{\lambda_n}$ слабо сходится к нулю всякий раз, когда последовательность λ_n из $\mathcal{Q}$ стремится к точке из $\partial\mathcal{Q}$.

Пространства Харди $H^2 = H^2(D)$ и Бергмана $A^2 = A^2(D)$, состоящие из аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$, с нормами

$$\|f\|^2_{H^2} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\mathbf{T}} \left|f(r\xi)\right|^2 dm(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < +\infty$$

и, соответственно,

$$\|f\|^2_{A^2} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{D} \left|f(z)\right|^2 dm_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|^2}{n+1} < +\infty$$

(где dm – нормированная мера Лебега на единичной окружности $\mathbf{T} = \partial D$, dm_2 – нормированная плоская мера на D) являются стандартными в этом смысле.

В стандартных ф.г.п. компактность оператора A влечет равенство

$$\lim_{\lambda \to \xi \in \partial \mathcal{Q}} \widetilde{A}(\lambda) = 0. \tag{1}$$

Говорят в этом случае, что символ Березина компактного оператора в стандартном ф.г.п. обращается в нуль (т.е. "исчезает") на границе. Бергер и Кобурн в [6] поставили вопрос о справедливости обращения утверждения (1) в пространствах Харди и Бергмана.

В случае пространства Харди H^2 Акслером (см. об этом в [10]), а также Нордгрином и Розенталем [10] были приведены примеры, показывающие, что это обращение, вообще говоря, несправедливо. В §1 мы приводим пример в пространстве Бергмана A^2, отрицательно отвечающий на вопрос Бергера и Кобурна. В §2 символы Березина применяются для частичного решения двух задач Н. К. Никольского [11] об инвариантных подпространствах (подробнее см. в §2).

§1. Граничные значения символов Березина и компактность операторов.

Как было отмечено выше, в стандартных ф.г.п. компактность оператора A влечет равенство

$$\lim_{\lambda \to \xi \in \partial \mathcal{Q}} \widetilde{A}(\lambda) = 0.$$

Здесь мы приводим пример в пространстве Бергмана A^2, а также более простой пример в пространстве Харди H^2, которые показывают, что обращение в нуль символа Березина на границе круга D, вообще говоря, не влечет компактность оператора. Все используемые ниже понятия и факты о пространствах Бергмана и Харди можно найти, например, в [2, 12, 13].

Пример 1.1. Рассмотрим оператор одностороннего взвешенного сдвига T_Λ, $T_\Lambda\, e_n(z) = \lambda_n\, e_{n+1}(z)$, $n \geqslant 0$, с весовой последовательностью

$$\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geqslant 0} = \left\{(-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right\}_{n\geqslant 0},$$

в пространстве Бергмана A^2. Здесь

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n, \quad |z| < 1, \quad n \geqslant 0,$$

– ортонормированный базис в A^2. Тогда символ Березина $\widetilde{T}_\Lambda(\lambda)$ оператора T_Λ обращается в нуль на границе ∂D круга D, но T_Λ не является компактным оператором в пространстве A^2.

Действительно, так как $|\lambda_n| \to 1$ $(n \to +\infty)$, то T_Λ – некомпактный оператор в A^2. Теперь покажем, что символ Березина $\widetilde{T}_\Lambda(\lambda)$ исчезает на границе круга D. Так как воспроизводящим ядром пространства A^2 является семейство функций

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{(1-\overline{\lambda} z)^2} \quad (\lambda \in D),$$

то получаем:

$$\widetilde{T}_\Lambda(\lambda) = \left\langle T_\Lambda\, \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle = \pi(1-|\lambda|^2)^2 \left\langle T_\Lambda \left(\frac{1}{\pi} \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\right) \overline{\lambda}^n\, z^n, k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}(1-|\lambda|^2)^2 \left\langle T_\Lambda \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}\; \overline{\lambda}^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n, k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}(1-|\lambda|^2)^2 \left\langle \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}\; \overline{\lambda}^n\, T_\Lambda\, e_n(z), k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}(1-|\lambda|^2)^2 \left\langle \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}\; \overline{\lambda}^n\, \lambda_n\, e_{n+1}(z), k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \sqrt{\pi}(1-|\lambda|^2)^2 \left\langle \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n+1}\,\overline{\lambda}^n\,(-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\sqrt{\frac{n+2}{\pi}}\,z^{n+1}, k_\lambda \right\rangle =$$

$$= (1-|\lambda|^2)^2 \left\langle \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (n+1)\,\overline{\lambda}^n\,z^{n+1}, k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \lambda(1-|\lambda|^2)^2 \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (n+1)|\lambda|^{2n} = \lambda\left(\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\widetilde{T}_\Lambda(\lambda) = \lambda\left(\frac{1-|\lambda|^2}{1+|\lambda|^2}\right)^2 \quad (\lambda\in D).$$

Отсюда ясно, что $\lim\limits_{|\lambda|\to 1^-} \widetilde{T}_\Lambda(\lambda) = 0$, что и требовалось доказать.

Следующий пример относится к пространству Харди H^2.

Пример 1.2. Пусть $\theta(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ – сингулярная внутренняя функция, T_θ – соответствующий аналитический оператор Теплица (оператор умножения на θ) в пространстве Харди H^2 и $P_\theta = I - T_\theta T_{\overline{\theta}}$ – ортогональный проектор на подпространство $H^2 \ominus \theta H^2$. Положим $N_\theta = T_\theta P_\theta$ (ясно, что $N_\theta^2 = 0$). Тогда символ Березина оператора N_θ исчезает на границе, но N_θ не является компактным оператором в H^2.

Действительно, хорошо известно, что общий член воспроизводящего ядра пространства H^2 имеет вид

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}.$$

Легко показать, что для любого $\lambda\in D$

$$P_\theta\left(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z}\right) = \frac{1-\overline{\theta(\lambda)}\,\theta(z)}{1-\overline{\lambda}z}.$$

Учитывая это, получаем:

$$\widetilde{N}_\theta(\lambda) = \left\langle N_\theta\,\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle = \left(1-|\lambda|^2\right)\left\langle T_\theta\,P_\theta\left(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z}\right), k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \left(1-|\lambda|^2\right)\left\langle \theta(z)\frac{1-\overline{\theta(\lambda)}\,\theta(z)}{1-\overline{\lambda}z}, k_\lambda \right\rangle =$$

$$= \left(1-|\lambda|^2\right)\frac{\theta(\lambda)\left(1-|\theta(\lambda)|^2\right)}{1-|\lambda|^2} = \theta(\lambda)\left(1-|\theta(\lambda)|^2\right).$$

Итак,

$$\widetilde{N}_\theta(\lambda) = \theta(\lambda)\left(1-|\theta(\lambda)|^2\right) \quad (\lambda \in D).$$

Простые вычисления показывают, что функция θ имеет некасательный предел 0 в точке $\zeta = 1$, т.е. $\lim\limits_{\lambda\to 1^-}\theta(\lambda) = 0$, и что $|\theta(\zeta)| = 1$ для всех $\zeta \in \mathbf{T}\setminus\{1\}$. Поэтому $\lim\limits_{|\lambda|\to 1^-}\widetilde{N}_\theta(\lambda) = 0$, то есть $\widetilde{N}_\theta(\lambda)$ исчезает на границе круга D. Так как T_θ – изометрия в H^2 и P_θ – ортогональный проектор на бесконечномерное подпространство $H^2 \ominus \theta H^2$, то из равенства $T_{\overline{\theta}}N_\theta = P_\theta$ видно, что оператор N_θ не может быть компактным в пространстве Харди H^2.

Отметим, что в работе Нордгрина и Розенталя (см. [10], Следствие 2.8) доказан следующий критерий компактности в стандартных ф.г.п., который будет использован в следующем параграфе.

Лемма 1.3. *Линейный ограниченный оператор A в стандартном ф.г.п. $H(Q)$ является компактным тогда и только тогда, когда символы Березина всех операторов, унитарно эквивалентных оператору A, обращаются в нуль на границе множества Q.*

Поскольку оператор является компактным в том и только в том случае, когда его существенная числовая область (см. [14]) состоит из единственной точки 0, лемма 1.3 непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.4 ([10]). *Существенная числовая область оператора A в стандартном ф.г.п. $H(Q)$ совпадает с множеством граничных значений символов Березина всех операторов, унитарно эквивалентных оператору A.*

§2. Функция расстояния, символ Березина и инвариантные подпространства.

Пусть $\mathrm{Hol}\,(D)$ – пространство всех голоморфных функций в единичном круге D и X – банахово пространство аналитических функций в единичном круге D, непрерывно вложенное в пространство $\mathrm{Hol}\,(D)$, в котором непрерывны функционалы значения в точках круга D:

$$\varphi_\lambda(f) = f(\lambda), \quad f \in X, \quad (\lambda \in D).$$

Для каждого замкнутого подпространства $E \subset X$ Н. К. Никольским в [11] определена величина

$$\theta_E(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \|\varphi_\lambda \,|\, E\|, \quad \lambda \in D,$$

названная им функцией расстояния подпространства E. В силу теоремы Хана–Банаха справедливо равенство

$$\theta_E(\lambda) = \operatorname{dist}\left(\varphi_\lambda, E^\perp\right),$$

где $E^\perp = \{\varphi \in X^* : \varphi|E \equiv 0\}$ – аннулятор подпространства E. Это оправдывает введенную терминологию.

Пусть S, где $(Sf)(z) = zf(z)$ и $f \in X$, – оператор умножения на независимую переменную z, непрерывно действующий в пространстве X. В работе [11] ставятся следующие задачи:

Задача 1. Охарактеризовать z-инвариантные подпространства $E \subset X$ в терминах θ_E.

Задача 2. Охарактеризовать в терминах θ_E z-инвариантные подпространства E конечных коразмерностей.

В этом параграфе мы приведем некоторые результаты, дающие частичные решения этих задач (см. следствие 2.2 и теорему 2.3). Прежде чем приступить к изложению полученных результатов, отметим следующее.

Если $H = H(\mathcal{Q})$ – ф.г.п. над некоторым множеством $\mathcal{Q}$ и $\{k_\lambda : \lambda \in \mathcal{Q}\}$ – его воспроизводящее ядро, то

$$\varphi_\lambda(f) = f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle, \quad f \in H, \quad \lambda \in \mathcal{Q}.$$

Поэтому для замкнутого подпространства $E \subset H$ и ортогонального проектора P_E на подпространство E имеем:

$$\begin{aligned}\theta_E(\lambda) &= \left\|P_E\, k_\lambda\right\| = \|k_\lambda\| \left\|P_E \,\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\right\| = \\ &= \|k_\lambda\| \,\left\|P_E\, \widehat{k}_\lambda\right\| = \|k_\lambda\| \left\langle P_E\, \widehat{k}_\lambda, P_E\, \widehat{k}_\lambda\right\rangle^{1/2} = \\ &= \|k_\lambda\| \left\langle P_E\, \widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle^{1/2} = \|k_\lambda\| \big(\widetilde{P}_E(\lambda)\big)^{1/2}.\end{aligned}$$

То есть

$$\theta_E(\lambda) = \|k_\lambda\| \big(\widetilde{P}_E(\lambda)\big)^{1/2} \quad (\lambda \in \mathcal{Q}). \tag{2}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае функция расстояния пространства E и символ Березина оператора ортогонального проектирования на подпространство E связаны между собой формулой (2). Формулу (2) можно также записать в виде

$$\left(\frac{\theta_E(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2 = \widetilde{P}_E(\lambda) \quad (\lambda \in \mathcal{Q}). \tag{2'}$$

В следующих теоремах мы характеризуем инвариантные подпространства операторов в пространстве H в терминах символов Березина и функции расстояния.

Теорема 2.1. *Пусть $H = H(\mathcal{Q})$ – функциональное гильбертово пространство над некоторым множеством $\mathcal{Q}$ и A – произвольный линейный ограниченный оператор в H. Подпространство $E \subset H$ является инвариантным относительно оператора A (т.е. $E \in \operatorname{Lat}(A)$) тогда и только тогда, когда*

$$\left(P_E A^*(I-P_E)AP_E\right)^{\widetilde{}}(\lambda) = 0 \tag{3}$$

для всех $\lambda \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Действительно, хорошо известно, что

$$E \in \operatorname{Lat}(A) \Leftrightarrow \left(I-P_E\right)AP_E = 0.$$

Так как $\{k_\lambda : \lambda \in \mathcal{Q}\}$ – плотное множество в H, то

$$\left(I-P_E\right)AP_E = 0 \Leftrightarrow \left(I-P_E\right)AP_E\, k_\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathcal{Q}.$$

Поэтому

$$E \in \operatorname{Lat}(A) \Leftrightarrow \left\|\left(I-P_E\right)AP_E\,\widehat{k}_\lambda\right\|^2 = 0 \qquad (\lambda \in \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\langle \left(I-P_E\right)AP_E\,\widehat{k}_\lambda, \left(I-P_E\right)AP_E\,\widehat{k}_\lambda \right\rangle = 0 \quad (\lambda \in \mathcal{Q}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\langle P_E A^*\left(I-P_E\right)AP_E\,\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle = 0 \qquad (\lambda \in \mathcal{Q}).$$

По определению символа Березина отсюда делаем вывод о справедливости равенства (3). Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Если V – изометрия в функциональном гильбертовом пространстве H (т.е. $V^*V = I$), то замкнутое подпространство $E \subset H$ является V-инвариантным в том и только в том случае, когда*

$$\left(\frac{\theta_E(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2 = \big(P_E(V^* P_E V)P_E\big)^{\sim}(\lambda) \tag{4}$$

для всех $\lambda \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Действительно, по теореме 2.1

$$E \in \mathrm{Lat}\,(V) \Leftrightarrow \widetilde{P}_E(\lambda) = \big(P_E(V^* P_E V)P_E\big)^{\sim}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathcal{Q}).$$

Учитывая формулу $(2')$, приходим к нужному заключению (4).

Можно сказать, что следствие 2.2 решает задачу 1 в случае, когда H – функциональное гильбертово пространство аналитических функций в единичном круге D комплексной плоскости, если V положить равным оператору сдвига S.

Теорема 2.3. *Пусть $H = H(\mathcal{Q})$ – стандартное функциональное гильбертово пространство, V – изометрия в H и $E \subset H$ является V-инвариантным подпространством. Тогда подпространство E имеет конечную коразмерность (т.е. $\operatorname{codim} E \stackrel{\text{def}}{=} \dim E^{\perp} < +\infty$) в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\lambda \to \zeta \in \partial \mathcal{Q}} \Big(U\big(P_E(V^* P_E V)P_E\big)\,U^{-1}\Big)^{\sim}(\lambda) = 1 \tag{5}$$

для любого унитарного оператора U в H.

Доказательство. Сначала докажем следующую лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 2.4. *Пусть $H = H(\mathcal{Q})$ – стандартное функциональное гильбертово пространство и $E \subset H$ – замкнутое подпространство. Подпространство E имеет конечную коразмерность в том и только в том случае, если*

$$\lim_{\lambda \to \zeta \in \partial \mathcal{Q}} \left(\frac{\theta_{UE}(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2 = 1$$

для любого унитарного оператора U в H.

Доказательство леммы. Действительно, пусть U – произвольный унитарный оператор в H. Очевидно, что

$$\left\|P_{UE}k_\lambda\right\|^2+\left\|P_{(UE)^\perp}k_\lambda\right\|^2=\|k_\lambda\|^2 \quad (\lambda\in\mathcal{Q}).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\left\|P_{UE}k_\lambda\right\|}{\|k_\lambda\|}\right)^2=1-\left(\frac{\left\|P_{(UE)^\perp}k_\lambda\right\|}{\|k_\lambda\|}\right)^2 \quad (\lambda\in\mathcal{Q}).$$

В силу равенств $(UE)^\perp=UE^\perp$, $P_{UE^\perp}=UP_{E^\perp}U^{-1}$ и формулы $(2')$ последнее равенство приобретает вид

$$\left(\frac{\theta_{UE}(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2=1-\widetilde{\left(UP_{E^\perp}U^{-1}\right)}(\lambda) \quad (\lambda\in\mathcal{Q}). \tag{6}$$

Из равенства (6) ясно, что

$$\lim_{\lambda\to\zeta\in\partial\mathcal{Q}}\left(\frac{\theta_{UE}(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2=1 \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\zeta\in\partial\mathcal{Q}}\widetilde{\left(UP_{E^\perp}U^{-1}\right)}(\lambda)=0. \tag{7}$$

Так как $\dim E^\perp<+\infty$ тогда и только тогда, когда оператор $P_{E^\perp}$ компактен, то утверждение леммы получается из (7) и леммы 1.3 §1.

Ясно, что $E\in\mathrm{Lat}\,(V)\Leftrightarrow UE\in\mathrm{Lat}\,(UVU^{-1})$. Так как UVU^{-1} – изометрия в H, то в силу следствия 2.2 последнее условие равносильно условию

$$\left(\frac{\theta_{UE}(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2=\left(P_{UE}\Big(\big(UVU^{-1}\big)^*P_{UE}\big(UVU^{-1}\big)\Big)P_{UE}\right)(\lambda).$$

Учитывая, что $P_{UE}=UP_EU^{-1}$, отсюда легко получить равенство

$$\left(\frac{\theta_{UE}(\lambda)}{\theta_H(\lambda)}\right)^2=\widetilde{\Big(U\big(P_E\big(V^*P_EV\big)P_E\big)U^{-1}\Big)}(\lambda) \quad (\lambda\in\mathcal{Q}).$$

Учитывая лемму 2.4, получим утверждение теоремы.

Легко видеть, что теорема 2.3 дает решение задачи 2 в случае, когда H – пространство аналитических функций в D при $V=S$.

Замечание. В силу теоремы 1.4 условие (5) теоремы 2.3 может быть заменено эквивалентным ему условием

$$W_{\mathrm{ess}}\Big(P_E\big(V^*P_EV\big)P_E\Big)=\{1\}.$$

Литература

1. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels.* — Trans. Am. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
2. P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book.* New York, Springer-Verlag (1982).
3. F. A. Berezin, *Covariant and contravariant symbols for operators.* — Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **37** (1972), 1134–1167.
4. F. A. Berezin, *Quantization.* — Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **38** (1974), 1116–1175.
5. V. Guillemin, *Toeplitz operators in n-dimensions.* — Integral Equat. Oper. Theory **7** (1984), 145–205.
6. C. A. Berger, L. A. Coburn, *A symbol calculus for Toeplitz operators.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3072–3073.
7. J. Arazy, S. Fisher, S. Jonson, J. Peetre, *An identity for reproducing kernels in a planar domain and the Hilbert–Schmidt operators.* — J. Reine Angew. Math. **406** (1990), 179–199.
8. J. Peetre, *The Berezin transform and Ha-plitz operators.* — J. Oper. Theory **24** (1990), 165–189.
9. M. Engliš, *Toeplitz operators and the Berezin transform on H^2.* — Linear Algebra Appl. **223/224** (1995), 171–204.
10. E. Nordgren, P. Rosenthal, *Boundary values of Berezin symbols.* — Oper. Theory: Advances and Applications, Birkhäuser Verlag Basel 1/ Switzerland **73** (1994), 362–368.
11. N. Nikolski, *Distance formulae and invariant subspaces, with an application to localization of zeros of the Riemann ζ-function.* — Ann. Inst. Fourier, Grenoble **45**, No. 1 (1995), 143–159.
12. К. Гофман, *Банаховы пространства аналитических функций.* ИЛ., М. (1963).
13. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Наука, М. (1980).
14. J. G. Stampfli, J. P. Williams, *Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra.* — Tôhoku Math. J. **20** (1968), 417–424.

Karaev M. T. On the Berezin symbol.

Some questions related to the Berezin symbols of bounded linear operators in Hilbert function spaces are discussed.

Институт математики
и механики
АН Азербайджана
info@sinam.net
ilham@lan.ab.az

Поступило 25 января 2000 г.