Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

С. В. Кисляков

ЗАДАЧА О ПОДОБИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МАРТИНГАЛЬНЫХ РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

Старый вопрос о подобии сжатию любого полиномиально ограниченного оператора недавно был решен отрицательно в работе Пизье [8]. В той же работе читатель может найти подробные исторические указания. Отметим еще статьи [3] и [7], где даны иные изложения.

В других терминах результат Пизье можно сформулировать так: существует ограниченный, но не вполне ограниченный (определение см. ниже) гомоморфизм $\varphi : C_A \to B(H)$, где $C_A = \{f \in C(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0$ при $n < 0\}$ – диск-алгебра, а $B(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Естественно спросить, можно ли в этом утверждении заменить диск-алгебру другими правильными равномерными алгебрами. Этот вопрос упоминался в статье [9].

Напомним, что *равномерная алгебра* – это замкнутая подалгебра A в $C(X)$, содержащая константы и разделяющая точки; при этом алгебра A называется *правильной*, если $A \neq C(X)$. Линейный ограниченный оператор $T : A \to B(H)$ называется *вполне ограниченным*, если существует такая постоянная C, что для всякого n, всякой матрицы $\{\varphi_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$, составленной из элементов алгебры A, и всяких векторов $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in H$ справедливо неравенство

$$|\sum_{i,j}\langle T(\varphi_{ij})x_j, y_i\rangle| \le C\sup_t \|\{\varphi_{ij}(t)\}\|_{M_n}(\sum_j \|x_j\|^2)^{1/2}(\sum_i \|y_i\|^2)^{1/2},$$

где M_n – пространство матриц размера $n\times n$, наделенное нормой пространства $B(\ell^2_n)$. (Во всей статье угловые скобки обозначают скалярное произведение в том или ином гильбертовом пространстве; последнее иногда указывается явно: $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$). Наилучшая константа C обозначается через $\|T\|_{cb}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99-01-00103) и Шведской Королевской Академии наук.

Гипотеза о том, что всякая правильная равномерная алгебра допускает ограниченный, но не вполне ограниченный гомоморфизм в $B(H)$, представляется весьма естественной. Пока она не доказана и не опровергнута. Дело обстоит примерно так, как было с вопросом Гликсберга до его положительного решения в статье [6]. В 1964 г. Гликсберг спросил, всякая ли правильная равномерная алгебра недополняема в $C(K)$. В конце концов оказалось, что так и есть, и что можно перенести на общую ситуацию одно из доказательств, годящихся для диск-алгебры; тем не менее, в подавляющем большинстве конкретных примеров недополняемость была ясна и до работы [6].

Чтобы перенести контрпример Пизье на равномерную алгебру A, хватило бы, например, чтобы диск-алгебра была вполне изоморфна факторалгебре алгебры A, и опять во многих конкретных случаях это так и есть. Например, если $U \subset \mathbb{C}^n$ – ограниченная строго псевдовыпуклая область с гладкой границей, а A – алгебра функций, аналитических в U и непрерывных в $\bar{U}$, то такую факторалгебру можно построить с помощью теоремы 5.12 в обзоре [5]. В той теореме речь идет об ограниченном аналитическом продолжении на U функций, изначально заданных и голоморфных на сечении множества U некоторым аналитическим многообразием; это продолжение осуществляется линейным оператором, откуда получается, что соответствующие алгебры действительно вполне изоморфны (как и требовалось выше).

Однако подобное утверждение неизвестно для общей равномерной алгебры A. Более того, при любом разумном подходе представляется неизбежным поиск следов комплексно-аналитической структуры на A, а трудность состоит в том, что такие следы должны быть извлечены практически "из ничего". В [6], правда, в каком-то смысле эта трудность была преодолена для задачи Гликсберга, но в теперешней ситуации того утверждения недостаточно, хотя оно и привело к частичному результату в [9, теорема 5.1].

В настоящей заметке излагается другой частичный результат. При этом условия на алгебру A будут довольно мягкими: будет нужно лишь, чтобы на A существовало нетривиальное ограниченное точечное дифференцирование. Недостаток же состоит в том, что ограниченный, но не вполне ограниченный гомоморфизм в $B(H)$ будет построен не на самой алгебре A, а на некотором ее *мартингальном расширении.*

Самый известный пример мартингального расширения – это алгебра мартингалов Харди. Рассмотрим бесконечное произведение $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. На этом множестве имеется естественная возрастающая последовательность σ-алгебр: n-ая σ-алгебра состоит из множеств, зависящих лишь от первых n координат. Мартингал относительно этой цепочки σ-алгебр называется *мартингалом Харди*, если для каждого n его условное ожидание относительно n-ой алгебры есть аналитическая функция (т.е. лежит в H^1) по переменной z_n. Мартингалы Харди с непрерывной на $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ предельной функцией образуют равномерную алгебру $\mathcal{H}$, которую естественно называть мартингальным расширением диск-алгебры C_A.

В неопубликованной предварительной версии статьи [8] в качестве промежуточного шага к построению контрпримера для диск-алгебры доказывалось существование ограниченного, но не вполне ограниченного гомоморфизма алгебры $\mathcal{H}$ в $B(H)$. (В окончательной публикации результат для диск-алгебры установлен непосредственно, что делает тривиальным утверждение об $\mathcal{H}$.) Оказывается, что упомянутую мартингальную конструкцию Пизье можно перенести в абстрактную ситуацию. Рассуждения Пизье требуют изменений, но очень небольших, так что доказательство главного результата (теорема 1 ниже) не вполне ново. В действительности, и формулировка сообщает не очень много – однако она дает некоторую надежду на решение в будущем задачи для *абстрактной* равномерной алгебры при *минимальных* предположениях.

Кроме того, теорема 1 подсказывает, что, вероятно, задачу было бы интересно исследовать для алгебр наподобие той, что была построена Коулом, т.е. для правильных алгебр, у которых любая точка пространства максимальных идеалов является точкой пика (см. [2, 1]). Все непрерывные точечные дифференцирования для такой алгебры – нулевые.

Переходим к формальному изложению. Пусть A – равномерная алгебра на компакте X, и пусть μ – вероятностная мера на X, мультипликативная на A. Рассмотрим произведение $(X^\infty, \mu^\infty) = (X, \mu)^{\mathbb{N}}$ с естественной возрастающей последовательностью $\{\mathcal{A}_n\}$ σ-алгебр: $\mathcal{A}_n$ состоит из множеств, зависящих лишь от первых n координат, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Мартингальное расшире-*

ние $\mathrm{Mart}\,(A,\mu)$ алгебры A относительно меры μ – это пространство всех функций f из $C(X^\infty)$ таких, что для каждого n функция $\mathbb{E}_n f \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathbb{E}f|\mathcal{A}_n)$ лежит в A как функция n-ой переменной при любых фиксированных значениях предыдущих переменных. Положим еще $d_n f = \mathbb{E}_n f - \mathbb{E}_{n-1} f$.

Из мультипликативности меры μ на A сразу следует, что $\mathbb{E}_n(fg) = (\mathbb{E}_n f)(\mathbb{E}_n g)$, если $f, g \in \mathrm{Mart}\,(A,\mu)$ (удобно сначала проверить это на функциях, зависящих лишь от конечного множества координат, а затем перейти к пределу). Следовательно, $\mathrm{Mart}\,(A,\mu)$ – равномерная алгебра на X^∞.

Рассмотрим теперь произвольный линейный мультипликативный функционал φ на A (не обязательно связанный с упомянутой мерой μ). Линейный функционал ψ на A называется *φ-дифференцированием*, если $\psi(fg) = \varphi(f)\psi(g) + \psi(f)\varphi(g)$, $f, g \in A$. Основная теорема (см. ниже) утверждает, что если для некоторого линейного мультипликативного функционала φ алгебра A обладает ненулевым ограниченным φ-дифференцированием, то некоторое мартингальное расширение алгебры A допускает ограниченный, но не вполне ограниченный гомоморфизм в $B(H)$. В действительности мы несколько уточним эту формулировку, для чего нужна небольшая подготовка.

На диск-алгебре C_A значение в центре единичного круга есть линейный мультипликативный функционал (обозначим его через φ), а отображение $\psi : f \mapsto f'(0)$ есть ограниченное (имеющее норму 1) φ-дифференцирование. Далее, если m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$, то

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(z)dm(z),\ \psi(f) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\bar{z}\,dm(z), \quad f \in C_A.$$

Оказывается, что и в общем случае справедливо нечто подобное.

Пусть ψ – ненулевое ограниченное φ-дифференцирование на произвольной равномерной алгебре $A \subset C(X)$. Легко видеть, что ψ обращается в нуль на константах, поэтому сужение функционала ψ на идеал $I = \{f \in A : \varphi(f) = 0\}$ тоже отлично от нуля. Без потери общности будем считать, что $\|\psi|_I\| = 1$.

Лемма 1. *При сделанных предположениях существуют представляющая мера $\nu \geqslant 0$ для φ и последовательность $\{f_n\} \subset I$, $\|f_n\| \leq 1$, такие что*

1° *$f_n \to F \in L^\infty(\nu)$ п.в. относительно ν;*
2° *$|F| = 1$ п.в. и $F\nu \perp A$;*
3° *$\psi(g) = \int_X g\bar{F}d\nu$, $g \in A$.*

Это утверждение, видимо, хорошо известно. Приведем доказательство ради полноты. Продолжим функционал $\psi|_I$ на пространство $C(X)$ без увеличения нормы, и пусть мера η представляет это продолжение. Выберем последовательность $\{f_n\} \subset I$, $|f_n| \le 1$, такую, что $\int f_n d\eta \to 1$. Пусть F – слабая предельная точка этой последовательности в $L^2(|\eta|)$. Без потери общности можно считать, что $f_n \to F$ в $L^2(|\eta|)$ и п.в. относительно η. Имеем:

$$1 = \int F d\eta = |\int F d\eta| \le \int d|\eta| = 1,$$

откуда вытекает, что $F\eta \overset{\text{def}}{=} \nu \ge 0$ и $|F| = 1$ п.в. относительно ν.

Если $g \in A$, то $gf_n \in I$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\int g d\nu = \int gF d\eta = \lim_{n\to\infty} \int gf_n d\eta = \lim_{n\to\infty} \psi(gf_n)\\ = \lim_{n\to\infty} \varphi(g)\psi(f_n) = \varphi(g),\end{aligned}$$

так что ν представляет функционал φ. Поэтому для $g \in A$ имеем

$$\int gF d\nu = \lim_{n\to\infty} \int gf_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \varphi(g)\varphi(f_n) = 0,$$

т.е. $F\nu \perp A$. В частности, $\int F d\nu = 0$, а тогда и $\int \bar{F} d\nu = 0$, т.е. мера $\bar{F}\nu$ (совпадающая с η) ортогональна константам. В соединении с тем, что $\bar{F}\nu$ представляет $\psi|_I$ (по построению), последнее влечет утверждение 3°. □

Меру ν, обладающую свойствами, перечисленными в лемме 1, мы будем называть *ассоциированной с точечным дифференцированием*.

Теорема 1. *Пусть A – равномерная алгебра на компакте X, и пусть ν – мера, ассоциированная с точечным дифференцированием для алгебры A. Тогда существует ограниченный, но не вполне ограниченный гомоморфизм алгебры $A_1 = \mathrm{Mart}\,(A, \nu)$ в $B(H)$.*

Доказательство. Формулы $\varphi(g) = \int_X g d\nu$ и $\psi(g) = \int_X g\bar{F} d\nu$ распространяют функционалы φ и ψ, упомянутые в лемме 1, на пространство $L^1(\nu)$. Далее, пусть φ_n и ψ_n – операторы, заданные на функциях, определенных на X^∞, и действующие как φ и ψ по n-ой переменной при фиксированных остальных.

Обозначим через K вспомогательное бесконечномерное гильбертово пространство и положим

$$H^2(K,\nu^\infty) = \mathrm{clos}_{L^2(K,\nu^\infty)} K \otimes A_1,$$
$$\bar{H}^2(K,\nu^\infty) = \mathrm{clos}_{L^2(K,\nu^\infty)} K \otimes \bar{A}_1$$

(во второй формуле черта в правой части обозначает комплексное сопряжение).

Пусть $Q : L^2(K,\nu^\infty) \to \bar{H}^2(K,\nu^\infty)$ – ортогональный проектор. Для $f \in H^\infty(\nu^\infty)$ (последнее пространство – это w^*-замыкание алгебры A_1 в $L^\infty(\nu^\infty)$) определим операторы

$$M_f : H^2(K,\nu^\infty) \to H^2(K,\nu^\infty),\ M_f g = fg,$$

и

$$\sigma_f : \bar{H}^2(K,\nu^\infty) \to \bar{H}^2(K,\nu^\infty),\ \sigma_f(g) = Q(fg).$$

Очевидно, что $M_{f_1}M_{f_2} = M_{f_1f_2}$. Мы утверждаем, что и $\sigma_{f_1}\sigma_{f_2} = \sigma_{f_1f_2}$. Чтобы проверить это, заметим, что

$$h \perp \bar{H}^2(K,\nu^\infty),\ f \in H^\infty(\nu^\infty) \implies fh \perp \bar{H}^2(K,\nu^\infty). \tag{1}$$

(Здесь и далее имеется в виду ортогональность относительно гильбертовой "полуторалинейной" двойственности, а не в смысле билинейной двойственности, как было в лемме 1 и ее доказательстве). Действительно, $h \perp \bar{H}^2(K,\nu^\infty)$ тогда и только тогда, когда для каждого элемента $u = \sum x_i \otimes \bar{u}_i$ из $K \otimes \bar{A}_1$ имеем

$$0 = \int \langle h, \sum x_i \otimes \bar{u}_i\rangle_K d\nu^\infty = \int \sum u_i \langle h, x_i\rangle_K d\nu^\infty. \tag{2}$$

Но $fu_i \in H^\infty(\nu^\infty)$, ибо $u_i \in A_1$; подставив в (2) эти произведения вместо u_i, получим импликацию (1).

Из (1) вытекает формула

$$Q(fg) = Q(fQg), \quad f \in H^\infty(\nu^\infty),\ g \in L^2(K,\nu^\infty). \tag{3}$$

Соотношение $\sigma_{f_1}\sigma_{f_2} = \sigma_{f_1f_2}$ – следствие формулы (3).

Теперь (как и в [8, 3, 7]) мы привлечем последовательность $\{V_n\}_{n\ge1}$ операторов в K, удовлетворяющих *каноническим антикоммутационным соотношениям*

$$V_nV_k + V_kV_n = 0, \quad V_nV_k^* + V_k^*V_n = \delta_{nk}I,$$
$$1 \le n,\ k < \infty.$$

(Чтобы не удлинять список литературы, отметим, что построение таких операторов описано в [3] и в [7]). Хорошо известно и легко проверяется, что $\|\Sigma\alpha_i V_i\| = (\Sigma|\alpha_i|^2)^{1/2}$ для любых комплексных скаляров α_i. Зафиксируем равномерно ограниченную последовательность $\eta = \{\eta_n\}_{n\geq 0}$ измеримых скалярных функций на X^∞ таких, что η_n зависит лишь от первых n переменных (соответственно, $\eta_0 = \mathrm{const}$). Для каждой функции $f \in H^\infty(\nu^\infty)$ определим оператор $D_f^\eta : H^2(K,\nu^\infty) \to \bar{H}^2(K,\nu^\infty)$ формулой

$$D_f^\eta(u) = Q(\sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)V_n u),$$

или, эквивалентным образом,

$$\langle D_f^\eta(u), v\rangle = \int \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)\langle V_n u, v\rangle_K \, d\nu^\infty,$$
$$u \in K\otimes A_1, \quad v \in K \otimes \bar{A}_1. \tag{4}$$

(Напомним, что ψ_n – это функционал ψ, действующий по n-ой переменной; до того, как будет доказана непрерывность оператора D_f^η, в первом определении тоже следует ограничиться функциями u из $K\otimes A_1$.)

Мы утверждаем, что в (4) ничего не изменится, если справа заменить функцию u или v (или обе) на, соответственно, $\mathbb{E}_{n-1}u$ и $\mathbb{E}_{n-1}v$. Действительно, достаточно проверить это для $u = x\otimes\alpha$, $v = y\otimes\bar\beta$, где $x, y\in K$, $\alpha,\beta\in A_1$. Но так как $\eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)$ зависит лишь от первых $n-1$ переменной, то имеет место формула

$$\langle D_f^\eta(u), v\rangle = \int \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)\mathbb{E}_{n-1}\langle V_n u, v\rangle_K \, d\nu^\infty$$
$$= \int \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)\mathbb{E}_{n-1}(\alpha\beta)\langle V_n x, y\rangle_K \, d\nu^\infty.$$

Оператор $\mathbb{E}_{n-1}$ мультипликативен на A_1. Поэтому

$$\mathbb{E}_{n-1}(\alpha\beta) = (\mathbb{E}_{n-1}\alpha)(\mathbb{E}_{n-1}\beta) = \mathbb{E}_{n-1}(\alpha\mathbb{E}_{n-1}\beta) = \mathbb{E}_{n-1}(\beta\mathbb{E}_{n-1}\alpha).$$

Это доказывает наше утверждение.

Определим отображение

$$\pi^\eta : H^\infty(\nu^\infty) \to B(\bar{H}^2(K,\nu^\infty) \oplus H^2(K,\nu^\infty))$$

формулой

$$\pi^\eta(f) = \begin{pmatrix} \sigma_f, & D_f^\eta \\ 0, & M_f \end{pmatrix},$$

Мы покажем, что π^η – ограниченный гомоморфизм, а затем установим, что при подходящих последовательностях η (в частности, при $\eta_j \equiv 1$) π^η не является вполне ограниченным. (Отметим также, что $\pi^\eta(1) = id$.)

Чтобы доказать, что π^η – гомоморфизм, достаточно проверить равенство

$$D^\eta_{f_1 f_2} = \sigma_{f_1} D^\eta_{f_2} + D^\eta_{f_1} M_{f_2}.$$

Для этого мы используем замечание, сделанное выше о формуле (4), а также то, что ψ – это φ-дифференцирование. Именно, $\psi_n(\mathbb{E}_n(f_1 f_2)) = (\mathbb{E}_{n-1} f_1)\psi_n(\mathbb{E}_n f_2) + \psi_n(\mathbb{E}_n f_1)\mathbb{E}_{n-1} f_2$, откуда следует, что

$$\langle D^\eta_{f_1 f_2}(u), v\rangle$$

$$= \int \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}[\psi_n(\mathbb{E}_n f_2)\langle V_n u, \mathbb{E}_{n-1}(\bar{f}_1 v)\rangle_K$$

$$+ \psi_n(\mathbb{E}_n f_1)\langle V_n(\mathbb{E}_{n-1}(f_2 u)), v\rangle_K] d\nu^\infty$$

$$= \int \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f_2)\langle V_n u, \bar{f}_1 v\rangle_K d\nu^\infty + \langle D^\eta_{f_1} M_{f_2} u, v\rangle$$

$$= \langle Q(f_1 D^\eta_{f_2}(u)), v\rangle + \langle D^\eta_{f_1} M_{f_2} u, v\rangle,$$

а это и есть требуемая формула (в последней строке мы использовали соотношение (3)).

Теперь проверим непрерывность отображения π^η. Для этого достаточно доказать, что оператор $f \mapsto D^\eta_f$ ограничен.

Вспоминая формулу $\|\Sigma \alpha_n V_n\| = (\Sigma |\alpha_n|^2)^{1/2}$ для любых комплексных скаляров α_n, заключаем, что $(\sum |\Phi(V_n)|^2)^{1/2} \leq \|\Phi\|$ для всякого функционала Φ из $B(K)^*$. В частности,

$$(\sum |\langle V_n x, y\rangle_K|^2)^{1/2} \leq |x||y|, \quad x, y \in K, \tag{5}$$

где $|\cdot|$ – норма в K.

Обозначим через $H^1_M(\ell^2,\nu^\infty)$ пространство ℓ^2-значных мартингалов x, согласованных с последовательностью $\{\mathcal{A}_n\}$ и удовлетворяющих неравенству

$$\|x\|_{1,M} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{X^\infty} \sup_j \|\mathbb{E}_j\, x(\cdot)\|_{\ell^2} d\nu^\infty < \infty.$$

(Подчеркнем, что в этом определении не используется никаких структур, связанных с алгеброй A, – кроме меры ν). По поводу теории этого пространства и фактов, использованных ниже, мы отсылаем читателя к книге [4] (случай ℓ^2-значных мартингалов не отличается от скалярного случая, рассмотренного в [4]).

Лемма 2. *Если* $u \in H^2(K,\nu^\infty)$, $v \in \bar{H}^2(K,\nu^\infty)$, *то*

$$x = \{\langle V_n u, v\rangle_K\}_{n\geq 1} \in H^1_M(\ell^2,\nu^\infty)$$

и

$$\|x\|_{1,M} \leq C\|u\|_{L^2(K,\nu^\infty)}\|v\|_{L^2(K,\nu^\infty)}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\mathbb{E}_j\,\langle V_n u, v\rangle_K = \langle V_n \mathbb{E}_j\, u, \mathbb{E}_j\, v\rangle_K$ (удобно сначала рассмотреть случай, когда $u \in K\otimes A_1$, $v \in K\otimes \bar{A}_1$, а затем перейти к пределу). Значит, в силу (5),

$$\begin{aligned}\sup_j \|\mathbb{E}_j\, x(\cdot)\|_{\ell^2} &\leq \sup_j |\mathbb{E}_j\, u(\cdot)||\mathbb{E}_j\, v(\cdot)| \\ &\leq \sup_j |\mathbb{E}_j\, u(\cdot)| \sup_j |\mathbb{E}_j\, v(\cdot)|.\end{aligned}$$

Проинтегрировав, найдем

$$\|x\|_{1,M} \leq \Big(\int [\sup_j |\mathbb{E}_j\, u|]^2 d\nu^\infty\Big)^{1/2}\Big(\int [\sup_j |\mathbb{E}_j\, v|]^2 d\nu^\infty\Big)^{1/2},$$

а тогда лемма вытекает из стандартной L^2-оценки для мартингальной максимальной функции. $\square$

Обратившись к формуле (4) и вспомнив о двойственности между мартингальными пространствами $H^1_M(\ell^2,\nu^\infty)$ и $\mathrm{BMO}_M(\ell^2,\nu^\infty)$, мы видим, что непрерывность отображения $f \mapsto D^\eta_f$ будет следовать из оценки

$$\|\sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n\, f)e_n\|_{\mathrm{BMO}_M(\ell^2,\nu^\infty)} \leq C\|f\|_\infty, \tag{6}$$

где $f \in H^\infty(\nu^\infty)$ и e_n – базисные орты пространства ℓ^2. Чтобы учесть константы, мы определим норму в $\mathrm{BMO}_M(\ell^2, \nu^\infty)$ равенством

$$\|y\|_{\mathrm{BMO}_M}(\ell^2, \nu^\infty) = |||y||| + (\int \|y(.)\|^2_{\ell^2} d\nu^\infty)^{1/2},$$

где

$$|||y||| = \Big(\sup_{n\geq 1} \|E_n(\|y - \mathbb{E}_{n-1}y\|_{\ell^2})^2\|_\infty\Big)^{1/2}.$$

Для $y = \sum_{n\geq 1} \eta_{n-1}\psi_n(\mathbb{E}_n f)e_n$ оценка $(\int \|y(\cdot)\|^2_{\ell^2} d\nu^\infty)^{1/2} \leq C\|f\|_\infty$ ясна:

$$\int \sum |\psi_n(\mathbb{E}_n f)|^2 d\nu^\infty = \int \sum |\psi_n(d_n f)|^2 d\nu^\infty$$
$$\leq \sum \int |d_n f|^2 d\nu^\infty = \|f\|^2_{L^2(\nu^\infty)} \leq \|f\|^2_\infty.$$

Покажем, что $|||f||| \leq C\|f\|_\infty$. При этом мы снова используем равенство $\psi_n(\mathbb{E}_n f) = \psi_n(d_n f)$, а также то, что последняя функция зависит лишь от первых $n-1$ переменной:

$$\mathbb{E}_j \|y - \mathbb{E}_{j-1}y\|^2$$
$$= \mathbb{E}_j \Big\| \sum_{n\geq j} e_n[\eta_{n-1}\psi_n(d_n f) - \mathbb{E}_{j-1}(\eta_{n-1}\psi_n(d_n f))]\Big\|^2_{\ell^2}$$
$$\leq C\mathbb{E}_j \Big(\sum_{n\geq j} |\psi_n(d_n f)|^2 + \sum_{n\geq j} (\mathbb{E}_{j-1}|\eta_{n-1}\psi_n(d_n f)|)^2\Big)$$
$$\leq C\Big(\mathbb{E}_j (\sum_{n\geq j} |d_n f|^2) + \mathbb{E}_j \mathbb{E}_{j-1}(\sum_{n\geq j} |d_n f|^2)\Big)$$
$$\leq C(\mathbb{E}_j |f - \mathbb{E}_{j-1}f|^2 + \mathbb{E}_{j-1}\mathbb{E}_j |f - \mathbb{E}_{j-1}f|^2)$$
$$\leq c'|||f|||^2 \leq C''\|f\|^2_\infty.$$

Остается только доказать, что при некоторых η_n (например, при $\eta_n \equiv 1$) оператор $\pi^\eta|_{A_1}$ не является вполне ограниченным.

Фиксируя $x, y \in K$ и полагая $u = 1 \cdot x$, $v = 1 \cdot y$ в (4), находим:

$$\langle \pi^\eta(f)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot x \end{pmatrix}, (1 \cdot y, 0)\rangle = \langle T_\eta(f)x, y\rangle_K, \tag{7}$$

где оператор $T_\eta : H^\infty(\nu^\infty) \to B(K)$ задается формулой

$$T_\eta(f) = \sum_{s \geq 1}(\int\limits_{X^\infty} \eta_{s-1}\psi_s(\mathbb{E}_s f)d\nu^\infty)V_s. \tag{8}$$

Из формулы (7) видно, что достаточно убедиться в том, что оператор T_η – не вполне ограниченный.

Заметим, что если оператор $\tau : A_1 \to B(K)$ вполне ограниченный, то для всяких n, ℓ, всяких матриц $a_1, \dots, a_\ell$ размера $n \times n$ и всяких $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in A_1$ имеем

$$\|\sum_k a_k \otimes \tau(\alpha_k)\|_{B(\ell^2_n(K))} \leq \|\tau\|_{cb} \sup_{t \in X^\infty} \|\sum a_k \alpha_k(t)\|_{M_n}. \tag{9}$$

Действительно, если $y = (y_1, \dots, y_n) \in \ell^2_n(K)$ и $a_k = \{a^k_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$, то

$$\begin{aligned}
&\|(\sum_k a_k \otimes \tau(\alpha_k))y\|^2_{\ell^2_n(K)} = \sum_i \|\sum_k \sum_j a^{(k)}_{ij}\tau(\alpha_k)y_j\|^2 \\
&= \sum_i \|\sum_j \tau(\sum_k a^{(k)}_{ij}\alpha_k)y_j\|^2 \\
&\leq (\sum_j \|y_j\|^2)\|\tau\|^2_{cb} \sup_{t \in X^\infty} \|\sum_k a_k\alpha_k(t)\|^2_{M_n},
\end{aligned}$$

откуда и вытекает (9).

Мы хотим показать, что для оператора (8) оценка (9) неверна. Это вполне аналогично некоему фрагменту рассуждений, имеющемуся в статьях [8, 3, 7], так что часть вычислений будет опущена.

Рассмотрим функции f_n из леммы 1. Зафиксировав n, положим $\alpha_k(t) = f_n(t_k)$ $(t \in X^\infty; k = 1, \dots, \ell)$. Тогда

$$T_\eta(\alpha_k) = \int \eta_{k-1}d\nu^\infty\psi(f_n)V_k,$$

и неравенство (9) превращается в

$$|\psi(f_n)| \Big\| \sum_{k=1}^{\ell} (a_k \otimes V_k) \int \eta_{k-1} d\nu^\infty \Big\|_{B(\ell_n^2(K))}$$
$$\leq \|T_\eta\|_{cb} \sup_{t \in X^\infty} \Big\| \sum_{k=1}^{\ell} a_k f_n(t_k) \Big\|_{M_n}. \tag{10}$$

Как и в [8] (и в [3, 7]), мы реализуем $V_1, \dots, V_\ell$ матрицами размера $2^\ell \times 2^\ell$ (при этом K в (10) заменяется на $\ell^2_{2^\ell}$) и положим $a_k = \bar{V}_k$, $1 \leq k \leq \ell$. Тогда верхняя грань справа не превосходит числа $\sqrt{\ell}$. Предположив, что интегралы $\int \eta_{k-1} d\nu^\infty$ отличны от нуля и не зависят от k, и перейдя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\ell} \bar{V}_k \otimes V_k \Big\|_{B(\ell^2_{2^\ell}(\ell^2_{2^\ell}))} \leq C \|T_\eta\|_{cb} \sqrt{\ell}.$$

Мы отсылаем читателя к статьям [8, 3, 7] по поводу стандартного вычисления, показывающего, что правая часть в этом неравенстве превосходит $\ell/2$. $\square$

Литература

1. R. E. Basener, *On rationally convex hulls.* Trans. Amer. Math. Soc., **182** (1973), 353–381.
2. A. Browder, *Introduction to function algebras.* W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam (1969).
3. K. Davidson, V. Paulsen, *Polynomially bounded operators.* J. Reine Angew. Math., **487** (1997), 153–170.
4. A. M. Garsia, *Martingale inequalities.* Mathematics Lecture Notes Series, W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass.–London–Amsterdam (1973).
5. Г. М. Хенкин, *Метод интегрального представления в комплексном анализе.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **7**. Итоги науки и техники, АН СССР, ВИНИТИ, Москва (1985).
6. С. В. Кисляков, *Правильные равномерные алгебры недополняемы.* Докл. Акад. Наук, **309**, No. 4 (1989), 795–798.
7. С. В. Кисляков, *Операторы, (не)подобные сжатию: контрпример Пизье через сингулярные интегралы.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **225** (1997), 79–95.
8. G. Pisier, *A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction.* J. Amer. Math. Soc., **10**, No. 2 (1997), 351–369.
9. G. Pisier, *The similarity degree of an operator algebra.* Алгебра и Анализ, **10**, No. 1 (1998), 132–186.

Kislyakov S. V. Similarity problem for certain martingale uniform algebras.

Let A be a proper uniform algebra admitting a nontrivial bounded point derivation. Then for a certain uniform algebra A_1 (related to A much as the algebra of Hardy martingales on $\mathbb{T}^\infty$ is related to the disk algebra) there exists a bounded but not completely bounded homomorphism $\varphi : A_1 \to B(H)$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 марта 2000 г.