Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

А. М. Коточигов

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ПОЛОСЕ

§1. Введение

Нередко бывает, что на фиксированном "малом" множестве голоморфные функции из того или иного пространства ведут себя "свободно": их сужения на это множество утрачивают всякие следы аналитичности. Если класс таких сужений допускает простое и полное описание в терминах вещественного анализа, обычно говорят о *феномене свободной интерполяции*.

Задача о характеризации множеств, на которых свободная интерполяция возможна, имеет давнюю историю. Накопленные результаты демонстрируют определенную устойчивость структуры интерполяционных множеств как в отношении выбора типа исходного пространства голоморфных фунций, так и в отношении выбора областей, на которых такие пространства изучаются, см., например, [1-7]. Материал настоящей статьи можно рассматривать как еще одну иллюстрацию этого принципа – мы перенесем полученные ранее результаты об интерполяции в стандартной полосе на подобласти полосы достаточно общей структуры.

Определение 1.1. *Пусть* $\mathbf{S} = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ *– стандартная полоса. Пусть заданы две кривые* Γ_k, $k = 1, 2$, *лежащие в* $\mathbf{S}$ *и такие, что*

1) *кривые начинаются и заканчиваются в бесконечно удаленной точке,*

2) *кривые отделены одна от другой, т.е. существует постоянная* C_0 *такая, что* $z_1 \in \Gamma_1$, $z_2 \in \Gamma_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| \geq C_0$,

3) *обе кривые являются лаврентьевскими, т.е. существует постоянная* C *такая, что для любой пары точек* z_1, $z_2 \in \Gamma_k$ *дуга кривой* Γ_k, *соединяющая эти точки, имеет длину не больше, чем* $C|z_1 - z_2|$.

Каждая из кривых Γ_k *делит комплексную плоскость на две области: "верхнюю" и "нижнюю"; обозначим их через* P_k^+, P_k^-. *Будем считать, для определенности, что кривая* Γ_1 *лежит выше кривой* Γ_2, *т.е.* $P_1^+ \cap P_2^- = \varnothing$. *Обобщенной полосой назовем следующее* *подмножество стандартной полосы:*

$$S = P_1^- \cap P_2^+. \tag{1.1}$$

Заметим, что кривые Γ_k являются локально спрямляемыми. Если ввести на них естественную параметризацию, то соответствующие параметрические описания кривых удовлетворяют условию Липшица с постоянной C.

Определение 1.2. *Пусть E замкнутое подмножество границы обобщенной полосы S. Будем говорить, что E – локально пористое множество, если существует постоянная C_p такая, что на любой дуге J, лежащей на одной из кривых Γ_k и имеющей длину меньше единицы, найдется меньшая дуга I такая, что*

$$I \cap E = \varnothing \qquad |J| \le C_p |I|. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. *Множество E, лежащее в открытой обобщенной полосе S, будем называть редким, если существует постоянная C_r такая, что*

$$|z_1 - z_2| \ge C_r \operatorname{dist}(z_1, \partial S), \quad z_1, z_2 \in E, \quad z_1 \ne z_2. \tag{1.3}$$

Определение 1.4. *Область в комплексной плоскости B будем называть областью Лаврентьева, если существует постоянная C такая, что для любой пары точек z_1, z_2 на границе области B выполнено неравенство*

$$|J(z_1, z_2, B)| \le C|z_1 - z_2|; \tag{1.4}$$

здесь и далее $J(z_1, z_2, B)$ обозначает наименьшую из граничных дуг области B, стягивающих эти точки.

Заметим, что обобщенная полоса удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной C (постоянной Липшица для граничных кривых).

Напомним определения исследуемых здесь функциональных пространств.

Определение 1.5. *Пусть E замкнутое подмножество плоскости. Классом Гёльдера $\Lambda^\alpha(E)$ будем называть пространство функций на E, для которых конечна норма*

$$||f|| = \sup_{z \in E}\{|f(z)|\} + \sup_{z_1 \ne z_2} \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть G область в комплексной плоскости. Аналитическим классом Гёльдера $\Lambda^\alpha_a(G)$ назовем подпространство пространства $\Lambda^\alpha(\overline{G})$, состоящее из функций, аналитических в области G.

Определение 1.6. *Замкнутое множество E, содержащееся в замыкании области G, назовем интерполяционным для пары пространств $\Lambda^\alpha_a(G)$, $\Lambda^\alpha(E)$, если следы функций из первого пространства в точности заполняют второе. В этом случае говорят, что на множестве E имеет место свободная интерполяция.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 1.7. *Пусть S – обобщенная полоса, E – замкнутое подмножество в $\overline{S}$, $0 < \alpha < 1$. Множество E является интерполяционным для пары пространств $\Lambda^\alpha_a(G)$, $\Lambda^\alpha(E)$ тогда и только тогда, когда множество $E \cap S$ редкое, а множество $E \cap \partial S$ локально пористое.*

Опишем план доказательства.

1. Расширение исходной обобщенной полосы таким образом, чтобы для любой точки исходной полосы расстояние от нее до множества E было эквивалентно расстоянию от этой точки до границы расширенной полосы.
2. Разбиение исходной полосы на дизъюнктные области Лаврентьева.
3. Построение внешней функции, модуль которой эквивалентен расстоянию от точки до границы.
4. Доказательство необходимости условий теоремы.
5. Построение оператора продолжения.

Доказательство аналогичного утверждения для стандартной полосы [7] проходило по такому же плану. Но первые два пункта были там тривиальны, а третий получался из простых оценок явно заданного конформного отображения. В рассматриваемой ситуации основные усилия будут направлены на реализацию первых трех пунктов плана. После этого доказательство теоремы (пункты 4 и 5) проходит практически так же, как и в работе [7], поэтому в этой части мы ограничимся перечислением ряда важных оценок, чтобы показать необходимые модификации соответствующих утверждений.

Реализация первого пункта плана проходит в два этапа. На первом решается локальная задача – для фиксированной граничной дуги строится эквивалентная дуга. Конструкция эта приведена в §2. Отметим, что все построения основаны на элементарном геометрическом анализе кривой, удовлетворяющей условию Лаврентьева, и требуют достаточно кропотливого анализа. Второй этап построения проходит после описания разбиения обобщенной полосы на области Лаврентьева и сводится к замене каждой дуги дополнения множества E на эквивалентную дугу. Возможность разбиения обобщенной полосы на области Лаврентьева доказана в §3. Техника и стиль доказательства здесь те же, что и в §2. Четвертый параграф, помимо завершения конструкции расширения полосы, содержит еще одно важное построение – для каждой точки обощенной полосы строится "симметричная" точка (расстояние от любой точки границы до пары симметричных точек эквивалентно). Следующий, пятый параграф воспроизводит ряд известных [2, 7] технических оценок, которые вместе с конструкцией симметричной точки позволяют построить внешнюю функцию, отвечающую третьему пункту плана доказательства.

Доказательство необходимости условий теоремы "наследуется" из работы [4] и не требует никаких новых шагов. Завершаются рассуждения построением оператора продолжения из пространства $\Lambda^\alpha(E)$ в пространство $\Lambda^\alpha_a(G)$. Эта часть доказательства лишь небольшими техническими деталями отличается от случая стандартной полосы.

Сравнивая доказанные здесь результаты с тем, что было известно в этом направлении, можно отметить следующее: наличие симметрии относительно кривой является темой многих исследований. Укажем только на те работы, которые ближе всего подходят к предмету настоящей статьи. Это результаты Альфорса [8] и Дынькина [9]. Однако, построения эквивалентных дуг, основанные непосредственно на упомянутых результатах, не позволят гарантировать сохранение условия Лаврентьева. С другой стороны, построение эквивалентной дуги, по-видимому, можно получить как модификацию теоремы о том, что кривая Лаврентьева является билипшицевым образом окружности (Померенке [11]). Но даже при этой оговорке, интерес может представлять совершенно другая техническая база приводимого здесь доказательства, основанного, грубо говоря, на неравенстве треугольника, и тем самым допускающего широкие обобщения.

Важный элемент доказательства – интегральная формула для оператора интерполяции, – является в нашем случае несобственным интегралом. Для того, чтобы обеспечить сходимость этих интегралов, мы вначале проведем интерполяцию в подпространствах классов Гёльдера, образованных функциями убывающими на бесконечности.

Определение 1.8.

$$\Lambda^{\alpha,0}(E) = \{f \in \Lambda^{\alpha}(E),\ |zf(z)| \le C\}$$

$$\Lambda_a^{\alpha,0}(G) = \{f \in \Lambda_a^{\alpha}(G),\ |zf(z)| \le C\}.$$

§2. Построение эквивалентной дуги

Основная цель этого параграфа – доказательство следующего результата, играющего центральную роль в последующих конструкциях.

Теорема 2.1. *Пусть Γ – замкнутая кривая, удовлетворяющая условию Лаврентьева с постоянной C. Тогда для любой пары точек z_1, $z_2 \in \Gamma$ в любой из компонент связности существует дуга γ, соединяющая z_1 и z_2 и такая, что*

1) *для любой точки z, отделенной от дуги γ кривой Γ, выполнено неравенство*

$$\min(|z - z_1|, |z - z_2|) \le \frac{24C^2}{C-1}\,\mathrm{dist}(z, \gamma);$$

2) *кривые $\gamma \cup \Gamma(z_1, z_2)$, $\gamma \cup (\Gamma \setminus \Gamma(z_1, z_2))$ удовлетворяют условию Лаврентьева с постоянной $9^4 2^{17} \pi C^9$.*

Определение 2.2. *Дугу γ, описанную в теореме, мы будем называть дугой, эквивалентной дуге $\Gamma(z_1, z_2)$.*

Здесь и далее через $\Gamma(z_1, z_2)$ обозначается дуга кривой Γ, соединяющая точки z_1 и z_2.

В доказательстве теоремы мы постоянно будем пользоваться величиной $d(w) = \min\{|z_1 - w|, |z_2 - w|\}$, равной расстоянию до ближайшего конца дуги $\Gamma(z_1, z_2)$ (все доказательство можно рассматривать как исследование различных свойств этой “анизотропной дистанции”). Во всех случаях, где это возможно, мы будем предполагать, что $d(w) = |w - z_1|$.

Еще одно необходимое обозначение: $B(z,r) = \{w : |z-w| < r\}$ – круг в комплексной плоскости.

Как было отмечено во введении, доказательство теоремы является достаточно длинной цепью простых геометрических утверждений. Мы не приводим доказательства большинства из них, так как они носят чисто технический характер.

Предложение 2.3. *Пусть Γ – кривая, удовлетворяющая условию Лаврентьева с постоянной C, точки z_1, z_2, z_3 лежат на этой кривой, причем $z_2 \in \Gamma(z_1,z_3)$. Тогда справедливо неравенство*

$$C|z_1 - z_3| \geq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|.$$

Следствие 2.4. *Пусть Γ – кривая, удовлетворяющая условию Лаврентьева с постоянной C, точки z_1, $z_2, \dots, z_n$ лежат на этой кривой, причем точка z_k находится между z_{k-1} и z_{k+1} . Тогда справедлива оценка $C|z_k - z_m| \geq \sum_{j=k}^{m-1} |z_j - z_{j+1}|$.*

Следующее простое предложение составляет основу конструкции эквивалентной дуги. Оно гарантирует наличие достаточного свободного пространства вблизи дуги Γ. Эта свобода описывается в терминах круговых окрестностей.

Предложение 2.5. *Пусть Γ – кривая Лаврентьева с постоянной C, точки z_1, z_2, z_3 лежат на этой кривой, причем точка z_2 находится между двумя другими. Тогда справедливо соотношение $B(z_1, C_1|z_1 - z_2|) \cap B(z_3, C_1|z_3 - z_2|) = \varnothing$, где $C_1 = 1/C$.*

Отметим важное для нас простое следствие предложения 2.3.

Следствие 2.6. *Любая кривая γ, соединяющая точки z_1, z_2 внутри множества $\cup_{w\in\Gamma(z_1,z_2)} B(w, C_1 d(w))$, удовлетворяет условию $\mathrm{dist}(w,\gamma) \geq C_1 d(w)$, w – любая точка на $\Gamma \setminus \Gamma(z_1, z_2)$.*

“Половина” огибающей семейства кругов из вышеприведенного следствия могла бы служить “эквивалентной” дугой, но нужно еще обеспечить условие Лаврентьева. Для этого мы вынуждены рассмотреть более специальную конструкцию. Мы построим менее “мощное”, но лучше контролируемое покрытие, опишем достаточно узкую приграничную полосу его внешней огибающей и покажем, что “средняя линия” этой полосы удовлетворяет условию Лаврентьева.

Первый шаг в нашей конструкции – выбор удобной системы центров кругов $B(w, C_1 d(w))$, образующих конечнократное покрытие. В дальнейшем нам придется варьировать радиусы кругов покрытия, и естественной единицей "масштаба" станут круги $B(w, C_2 d(w))$, где $C_2 = C_1/8$, $C_1 = 1/C$.

В ходе построений нам необходимо учитывать, что основной "метрический параметр" – величина $d(w) = \min\{|z_1 - w|, |z_2 - w|\}$, – меняется от точки к точке. Поэтому важно уметь оценивать его значения в близких точках (транзитивность дистанции).

Предложение 2.7.

1) *(Оценка в соседней точке). Если* $|w_1 - w| < kd(w_1)$, *то*

$$(1-k)d(w_1) < d(w) < (1+k)d(w_1) \text{ и } \frac{d(w)}{1+k} < d(w_1) < \frac{d(w)}{1-k}.$$

2) *(Оценка для далеких точек). Если* $|w_1 - w| > kd(w_1)$, *то* $|w_1 - w| > \dfrac{k}{1+k} d(w)$.

3) *(Оценка для близких точек). Если* $|w_1 - w| < kd(w_1)$, *то* $|w_1 - w| < \dfrac{kd(w)}{1-k}$.

4) *(Оценка через промежуточную точку). Если* $|w_1 - w| < k_1 d(w_1)$ *и* $|w_2 - w| < k_2 d(w_2)$, *то* $\dfrac{1-k_2}{1+k_1} d(w_2) < d(w_1) < \dfrac{1+k_2}{1-k_1} d(w_2)$.

Доказательство. Все оценки непосредственно следуют из определения величины $d(w)$.

Перейдем к описанию покрытия кривой $\Gamma(z_1, z_2)$, в терминах которого будет проведено построение эквивалентной дуги. Важным свойством покрытия является его "локальная конечность". Нам потребуется дополнительный термин.

Определение 2.8. *Диадическими кольцами дуги* $\Gamma(z_1, z_2)$ *назовем множества*

$$K(m,1) = \{w : 2^{-m}|z_1 - z_2| \le |w - z_1| < 2^{-m+1}|z_1 - z_2|,$$

$$|w - z_1| \le |w - z_2|\}, \quad m \in Z.$$

Аналогично определим множества $K(m, 2)$.

Предложение 2.9. *На кривой* $\Gamma(z_1, z_2)$ *существует последовательность точек* $\{w_n\}_{n\in Z}$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) круги $B(w_n, C_2 d(w_n))$, $B(w_{n+1}, C_2 d(w_{n+1}))$ *не пересекаются;*

2) круги $B\big(w_n, \frac{8}{3}C_2 d(w)\big)$ *образуют покрытие кривой* $\Gamma(z_1, z_2)$*;*

3) если $w \in \Gamma$, $t \notin \bigcup_k B(w_k, 3C_2 d(w_k))$*, то* $|t - w| \geq \frac{C_2}{3+8C_2} d(w)$*;*

4) если $t \notin \bigcup_k B(w_k, 3C_2 d(w_k))$, $t \in B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, $w \in \Gamma$*, то* $|t - w| \geq \frac{1}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2} C_2 d(t)$.

5) любой круг системы $\{B(w_n, 4C_2 d(w_n))\}$, $n \in Z$*, может пересекаться не более чем с* $2C_2^{-1}(1 - 4C_2)^{-1}$ *кругами этой системы.*

6) $|w_n - w_{n+m}| \geq C_1^2 \Big(d(w_n) + 2\Big(\sum\limits_{j=1}^{m-1} d(w_{n+j})\Big) + d(w_{n+m})\Big)$*;*

7) число кругов $\{B(w_n, 4C_2 d(w_n))\}$*, имеющих общие точки с диадическим кольцом* $K(m, j)$*, не превосходит* $9C_2^{-4}$.

Доказательство. Определим центры кругов следующей процедурой. Выберем $w_0 \in \Gamma$ так, что

$$|w_0 - z_1| = |w_0 - z_2| = \max\{d(w) : w \in \Gamma(z_1, z_2)\}.$$

Затем выберем точку $w_1 \in \Gamma(w_0, z_2)$ такую, что это – первая точка (при движении от w_0 к z_2), для которой круг $B(w, C_2 d(w))$ не пересекает круг $B(w_0, C_2 d(w_0))$, то есть $C_2(d(w_0)+d(w_1)) = |w_0 - w_1|$. Таким же образом выберем точку $w_2 \in \Gamma(w_1, z_2)$ и т.д.

Аналогично построим последовательность $\{w_{-n}\}$ для дуги $\Gamma(z_1, w_0)$. Ясно, что эта последовательность удовлетворяет условию пункта 1.

Покажем, что семейство кругов $\{B(w_n, \frac{8}{3}C_2 d(w_n))\}_{n\in Z}$ образует покрытие дуги $\Gamma(z_1, z_2)$. Если бы это было не так, то существовала бы точка $w \in \Gamma(w_n, w_{n+1})$ такая, что $|w_n - w| > \frac{8}{3}C_2 d(w_n)$. В то же время из определения последовательности $\{w_n\}$ вытекает оценка $|w_n - w| < C_2(d(w_n) + d(w))$. Это неравенство гарантирует, что $d(w) \leq d(w_n)\frac{1+C_2}{1-C_2}$ и, далее, что

$$|w_n - w| \leq \left(1 + \frac{1 + C_2}{1 - C_2}\right) C_2 d(w_n).$$

Сопоставляя полученные оценки величины $|w_n - w|$, получаем неравенство $C_2 > \frac{1}{4}$, но по определению $C_2 = \frac{1}{8C} < \frac{1}{4}$. Следовательно, наше предположение неверно, и круги

$$\left\{B\left(w_n, \frac{8}{3}C_2 d(w_n)\right)\right\}_{n\in Z}$$

образуют покрытие дуги $\Gamma(z_1, z_2)$. Утверждение 2 доказано.

Проверим утверждение 3. Из утверждения 2 вытекает существование числа k такого, что $w \in B(w_k, \frac{8}{3}C_2 d(w_k))$. Тогда принятые условия гарантируют неравенство $|w-t| > \frac{1}{3}C_2 d(w_k)$, а предложение 2.7 дает оценку $d(w_k) > \frac{3}{3+8C_2}d(w)$. Объединяя эти неравенства, получим утверждение 3.

Докажем утверждение 4. Из утверждения 2 следует, что найдется точка w_k такая, что $w \in B(w_k, \frac{8}{3}C_2 d(w_k))$ и по условию $t \notin B(w_k, 3C_2 d(w_k))$. Следовательно,

$$|t-w| > \frac{1}{3}C_2 d(w_k). \tag{2.1}$$

Рассмотрим несколько возможных ситуаций.

Если $n = k$, то достаточно продолжить оценку (2.1) неравенством $d(w_n) \geq \frac{d(t)}{1+4C_2}$, вытекающим из пункта 1 предложения 2.7, чтобы получить

$$|w-t| > \frac{C_2 d(t)}{3(1+4C_2)}. \tag{2.2}$$

Если $n \neq k$ и $|w-t| \geq |t-w_n|$, то оценка пункта 2 предложения 2.7 дает неравенство $|t-w_n| > \frac{3C_2}{1+3C_2}d(t)$, т.е.

$$|w-t| > \frac{3C_2}{1+3C_2}d(t). \tag{2.3}$$

Остается рассмотреть случай, когда $n \neq k$ и $|w-t| \leq |t-w_n|$. Согласно неравенству (2.1), достаточно оценить $d(t)$ сверху через $d(w_k)$, что мы и проделаем за несколько шагов. Сперва воспользуемся неравенством треугольника и сделанными предположениями:

$$|t-w_k| \leq |t-w| + |w-w_k| \leq |t-w_n| + |w-w_k| \leq$$

$$\leqslant 4C_2 d(w_n) + \frac{8}{3}C_2 d(w_k).$$

Предложение 2.7 (пункт 1) позволяет оценить $d(w_n)$ через $d(t)$ и получить оценку

$$|t-w_k| \leq \frac{4C_2}{1-4C_2} d(t) + \frac{8}{3} C_2 d(w_k).$$

Положим для определенности, что $d(w_k) = |w_k - z_1|$, тогда

$$d(t) \leq |t-z_1| \leq |t-w_k| + |w_k - z_1| \leq$$

$$\leq \Big(\frac{4C_2}{1-4C_2} d(t) + \frac{8}{3} C_2 d(w_k)\Big) + d(w_k).$$

Остается переписать полученную оценку в виде

$$d(t) \leq \frac{3+8C_2}{3} \frac{1-4C_2}{1-8C_2} d(w_k).$$

Теперь мы можем завершить оценку для $|t-w|$ в рассматриваемом случае:

$$|t-w| > \frac{C_2}{3+8C_2} \frac{1-8C_2}{1-4C_2} d(t).$$

Объединяя полученную оценку и оценки (2.2), (2.3), получим

$$|t-w| \geq \min\Big(\frac{1}{3+8C_2} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}, \frac{1}{3(1+4C_2)}, \frac{3}{1+3C_2}\Big) C_2 d(t) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2} C_2 d(t).$$

Утверждение доказано.

Докажем утверждение пункта 5. Фиксируем произвольный круг $B(w_n, 4C_2, d(w_n))$ и предположим, что он пересекается с кругами $B(w_{n_k}, 4C_2 d(w_{n_k}))$, где $k = 1, 2, \dots, M$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_M$. Оценим длину кривой $\Gamma(w_{n_1}, w_{n_M})$. Имеем

$$|\Gamma(w_{n_1}, w_{n_M})| \geq \sum_{k=n_1}^{n_M - 1} |w_k - w_{k+1}|.$$

В силу утверждения 1

$$|\Gamma(w_{n_1}, w_{n_M})| \geq C_2 \sum_{k=n_1}^{n_M - 1} (d(w_k) + d(w_{k+1})).$$

Ослабим неравенство, оставив в сумме только слагаемые, отвечающие точкам w_{n_k}, $k=1,2,\dots,M$, и воспользуемся оценкой из пункта 1 предложения 2.7: $d(w_{n_k}) \geq (1-4C_2)d(w_n)$. В итоге получим

$$|\Gamma(w_{n_1}, w_{n_M})| \geq MC_2(1-4C_2)d(w_n).$$

По условию Лаврентьева справедлива оценка $C|w_{n_1} - w_{n_M}| \geq |\Gamma(w_{n_1}, w_{n_M})|$. Кроме того, из сделанных предположений вытекает неравенство $|w_{n_1} - w_{n_M}| < 8C_2 d(w_n)$. Следовательно, $8C_2C \geq MC_2(1-4C_2)$. Так как по определению $C_2 = 1/(8C)$, то $M < \frac{16C^2}{2C-1}$. Утверждение доказано.

Чтобы доказать неравенство утверждения 6, напомним, что по построению соседние точки хорошо разделены: $|w_p - w_{p+1}| = C_1(d(w_p)+d(w_{p+1}))$, а затем воспользуемся условием Лаврентьева и тем, что дуга длиннее хорды. В итоге получим оценку

$$\begin{aligned}|w_n - w_{n+m}| \geq C_1|\Gamma(w_n, w_{n+m})| =\\ = C_1\sum_{j=0}^{m}|\Gamma(w_{n+j}, w_{n+j+1})| \geq\\ \geq C_1^2\sum_{j=0}^{m}(d(w_{n+j}) + d(w_{n+j+1})) =\\ = C_1^2\Big(d(w_n) + 2\Big(\sum_{j=1}^{m-1} d(w_{n+j})\Big) + d(w_{n+m})\Big).\end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Для доказательства утверждения 7 оценим вначале число центров кругов $B(w_n, 4C_2d(w_n))$, которые могут попасть в диадическое кольцо $K(m,1)$. Из утверждения 6 следует, что $|w_n - w_k| \geq C_1^2(d(w_n) + d(w_k))$, а из определения диадических колец ясно, что $d(w) \geq 2^{-m}|z_1 - z_2|$ для $w \in K(m,1)$. Следовательно, если $w_n, w_k \in K(m,1)$, то $|w_n - w_k| \geq C_1^2 2^{-m+1}|z_1 - z_2|$ и, значит, круги радиуса $C_1^2 2^{-m}|z_1 - z_2|$ с центрами в точках w_m не пересекаются. Оценка для числа точек w_m в кольце $K(m,1)$ вытекает теперь из отношения площадей кольца и кругов, которое не превосходит $\frac{3}{C_1^4}$. Чтобы установить окончательную оценку, покажем, что круги с центрами в кольцах $K(m+2,1)$, $K(m-2,1)$ уже не пересекаются с кольцом $K(m,1)$. Действительно, если $w \in K(m-2,1)$, то $d(w) = |z_1 - w| \geq 2^{-m+2}|z_1 - z_2|$ и, следовательно,

$$\operatorname{dist}\big(z_1, B(w, 4C_2 d(w))\big) \geq$$
$$\geqslant 2(1-4C_2)2^{-m+1}|z_1 - z_2| > 2^{-m+1}|z_1 - z_2|,$$

так как по определению $C_2 < 1/8$, откуда $B(w, 4C_2 d(w)) \cap K(m,1) = \varnothing$. Такое же рассуждение проходит и для кольца $K(m+2,1)$, а значит центры всех кругов, пересекающих кольцо $K(m,1)$, лежат в объединении колец $K(m+1,1)$, $K(m,1)$, $K(m-1,1)$. Остается воспользоваться оценкой числа центров в каждом из колец. Предложение доказано.

В дальнейшем нам потребуется оценка, объдиняющая неравенства пунктов 3 и 4 из предложения 2.9.

Следствие 2.10. *Пусть точка t находится внутри множества*

$$\Big(\bigcup_{n\in Z} B(w_n, 4C_2 d(w_n))\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n\in Z} B(w_n, 3C_2 d(w_n))\Big).$$

Тогда выполнено следующее условие отделимости

$$|t - w| \geq C_2 \frac{1}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}(d(t) + d(w))$$

для любой точки $w \in \Gamma$.

Доказательство. Если $w \in \Gamma(z_1, z_2)$, то оценки пунктов 3, 4 предложения 2.9 гарантируют неравенство

$$|t - w| \geq \frac{1}{2}\Big(\frac{C_2}{3+8C_2} d(w) + \frac{C_2}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2} d(t)\Big) \geq$$
$$\geq \frac{C_2}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}(d(t) + d(w)).$$

Рассмотрим другой случай: $w \in \Gamma \setminus \Gamma(z_1, z_2)$. По условию найдется номер n такой, что $t \in B(w_n, 4C_2 d(w_n))$. Напомним, что по предложению 2.5 круги $B(w_n, 8C_2 d(w_n))$ и $B(w, 8C_2 d(w))$ не пересекаются, тогда тем же свойством обладают круги $B(w, 8C_2 d(w))$ и $B(t, 4C_2 d(w_n))$. Следовательно, $|t - w| \geq 4C_2(d(w) + d(w_n))$. Для продолжения оценки воспользуемся неравенством $(1-4C_2)d(t) \leq d(w_n)$, вытекающим из предложения 2.7, и получим $|t - w| \geq 4C_2(1-4C_2)(d(w) + d(t))$. Остается заметить, что

$$\min\left(\frac{1}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}, 4(1-4C_2)\right) = \frac{1}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}.$$

Следствие доказано.

Теперь мы приступим к построению дуги, удовлетворяющей условию Лаврентьева и соединяющей точки z_1, z_2 внутри множества

$$\Big(\bigcup_{n\in Z} B(w_n, 4C_2 d(w_n))\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n\in Z} B(w_n, 3C_2 d(w_n))\Big).$$

Мы всегда будем одновременно строить пару эквивалентных дуг, находящихся по разные стороны от кривой Γ. В качестве начального приближения возьмем кривую γ_0, огибающую семейства кругов $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, $n \in Z$. Следствие 2.8 гарантирует выполнение условий отделимости, но кривая γ_0 может быть несвязной. Для наших целей естественно ограничиться "внешней" частью кривой γ_0. Обозначим через γ_1 границу неограниченной компоненты дополнения множества $\cup_{n\in Z} B(w_n, 4C_2 d(w_n))$. Замкнутая кривая γ_1 по-прежнему удовлетворяет условиям отделимости. Точки z_1, z_2 лежат на γ_1. Они не могут исчезнуть при устранении петель, так как в любой окрестности точки z_1 или z_2 содержатся точки из $\Gamma \setminus \Gamma(z_1, z_2)$, а вместе с каждой такой точкой – некоторая ее окрестность, не пересекающаяся с кругами $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, $n \in Z$. Но и для кривой γ_1 условие Лаврентьева может нарушаться из-за оставшихся "почти петель". Окончательная конструкция эквивалентной дуги γ основана на смещении дуг окружностей, входящих в кривую γ_1, на концентрические окружности чуть меньшего радиуса.

Мы построим полосу вдоль кривой γ_1, ширина которой эквивалентна расстоянию до ближайшей из точек z_1 или z_2, и при этом не имеющую самопересечений. Искомая кривая будет получена как "средняя линия" этой полосы.

Наши построения потребуют анализа структуры кривой γ_1. С этой целью введем вспомогательные определения.

Определение 2.11. *Точку на границе круга $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$ назовем активной, если она принадлежит кривой γ_1. Радиус, соединяющий активную точку с центром соответствующего круга, тоже назовем активным. Дугу на границе круга $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$ назовем активной, если она является компонентой связности пересечения кривой γ_1 и окружности $\partial B(w_n, 4C_2 d(w_n))$. Круг $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$ назовем активным, если он содержит хотя бы одну активную дугу. Сектор круга, опирающийся на активную дугу, будем называть* *активным; активным углом назовем угол, образованный двумя активными радиусами разных кругов, заканчивающимися в одной активной точке.*

Перечислим некоторые свойства активных элементов.

Предложение 2.12.

1) *Активная точка не может находиться внутри какого-либо из кругов* $B(w_n, 4C_2d(w_n))$.

2) *Активные дуги не пересекаются.*

3) *Число активных дуг на границе круга не больше числа* $2\pi(\frac{1+4C_2}{1-4C_2}+\frac{1}{2})$.

4) *Число активных дуг в любом диадическом кольце* $K_{m,1}$ *ограничено числом, не зависящим от* m.

5) *Кривая* γ_1 *является объединением активных дуг, не имеющих общих внутренних точек (это позволяет нам естественным путем определить соседние дуги).*

Доказательство. Мы приводим только доказательство утверждения 3. Остальные утверждния прямо следуют из определений. Предположим, что круг $B(w, 4C_2d(w))$ рассматриваемого покрытия имеет на своей границе N активных дуг. Рассмотрим вспомогательное покрытие границы этого круга дугами, конечные точки которых находятся в середине дуг дополнения к активным дугам. Выберем минимальную из получившихся дуг. Ее угловая мера не может превышать величины $\frac{2\pi}{N}$. Обозначим через z_1^*, z_2^* концы этой дуги, а через z_1, z_2 концы активной дуги, находящейся внутри рассматриваемой дуги. Ясно, что каждый из углов $\angle z_1^* w z_1$, $\angle z_2^* w z_2$ меньше, чем $\frac{2\pi}{N}$.

Из определения активных дуг следует, что конечная точка активной дуги находится на пересечении границ двух кругов рассматриваемого покрытия. Обозначим через w_1, w_2 центры кругов покрытия, которым принадлежат точки z_1 и z_2 соответственно. Рассмотрим ограничения на положение точки w_1. Круг $B(w_1, 4C_2d(w_1))$ не может содержать активную точку z_2 и, следовательно, w_1 лежит по ту же сторону от прямой w, $\frac{z_1+z_2}{2}$, что и точка z_1. Аналогичные рассуждения показывают, что точка w_1 лежит по ту же сторону от прямой w, z_1^*, что и точка z_1. Значит, точка w_1 находится внутри угла A_1, образованного лучами w, $\frac{z_1+z_2}{2}$, wz_1^*, при этом она не может находиться внутри круга

$B(w, 4C_2d(w))$, поскольку $z_1 \notin B(w_1, 4C_2d(w_1))$. По предложению 2.7 (пункт 4) $d(w_1) \geq \frac{1-4C_2}{1+4C_2}d(w)$, следовательно, точка w_1 не может принадлежать и кругу $B(z_1, 4C_2\frac{1-4C_2}{1+4C_2}d(w))$. Обозначим через z_1' точку "выхода" луча w, z_1^* из круга $B(z_1, 4C_2\frac{1-4C_2}{1+4C_2}d(w))$ (это крайнее положение точки w_1). Далее, обозначим через S_1 сегмент окружности $B(z_1', 4C_2\frac{1-4C_2}{1+4C_2}d(w))$ (с центром в крайней точке), отсекаемый прямой wz_1. Крайнее положение точки z_1' гарантирует, что сегмент S_1 лежит внутри круга $B(w_1, 4C_2d(w_1))$ при любом допустимом положении точки w_1. Ясно, что аналогичные рассуждения относительно точки w_2 дадут нам точку z_2' и сегмент S_2 с соответствующими свойствами.

Заметим, что круги $B(w_1, 4C_2d(w_1))$ и $B(w_2, 4C_2d(w_2))$ не могут иметь общих точек в угле $\angle z_1wz_2$. Иначе активная дуга z_1, z_2 оказалась бы на внутренней компоненте связности огибающей семейства кругов и, следовательно, не могла бы войти в кривую γ_1. Это означает, что сегменты S_1 и S_2 не могут пересекаться, в частности, выполненяется неравенство

$$|z_1' - z_2'| \geq 8C_2\frac{1-4C_2}{1+4C_2}d(w).$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что $\angle z_1^*wz_2^* \leq \pi/4$, тогда выполнено неравенство

$$|w - z_1'| \geq 4C_2\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{1-4C_2}{1+4C_2}\Big)d(w),$$

и аналогично для $|w - z_2'|$. Рассматривая треугольник $wz_1'z_2'$, мы получим оценку

$$|z_1' - z_2'| \leq 8C_2\Big(1 + \frac{1-4C_2}{1+4C_2}\Big)d(w)\arcsin\alpha,$$

где $\alpha = \angle z_1^*wz_2^*$. Полученные оценки для $|z_1' - z_2'|$ позволяют написать неравенство

$$\alpha \geq \frac{\frac{1-4C_2}{1+4C_2}}{1 + \frac{1}{2}\frac{1-4C_2}{1+4C_2}}.$$

Остается воспользоваться тем, что рассматриваемая дуга z_1^*, z_2^* была выбрана наименьшей из N дуг, образующих покрытие окружности, и следовательно $N \leq 2\pi(\frac{1+4C_2}{1-4C_2} + \frac{1}{2})$. Утверждение доказано.

Покажем, что активные точки хорошо отделены от кругов $B(w_n, 3C_2 d(w_n))$.

Предложение 2.13. *Если w – активная точка, то при любом n справедливо соотношение*

$$B(w, \frac{C_2}{1+4C_2} d(w)) \cap B(w_n, 3C_2 d(w_n)) = \varnothing.$$

Предложение 2.14. *Если t, t_* – активные точки и отрезок (t, t_*) пересекается с кривой Γ, то справедлива оценка*

$$|t - t_*| > 4C_3(d(t) + d(t_*)), \quad \text{где } \ C_3 = \frac{S_2}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}.$$

Теперь мы можем определить полосу, внутри которой будет построена кривая γ.

Определение 2.15. *Пусть $\gamma_1(t_1, t_2)$ – активная дуга круга $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$. Полосой активного сектора назовем множество $S(t_1, t_2|w_n)$, являющееся пересечением соответствующего активного сектора и объединения кругов $B(w, C_3 d(w))$, $w \in \gamma_1(t_1, t_2)$; здесь $C_3 = \frac{S_2}{3(1+4C_2)} \frac{1-8C_2}{1-4C_2}$ – постоянная из предложения 2.14. Средней линией полосы активного сектора назовем множество центров отрезков, образованных пересечениями радиусов сектора с полосой.*

Пусть t – вершина активного угла, т.е. активная точка, лежащая на пересечении двух окружностей $\partial B(w_n, 4C_2 d(w_n))$ и $\partial B(w_k, 4C_2 d(w_k))$. Полосой активного угла назовем пересечение этого угла с кругом $B(t, C_3 d(t))$. Средней линией полосы активного угла назовем окружность $\{w : |w - t| = \frac{1}{2} C_3 d(t)\}$.

Введенные термины позволяют нам определить основной объект нашего построения – кривую γ_2, – как объединение всех средних линий полос активных секторов и активных углов.

Будет показано, что γ_2 является объединением двух *эквивалентных дуг*, лежащих по разные стороны от исходной кривой.

Из определения полос активного угла еще не следует выполнение условий следствия 2.10, гарантирующего отделимость точек кривой γ_2, однако, аналог оценки сохраняется для γ_2.

Предложение 2.16. *Кривая γ_2 удовлетворяет следующим условиям отделимости:*

1) $|w - t| \geq \frac{C_3}{2+C_3}(d(w) + d(t))$ *для любых точек $w \in \Gamma$, $t \in \gamma_2$;*

2) $\operatorname{dist}(z,\gamma) \geq \frac{C_3}{2+C_3} d(z)$.

Здесь $z \notin \Gamma$, γ *– компонента кривой* γ_2, *отделенная от точки* z *кривой* Γ.

Доказательство. Из определения кривой γ_2 следует, что существует номер m такой, что на окружности $\partial B(w_m, 4C_2 d(w_m))$ найдется точка w_*, для которой $|t - w_*| = \frac{1}{2} C_3 d(w_*)$. Так как точка w_* находится на огибающей семейства кругов $B(w_k, 4C_2 d(w_k))$ и, значит, не входит ни в один из кругов $B(w_k, 3C_2 d(w_k))$, то для точек w, w_* выполнены условия следствия 2.10. Это составляет основу следующей серии оценок

$$\begin{aligned}
|w - t| &\geq |w - w_*| - |w_* - t| \geq \\
&\geq C_3(d(w) + d(w_*)) - \frac{1}{2} C_3 d(w_*) = \\
&= \frac{1}{2} C_3 (d(w) + d(w_*)) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} C_3 (d(w) + \frac{1}{1 + \frac{C_3}{2}} d(t)) \geq \\
&\geq \frac{C_3}{2 + C_3} (d(w) + d(t)).
\end{aligned}$$

Первая часть предложения доказана.

Вторая оценка следует из первой. Фиксируем точку z и найдем точку $t \in \gamma$ такую, что $|z - t| = \operatorname{dist}(z, \gamma)$. Обозначим через w точку пересечения отрезка $[z, t]$ и кривой Γ. Тогда оценка первой части следствия гарантирует неравенство

$$\begin{aligned}
|z - t| = |z - w| + |w - t| &\geq |z - w| + \frac{C_3}{2 + C_3} (d(w) + d(t)) \geq \\
&\geq \frac{C_3}{2 + C_3} (|z - w| + d(w)).
\end{aligned}$$

Чтобы завершить оценку, предположим для определенности, что $d(w) = |w - z_1|$. Тогда справедливы неравенства

$$d(z) \leq |z - z_1| \leq |z - w| + |w - z_1| = |z - w| + d(w).$$

Следовательно,

$$\operatorname{dist}(z, \gamma) \geq |z - t| \geq \frac{C_3}{2 + C_3} d(z).$$

Предложение доказано.

Чтобы убедиться в том, что γ_2 – искомая эквивалентная дуга, надо проверить условие Лаврентьева. Мы проделаем это по отдельности для "длинных" и для "коротких" дуг. Будет показано, что полосы активных элементов не пересекаются и, следовательно, точки на "длинных" дугах (средней линии полосы) достаточно хорошо разделены. Для "коротких" дуг будут проведены прямые вычисления, основанные на определении кривой γ_2. В основе доказательства лежит отмеченное выше простое свойство активной точки круга – она не может перекрываться кругами $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$. Сначала рассмотрим, как это проявляется на активных радиусах.

Предложение 2.17. *Если радиусы двух кругов пересекаются во внутренней точке, то хотя бы одна из двух конечных точек радиусов лежит внутри круга.*

Следствие 2.18. *Активные сектора не пересекаются.*

Предложение 2.19. *Полоса активного сектора и полоса активного угла не могут иметь общих внутренних точек.*

Доказательство. Предположим, что это утверждение неверно. Пусть $w \in S(t_1, t_2|w_n) \cap S(t|w_m, w_k)$ – общая точка полосы активного сектора и активного угла. Из наших определений следует, что найдется активная точка t_0 на дуге сектора $S(t_1, t_2|w_n)$, содержащей точку w.

Точка t_0 должна находиться близко от w. Если бы было $|t_0 - w| \geq |t - w|$, то $t \in B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, что невозможно для активной точки.

Рассмотрим случай $|t_0 - w| < |t - w|$. Заметим, что точка t_0 отделена от активных дуг, исходящих из точки t, активными радиусами $[w_m, t]$ и $[w_k, t]$, иначе один из них пересекся бы с активным радиусом $[w_n, t_0]$.

Покажем, что дуга $\Gamma(w_m, w_k)$ обязательно пересекает отрезок $[t, t_0]$. Ясно, что она обязательно пересечет прямую, содержащую этот отрезок. Но если бы пересечение проходило по лучу, исходящему из точки t и не содержащему точки t_0, то активные дуги, примыкающие к точке t, попали бы на внутреннюю компоненту связности кривой γ_0 и не попали бы в число активных дуг. Аналогичное рассуждение проходит и в отношении второго луча. Следовательно, существует точка w_0, принадлежащая множеству $\Gamma(w_m, w_k) \cap [t, t_0]$. Воспользуемся теперь предложением 2.14 для того, чтобы оценить снизу длину отрезка $[t, t_0] : |t - t_0| \geq C_3(d(t) + d(t_0))$.

Остается заметить, что предположение о пересечении полос дает оценку длины того же отрезка сверху, основанную непосредственно на определении полос: $|t - t_0| \leq |t - w| + |w - t_0| \leq \frac{C_3}{2}(d(t) + d(t_0))$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Предложение 2.20. *Полосы активных углов не пересекаются.*

Доказательство. Предположим, что это неверно. Пусть точка w лежит в пересечении полос активных внутренних углов $S(t_1|w_{n_1}, w_{m_1})$ и $S(t_2|w_{n_2}, w_{m_2})$. Пусть ещё, для определенности, $|w - t_1| \geq |w - t_2|$. Из определения активного угла видно, что круг $\{u : |u - w| < |w - t_1|\}$ делится отрезками $[t_1, w_{n_1}]$, $[t_1, w_{m_1}]$ на три компоненты связности, причем точка w находится в средней компоненте. Рассмотрим две возможности расположения точки t_2. Если точки w и t_2 находятся в разных компонентах связности, то легко проверить, что точка t_2 лежит внутри круга покрытия с центром в точке w_{n_1} или w_{m_1}, что невозможно для активной точки. Если же точки w и t_2 находятся в одной компоненте связности, то применима схема доказательства предыдущего предложения. Так же, как и там, можно доказать, что кривая $\Gamma(w_{n_1}, w_{m_1})$ пересекает отрезок $[t_1, t_2]$, и далее получить противоречие, сравнивая оценки длины этого отрезка, основанные на предложении 2.14 и определении 2.15. Предложение доказано.

Покажем, что определенная нами кривая γ_2 удовлетворяет условию Лаврентьева. Вначале проверим, что для достаточно хорошо отделенных точек это условие наследуется от исходной кривой Γ. С этой целью мы покажем, что, если дуга кривой начинается в диадическом кольце с номером m_1 и заканчивается в диадическом кольце с номером m_2, то она не может попадать в кольца со слишком малыми номерами (т.е. уходить слишком далеко).

Предложение 2.21. *Пусть t_1, $t_2 \in \gamma_2$, $t_* \in \gamma_2(t_1, t_2)$. Тогда номера m_j диадических колец, для которых $t_j \in K(m_j, 1)$, $j = 1, 2, *$, связаны соотношением $m - m_* \leq 1 + \log_2 C$; здесь $m = \min\{m_1, m_2\}$.*

Доказательство. Далее мы считаем, что $m_* \le m$, так как в противном случае утверждение очевидно. Всякая точка на кривой γ_2 принадлежит полосе активного сектора или угла и ей естественно соответствует активная дуга. Если мы будем двигаться по кривой γ_2 от точки t_1 к точке t_2 и брать при этом соответствующие активные дуги, то в результате получим последовательность активных дуг, лежащих на кривой γ_1 и образующих дугу $\gamma_1(v_1, v_2)$. Обозначим через $\{w_{n_p}\}$, $p = 1, \dots, r$, центры кругов, которым принадлежат эти активные дуги, причем нумеровать их будем в порядке следования активных дуг. Тогда $t_j \in B(w_{n_j}, 4C_2 d(w_{n_j}))$, $j = 1, *, r$. Предположим для определенности, что $n_1 < n_2$.

Рассмотрим вначале случай, когда $n_1 < n_* < n_2$. Это условие обеспечивает выполнение равенства

$$|\Gamma(w_{n_1}, w_{n_r})| = |\Gamma(w_{n_1}, w_{n_*})| + |\Gamma(w_{n_*}, w_{n_r})|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 2^{-m+1}|z_1 - z_2| \ge |w_{n_1} - w_{n_r}| &\ge C_1 |\Gamma(w_{n_1}, w_{n_r})| = \\ &= C_1 \left(|\Gamma(w_{n_1}, w_{n_*})| + |\Gamma(w_{n_*}, w_{n_r})| \right) \ge \\ &\ge C_1 \left(|w_{n_1} - w_{n_*}| + |w_{n_*} - w_{n_r}| \right) \ge 2C_1 2^{-m_*} |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, $m - m_* \le 1 - \log_2 C_1$, $(C_1 = C^{-1})$.

Рассмотим случай, когда $n_* < n_1 < n_2$. Наше рассуждение будет основано на том, что кривая Γ не имеет самопересечений и не может пересекаться с кривой $\gamma_1(v_1, v_2)$ ввиду условий отделимости. А с другой стороны, наше предположение говорит о наличии петли между ними. В "зазор" между $\gamma_1(v_1, v_2)$ и $\Gamma(w_{n_1}, w_{n_2})$ кривая Γ может проникать только через активные радиусы (w_{n_1}, v_1), (w_{n_2}, v_2). Поскольку точки w_n располагаются на кривой Γ достаточно часто, мы видим, что хотя бы в одном из кругов $B(w_{n_1}, 4C_2 d(w_{n_1}))$, $B(w_{n_2}, 4C_2 d(w_{n_2}))$ найдется точка с маленьким номером w_p, $p < n_*$ (ведь кривая Γ должна когда-то впервые войти в "зазор"). Теперь мы можем повторить рассуждение первой части доказательства применительно к точкам w_p, w_{n_*}, w_{n_2} (или w_{n_1}) и получить требуемую оценку. Случай, когда $n_1 < n_2 < n_*$, рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Следствие 2.22. *Если для пары точек t_1, t_2 на кривой γ_2 выполнено неравенство $|t_1 - t_2| \ge C_4(d(t_1) + d(t_2))$, то*

$$|\gamma_2(t_1, t_2)| \le 72\pi C C_4^{-1} C_2^{-4} \left(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 4C_2} \right) |t_1 - t_2|;$$

здесь C – постоянная из условия Лаврентьева для кривой Γ.

Доказательство. Пусть $t_1 \in K(m_1, 1)$, $t_2 \in K(m_2, 1)$. Тогда из предложения 2.21 следует, что дуга кривой $\gamma_2(t_1, t_2)$ лежит в объединении диадических колец $\bigcup_{m>M} K(m, 1)$, где $M = \min\{m_1, m_2\} - 1 - \log C$. Определение 2.15, следствие 2.17 и предложения 2.18, 2.19 гарантируют, что кривая $\gamma_2(t_1, t_2)$ лежит в дизъюнктном объединении полос активных секторов и углов. Рассмотрим множество всех кругов $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, содержащих точки кривой $\gamma_2(t_1, t_2)$. Каждый из них пересекается хотя бы с одним из диадических колец $K(m, 1)$ при $m > M$. В предложении 2.9 (пункт 7) показано, что такое кольцо может пересекаться не более, чем с $9C_2^{-4}$ кругами. Согласно предложению 2.12 (пункт 3) каждый круг может иметь на своей границе не более $2\pi(\frac{1+4C_2}{1-4C_2} + \frac{1}{2})$ активных дуг. Из определения 2.15 видно, что сумма всех дуг кривой, входящих в активные сектора круга $B(w_n, 4C_2 d(w_n))$, не превосходит $8\pi C_2 d(w_n)$, а длина частей, входящих в каждый активный угол, не больше $\pi C_3 d(w_n)$, причем число таких углов не превосходит $4\pi(\frac{1+4C_2}{1-4C_2} + \frac{1}{2})$. С учетом того, что $d(w_n) \le 2^{-m}|z_1 - z_2|$ в кольце $K(m, 1)$, длина части кривой $\gamma_2(t_1, t_2)$ в этом кольце не превосходит числа

$$72\pi C_2^{-4} \left(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 44C_2} \right) 2^{-m} |z_1 - z_2|.$$

Суммируя по всем кольцам, получим оценку

$$|\gamma_2(t_1, t_2)| \le 72\pi C_2^{-4} \left(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 4C_2} \right) 2^{-M+1} |z_1 - z_2| \le$$
$$\le 72\pi C_2^{-4} \left(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 4C_2} \right) C 2^{-m_*+1} |z_1 - z_2|;$$

здесь $m_* = \min\{m_1, m_2\}$. Остается заметить, что по условию $|t_1 - t_2| \ge C_4(d(t_1) + d(t_2))$ и, следовательно, $|t_1 - t_2| \ge C_4 2^{-m_*+1} |z_1 - z_2|$, т.е.

$$|\gamma_2(t_1, t_2)| \le 72\pi C_2^{-4} \left(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 4C_2} \right) C C_4^{-1} |t_1 - t_2|.$$

Следствие доказано.

Покажем теперь, что, если две точки на кривой γ_2 достаточно близки, то структура кривой хорошо контролируется, и условие Лаврентьева для такой пары выполняется.

Предложение 2.23. *Если пара точек t_1, $t_2 \in \gamma_2$ удовлетворяет неравенству*

$$|t_1 - t_2| \le \frac{C_3}{16C}(d(t_1) + d(t_2)),$$

то для этих точек выполнено условие Лаврентьева $|\gamma_2(t_1, t_2)| \le \pi\sqrt{2}|t_1 - t_2|$.

Доказательство. Покажем вначале, что длина кривой γ_2 внутри активного угла не может быть слишком мала. Пусть u_1, u_2 – конечные точки дуги γ_2 внутри $S(t|w_n, w_m)$. По определению

$$|t - w_n| = 4C_2 d(w_n), \qquad |t - w_m| = 4C_2 d(w_m).$$

По предложению 2.9 (пункт 6) $|w_n - w_m| \ge C_1^2(d(w_n) + d(w_m))$. Пусть R – радиус окружности, описанной вокруг треугольника с вершинами t, w_n, w_m, тогда $|w_n - w_m| = 2R\sin\alpha$, где $\alpha = \angle w_n t w_m$. Ясно, что

$$R < |t - w_n| + |t - w_m| < 4C_2(d(w_n) + d(w_m)),$$

т.е.

$$\sin\alpha = \frac{|w_n - w_m|}{2R} \ge \frac{C_1^2(d(w_n) + d(w_m))}{4C_2(d(w_n) + d(w_m))} = \frac{1}{2C} \qquad (2.4)$$

и, следовательно, $|\gamma_2(u_1, u_2)| = \alpha\frac{C_3}{2}d(t) \ge \frac{C_3}{4C}d(t)$.

Докажем теперь, что если $t \in \gamma_2$, то круг $B(t, \frac{C_3}{8C}(1 - \frac{C_3}{2}))$ содержится в объединении полосы одного активного сектора и двух полос соседних активных углов. По построению, активные углы и сектора чередуются, поэтому достаточно проверить, что такой круг не может пересекать оба граничных радиуса активного угла. Точка $t \in \gamma_2$, принадлежащая активному углу, лежит на окружности радиуса $\frac{C_3}{2}d(t_*)$ (здесь t_* – вершина активного угла). Наибольшее из расстояний от точки t до границ сектора не может быть меньше величины $\frac{C_3}{2}d(t_*)\sin\frac{\alpha}{2}$, где α – угол при вершине сектора. Оценка (2.4) показывает, что это расстояние больше, чем $\frac{C_3}{8C}(1-\frac{C_3}{2})$. Следовательно, при любом выборе точки t круг $B(t,\frac{C_3}{8C}(1-\frac{C_3}{2}))$ не может пересекать оба граничных радиуса активного угла.

Проведем оценки длин дуг кривой γ_2, лежащих в одном активном элементе. Пусть u_1, $u_2\in\gamma_2\cap S(t|w_n,w_m)$, здесь мы просто оцениваем длину дуги через длину стягивающей ее хорды: $|\gamma_2(u_1,u_2)|\le\frac{\pi}{2}|u_1-u_2|$. Рассмотрим случай активного сектора u_1, $u_2\in\gamma_2\cap S(t_1,t_2|w_n)$, на этот раз дуга кривой γ_2 лежит между двух окружностей

$$\Big\{|z-w_n|=4C_2d(w_n)-\frac{C_3}{2}d(t_1)\Big\}\quad\text{и}\quad\Big\{|z-w_n|=4C_2d(w_n)-\frac{C_3}{2}d(t_2)\Big\},$$

причем изменяется очень плавно. Предыдущие оценки останутся справедливы в этом случае, если мы удвоим постоянную в неравенстве, т.е. $|\gamma_2(u_1,u_2)|\le\pi|u_1-u_2|$.

Перейдем к проверке условия Лаврентьева для точек $t_1,t_2\in\gamma_2$, удовлетворяющих условию

$$|t_1-t_2|\le\frac{C_3}{16C}(d(t_1)+d(t_2)).$$

Предположим для определенности, что $d(t_1)\ge d(t_2)$. Тогда, используя оценку из предложения 2.7, получим, что

$$t_1,\,t_2\in\gamma_2\cap B\Big(t_1,\frac{C_3}{8C}\Big(1-\frac{C_3}{2}\Big)d(t_1)\Big).$$

Как было доказано, круг $B\big(t_1,\frac{C_3}{8C}\big(1-\frac{C_3}{2}\big)d(t_1)\big)$ лежит в объединении не более чем трех соседних активных элементов. Радиус круга достаточно мал, и можно утверждать, что круг помещается в объединении полос тех активных элементов, которые он пересекает. Следствие 2.18, предложения 2.19 и 2.20 гарантируют, что полосы не могут иметь общих внутренних точек, поэтому точки t_1 и t_2 лежат на средней линии трех полос, с которыми пересекается круг. Разобьем дугу $\gamma_2(t_1,t_2)$ точками, лежащими на пересечениях с радиусами активных элементов. Обозначим эти точки через u_1, u_2. Образовавшиеся при этом части дуги (три или меньше) удовлетворяют условию Лаврентьева с постоянной π. Проведем в точках стыковки по паре взаимно перпендикулярных линий, для которых активные радиусы являются биссектрисами и таких, что части дуги лежат каждая в своем квадранте. Это разделение гарантирует выполнение неравенств типа $|t_1 - u_1| + |u_1 - u_2| \le \sqrt{2}|t_1 - u_2|$ и, окончательно,

$$|\gamma_2(t_1, t_2)| = |\gamma_2(t_1, u_1)| + |\gamma_2(u_1, u_2)| + |\gamma_2(u_2, t_2)| \le$$

$$\le \pi|t_1 - u_1| + |u_1 - u_2| + |u_2 - t_2| \le \pi\sqrt{2}|t_1 - t_2|.$$

Предложение доказано.

Завершение доказательства теоремы 2.1. Для любых точек z_1, $z_2 \in \Gamma$ мы можем построить контур γ_2 (определение 2.15). Разделим этот контур на две дуги точками z_1, z_2 и обозначим одну из них через γ. Из предложения 2.23 и следствия 2.22, в котором мы возьмем в качестве постоянной $C_4 = \frac{C_3}{16C}$, мы получаем, что кривая γ удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной

$$C_5 = 3^3 2^6 \pi \frac{3C^2}{2C_3} C_2^{-4} \Big(C_2 + \frac{\pi C_3}{1 - 4C_2} \Big).$$

Надо проверить, что кривая $\gamma_3 = \gamma \cup \Gamma(z_1, z_2)$ тоже удовлетворяет условию Лаврентьева. Условие теоремы и предыдущее рассуждение гарантируют выполнение этого условия для пар точек, принадлежащих $\Gamma(z_1, z_2)$ или γ. Остается рассмотреть случай, когда $t_1 \in \Gamma(z_1, z_2)$, $t_2 \in \gamma$. Полагая для определенности, что кратчайшая дуга проходит через точку z_1, мы можем гарантировать неравенства

$$|\gamma_3(t_1, t_2)| = |\Gamma(t_1, z_1)| + |\gamma(z_1, t_2)| \le$$

$$\le C|t_1 - z_1| + C_5|z_1 - t_2| \le C_5(d(t_1) + d(t_2)) \le C_5 C|t_1 - t_2|.$$

Последнее неравенство взято из предложения 2.3. Т.е. постоянная Лавретьева для кривой γ_3 не превосходит $C_5 C$.

Проведем такие же оценки для кривой $\gamma_4 = \gamma \cup \Gamma \setminus \Gamma(z_1, z_2)$. Единственное отличие здесь состоит в необходимости особо рассмотреть случай, когда дуга γ лежит между точек t_1 и t_2. Тогда

$$\begin{aligned} |\gamma_4(t_1, t_2)| = |\Gamma(t_1, z_1)| + |\gamma| + |\Gamma(z_2, t_2)| \le \\ \le C|t_1 - z_1| + C_5|z_1 - z_2| + C|z_2 - t_2| \le \\ \le C_5|\Gamma(t_1, t_2)| \le CC_5|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Следовательно, обе кривые удовлетворяют условию Лаврентьева с постоянной не выше $C^2 C_5 \le 9^4 2^{17} \pi C^9$.

Остается проверить оценку $d(z) \le \text{const dist}\,(z,\gamma)$ для любой точки z, отделенной от дуги γ кривой Γ. Для этого достаточно сослаться на предложение 2.16 (пункт 2), где установлено такое неравенство с $\text{const} = \frac{2+C_3}{C_3} \le \frac{24C^2}{C-1}$. Теорема доказана.

§3. Метод разбиения обобщенной полосы на области Лаврентьева

Покажем, что обобщенная полоса допускает равномерное разбиение на области Лаврентьева.

Теорема 3.1. *Обобщенная полоса S допускает разбиение на подмножества $\{S_n\}$ такие, что*

1) $S = \cup S_n$, $\operatorname{Int}(S_n) \cap \operatorname{Int}(S_m) = \varnothing$;

2) $\inf_n \operatorname{diam} S_n > 0$;

3) *каждая из областей S_n удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной* $\max\left\{2(C+1)^2+1, \frac{2\sqrt{2}(3C+1)}{C_0}\right\}$;

4) *в каждом из множеств S_n существует дуга $J \subset \partial S_n \cap \partial S$ такая, что* $|\partial S_n| \le 2\sqrt{2}(1+3C)|J|$.

Здесь и далее в ходе доказательства теоремы через C и C_0 мы обозначаем постоянные, введенные в определении 1.1 обобщенной полосы. Для обозначения дуги на границе области S_n, стягивающей точки z_1 и z_2, мы будем пользоваться символом $J(z_1, z_2, S_n)$. Как и в предыдущем разделе, мы не будем приводить доказательств утверждений в тех случаях, когда они являются чисто техническими.

Для описания разбиения мы введем необходимую терминологию. Части границы компоненты, совпадающие с границей обобщенной полосы S, будем называть *внешними*, а остальные – *внутренними частями границы.*

Для удобства ссылок введем название для разбиения, описанного в теореме.

Определение 3.2. *Последовательность множеств $\{S_n\}$, обладающую свойствами* (1)–(4) *из теоремы* 3.1, *будем называть регулярным разбиением на компоненты полосы S.*

Построение разбиения пройдет в несколько этапов. Начнем мы с тривиального решения этой задачи для стандартной полосы.

Поделим стандартную полосу на квадраты $K_j = \{z : j < \operatorname{Re} z < j+1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

Определение 3.3. *Назовем разбиением первого поколения $\{S_n^{(1)}\}$ множество всех компонент связности, возникающих при пересечении обобщенной полосы S с квадратами K_j.*

Главный недостаток такого разбиения – возможность появления сколь угодно малых компонент. Наши усилия будут направлены на объединение "маленьких" компонент с "большими" так, чтобы в ходе объединения не появлялось слишком длинных цепочек объединенных компонент.

Введем классификацию компонент разбиения.

Определение 3.4. *Компоненту разбиения назовем трансверсальной, если внутренние части ее границы имеются на обеих вертикальных сторонах квадрата, внутри которого она лежит. Остальные компоненты назовем односторонними. Две компоненты будем называть соседними, если у них имеется общий отрезок внутренней границы. Цепью односторонних компонент назовем объединение множества односторонних компонент такое, что любые две из них можно соединить последовательностью попарно соседних компонент, входящих в цепь. Максимальной цепью мы будем называть цепь, которая не имеет соседних односторонних компонент.*

Трансверсальные компоненты составят базу искомого разбиения (их "диаметр" почти равен 1). Размер односторонних компонент не ограничен снизу, и все они будут присоединены к подходящим трансверсальным компонентам. Следующие простые свойства компонент важны для дальнейших построений.

Предложение 3.5. 1) *Максимальная цепь располагается "вдоль" одного вертикального отрезка (стороны квадрата K_j).*

2) *Максимальная цепь на своей границе имеет хотя бы один внутренний элемент границы (связность полосы S).*

3) *По любому элементу своей внутренней границы максимальная цепь соседствует с трансверсальным элементом.*

Определение 3.6. *Сформируем разбиение второго поколения $\{S_n^{(2)}\}$ по следующим правилам:*

1) *объединим односторонние компоненты внутри каждого максимального семейства,*

2) *каждое такое семейство объединим с соседней трансверсальной компонентой; если таких компонент несколько, то выберем компоненту с наименьшим номером,*

3) *присоединим к тому, что получилось, все не задействованные на втором этапе трансверсальные элементы и заново перенумеруем полученные множества. Это и есть разбиение второго поколения.*

Предложение 3.7. $1 \leq \operatorname{diam} S_n^{(2)} \leq 3$.

Предложение 3.8. *Для любой компоненты разбиения второго поколения выполнены неравенства*

$$2 < |\partial S_n^{(2)}| < 2 + 6C.$$

Покажем теперь, что для некоторой части граничных дуг условие Лаврентьева выполняется. С этой целью рассмотрим по отдельности различные варианты размещения конечных точек дуги:

1) две точки на внешней границе компоненты,

2) две точки на внутренней границе,

3) одна точка на внешней границе, вторая на внутренней границе.

Мы покажем, что в первых двух случаях условие Лаврентьева выполняется. В третьем случае этого нельзя гарантировать, но можно показать, что точки внешней границы не могут находиться близко от внутренней границы с обеих сторон. Это дает возможность "исправить" внутреннюю границу так, что условие Лаврентьева будет выполнено и для пар точек третьего типа. При этом оценки для пар точек первого и второго типа сохранятся.

Предложение 3.9. *Пусть z_1, z_2 – точки на внешней границе компоненты разбиения $S_n^{(2)}$, тогда для них выполнено неравенство*

$$|J(z_1, z_2, S_n^{(2)})| \leq \frac{2+6C}{C_0}|z_1 - z_2|;$$

здесь C и C_0 – постоянные из определения обобщенной полосы.

Перейдем к рассмотрению второго случая – обе точки на внутренних участках границы компоненты.

Предложение 3.10. *Пусть z_1, z_2 – точки на внутренней границе компоненты разбиения $S_n^{(2)}$, тогда для них выполнено неравенство*

$$|J(z_1, z_2, S_n^{(2)})| \leq \frac{2+6C}{C_0}|z_1 - z_2|.$$

Доказательство. По построению компоненты разбиения внутренние части ее границы могут появляться только на вертикальных сторонах квадрата K_j, содержащего трансверсальную часть компоненты. Если точки находятся на разных сторонах квадрата, то расстояние между ними не меньше 1 и в силу предложения 3.8

$$|z_1 - z_2| \geq \frac{1}{2+6C}|\partial S_n^{(2)}| \geq \frac{1}{2+6C}|J(z_1, z_2, S_n^{(2)})|.$$

Рассмотрим другую возможность, когда обе точки лежат на одной стороне квадрата. Исключим тривиальный случай, когда обе точки находятся на одном отрезке.

Пусть точки лежат на разных отрезках (одной стороны квадрата). Тогда обозначим через z_1' граничную точку отрезка, отвечающего точке z_1, ближайшую к точке z_2. Аналогично определим точку z_2'. Если z_1' и z_2' лежат на разных кривых Γ_k, то, повторяя такую же часть доказательства предложения 3.9 и используя то, что отрезки $[z_1, z_1']$, $[z_2, z_2']$ составляют часть границы компоненты $S_n^{(2)}$, получим

$$|z_1 - z_2| = |J(z_1, z_1', S_n^{(2)})| + |z_1' - z_2'| + |J(z_2, z_2', S_n^{(2)})| \geq$$

$$\geqslant |J(z_1, z_1', S_n^{(2)})| + \frac{C_0}{2+6C}|J(z_1', z_2', S_n^{(2)})| + |J(z_2, z_2', S_n^{(2)})| \geq$$

$$\geqslant \frac{C_0}{2+6C}|J(z_1, z_2, S_n^{(2)})|.$$

Если же точки z_1' и z_2' лежат на одной кривой, то

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1' - z_2'| \geq S^{-1}|J(z_1', z_2', S_n^{(2)})|;$$

здесь мы использовали то, что точки z_1' и z_2' лежат на липшицевой кривой. Требуемая оценка получится теперь, как и в предшествующем случае, на основании равенства

$$|J(z_1, z_2, S_n^{(2)})| = |z_1 - z_1'| + |z_2 - z_2'| + |J(z_1', z_2', S_n^{(2)})|.$$

Последнее предполагает, что кратчайшая дуга, соединяющая точки z_1' и z_2' на границе $S_n^{(2)}$, содержится внутри аналогичной дуги, отвечающей паре точек z_1 и z_2. Эта оговорка не умаляет общности, так как в противном случае длина обеих кратчайших дуг эквивалентна длине границы всей компоненты, и неравенство остается справедливым. Предложение доказано.

Как было отмечено, в случае, когда точки лежат на разных частях границы компоненты, условие Лаврентьева может быть нарушено, и нам предстоит "исправить" соответствующие участки внутренней границы. Это потребует изучения свойств отрезков внутренней границы компонент, к которому мы сейчас и переходим. Напомним, что, по построению, отрезок внутренней границы – это отрезок на вертикальной стороне квадрата из семейства $\{K_j\}$, образованный пересечением стороны с полосой S. Часть этих отрезков "исчезает" при формировании компонент второго поколения, а все оставшиеся являются участками стыковки пары соседних компонент разбиения $S_n^{(2)}$, $S_m^{(2)}$. Рассмотрим предварительно некоторые свойства внутренних границ.

Предложение 3.11. *Длина любого внутреннего отрезка границы любой из компонент $S_n^{(2)}$ больше, чем $\min\{C_0, \frac{2}{C}\}$.*

Следствие 3.12. *Число отрезков внутренней границы компоненты $S_n^{(2)}$ не превосходит величины $\max\{C(3C+1),\ \frac{2(3C+1)}{C_0}\}$.*

Перейдем к описанию терминов, которые позволят выяснить, какие из участков отрезков внутренней границы должны быть модифицированы, и как можно реализовать требуемую модификацию. Обсуждаемая ниже конструкция опирается на то обстоятельство, что условие Лаврентьева запрещает точкам соседних компонент одновременно приближаться к отрезку внутренней границы.

Фактически мы заменим внутренние отрезки границы на вспомогательные дуги, обладающие нужными метрическими свойствами.

Определение 3.13. *Пусть $[z_1, z_2]$ – отрезок внутренней границы компоненты разбиения. Ближней зоной отрезка назовем объединение двух множеств: правой ближней зоны $R(z_1, z_2)$ и левой ближней зоны $L(z_1, z_2)$, каждая из которых является равнобедренным треугольником с основанием $[z_1, z_2]$ и углом при основании*

$\alpha = 2\arcsin(1/(S+1))$.

Не умаляя общности можно считать, что ближние зоны различных отрезков дизъюнктны. Для отрезков, находящихся на одной стороне квадрата K_j, это очевидно, а для отрезков, находящихся на разных сторонах, пересечение возможно только при $\alpha > \pi/4$. Увеличивая при необходимости постоянную C, мы исключим пересечения.

Ближняя зона представляет интерес, так как если две точки z_*,z^* лежат на ∂S и точка z_1 лежит между ними, то возможности их сближения существенно ограничены. Количественное выражение этого обстоятельства содержится в следующем предложении.

Предложение 3.14. *Пусть точки z_*, z, z^* таковы, что угол при вершине z образованного этими точками треугольника равен β, $\beta > \alpha > 0$. Тогда выполнено неравенство $C_1|z_* - z^*| \geq |z_* - z| + |z - z^*|$, где $C_1 = \max\{2, \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\}$.*

Введем теперь терминологию, с помощью которой будет дано описание модификации границы.

Определение 3.15. *Точку z, лежащую на границе компоненты, примыкающей к отрезку внутренней границы $[z_1, z_2]$, назовем критической, если она попадает в ближнюю зону отрезка. Такую точку будем называть правой (левой) критической точкой, если $\mathrm{Re}(z - z_1) > 0 (< 0)$.*

Определим круг критической точки $\{w : |w - z| < d(z)\sin(\alpha/2)\}$, здесь $d(z) = \min(|z - z_1|, |z - z_2|)$, α – постоянная из определения ближней зоны (напомним, что в этом случае $\sin(\alpha/2) = 1/(C+1)$). Для описания модификации границы нам потребуется сегмент критической точки

$$\{w : |w - z| < d(z)\sin(\alpha/2), \quad \mathrm{Re}(w - z_1)\,\mathrm{Re}(z - z_1) < 0\}.$$

Заметим, что критические точки – в точности те, для которых сегмент непуст. С другой стороны, из определения ближней зоны следует, что любой сегмент критической точки содержится внутри нее.

Предложение 3.16. *Пусть z – критическая точка компоненты $S_n^{(2)}$, соседствующей с компонентой $S_m^{(2)}$. Тогда сегмент точки z пересекается с границей компоненты $S_m^{(2)}$ только по точкам общего отрезка внутренней границы.*

Следствие 3.17. *Круги левых и правых критических точек (одного отрезка) не пересекаются.*

Доказательство. Ясно, что если критические точки принадлежат разным отрезкам, то их круги не пересекаются. Пусть z_* и z^* – правая и левая критические точки отрезка $[z_1, z_2]$. Можно считать, что обе критические точки находятся ближе к одному из концов отрезка, например, к z_1 (иначе рассматриваемое утверждение очевидно). Рассуждая далее, как в доказательстве предложения 3.16, мы получим, что $|J(z_*, z^*, \Gamma_k)| \geq |z_* - z_1| + |z_1 - z^*|$, а с другой стороны, из определения круга критической точки следует, что величина $|z_* - z^*|$ слишком мала и условие Лаврентьева нарушено. Утверждение доказано.

В окрестности точек, лежащих в ближней зоне отрезка, отрезок внутренней границы необходимо модифицировать. Опишем область, внутри которой будет происходить эта модификация.

Определение 3.18. *Треугольник критической точки – равнобедренный треугольник с основанием, совпадающим с основанием сегмента этой точки, и высотой, равной половине высоты сегмента. Зоной вариации отрезка внутренней границы $[z_1, z_2]$ назовем объединение двух равнобедренных треугольников с основанием $[z_1, z_2]$ и углами при основании $\alpha/4$, где α из определения 3.13 ближней зоны.*

Отметим важное для дальнейших построений обстоятельство: основания сегментов правых и левых критических точек не пересекаются, так как согласно следствию 3.17 не пересекаются круги таких критических точек.

Определение 3.19. *Локальная модификация отрезка внутренней границы, отвечающая критической точке z – это множество $I(z)$, полученное из отрезка внутренней границы, у которого основание треугольника критической точки заменено на его боковые стороны.*

Обозначим через $IR(z_1, z_2)$ "правую" огибающую всех локальных модификаций правых критических точек отрезка, аналогично определим $IL(z_1, z_2)$ – "левую" огибающую. Модификация отрезка внутренней границы (z_1, z_2) – это ломаная линия $I(z_1, z_2)$, полученная путем удаления из $IR(z_1, z_2) \cup IL(z_1, z_2)$ всех отрезков, являющихся основаниями треугольников критических точек.

Определение модификации корректно, поскольку согласно сделанному выше замечанию основания треугольников правых и левых критических точек не пересекаются. Выбор такого способа модификации границы оправдывается следующим ее свойством, которое по существу гарантирует отсутствие у компонент слишком узких перешейков.

Предложение 3.20. *Пусть* $[z_1, z_2]$ *– отрезок внутренней границы компоненты* $S_n^{(2)}$, z *– критическая точка на границе* $S_n^{(2)}$, *примыкающая к этому отрезку. Пусть, далее,* z_* *– точка на модифицированном отрезке* $I(z_1, z_2)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$|z - z_1| \le \sqrt{2}(C+1)|z - z_*|.$$

Установим еще одно важное свойство введенной модификации. Покажем, что кривая, возникающая при модификации отрезка, удовлетворяет условию Лаврентьева.

Предложение 3.21. *Пусть* z_*, z^* *– точки на модифицированном отрезке* $I(z_1, z_2)$, *отвечающем отрезку внутренней границы компоненты* $S_n^{(3)}$. *Пусть* z_0, z^0 *– проекции этих точек на отрезок внутренней границы. Тогда*

$$|J(z_*, z^*, I(z_1, z_2))| \le \sqrt{2}|z_0 - z^0|.$$

Перейдем к завершающему этапу построения компонент разбиения.

Определение 3.22. *Компонентами разбиения третьего поколения* $\{S_n^{(3)}\}$ *назовем множества, полученные из компонент второго поколения по следующему правилу: все отрезки внутренних границ компонент* $S_n^{(2)}$ *заменяются на отвечающие им модификации внутренней границы.*

Определение корректно, поскольку модификации внутренних границ были определены для пар компонент, имеющих общий граничный отрезок.

Предложение 3.23. *Компоненты разбиения третьего поколения удовлетворяют условию Лаврентьева с постоянной*

$$\max\Big\{2(C+1)^2 + 1, \frac{2\sqrt{2}(3C+1)}{C_0}\Big\}.$$

Доказательство. Зафиксируем пару точек z_*, $z^* \in S_n^{(3)}$. Рассмотрим пары граничных точек разных типов.

1. Если точки принадлежат разным граничным кривым, а именно, $z_* \in \Gamma_1$, $z^* \in \Gamma_2$, то определение обобщенной полосы и предложение 3.8 дают оценку

$$|z_* - z^*| \geq \frac{C_0}{2+6C}\big|\partial S_n^{(2)}\big|.$$

С учетом определения компонент третьего поколения и оценки предложения 3.21, мы имеем неравенство $|\partial S_n^{(2)}| \geq 2^{-1/2}|\partial S_n^{(3)}|$, следовательно,

$$|z_* - z^*| \geq \frac{C_0}{2 \cdot 2(1+3C)}\big|\partial S_n^{(3)}\big|.$$

Теперь остается заменить всю границу компоненты ее частью $J(z_*, z^*, S_n^{(3)})$. Это и даст нужную оценку.

2. Рассмотрим теперь случай, когда точки принадлежат внутренней части границы компоненты $S_n^{(3)}$, т.е. $z_* \in I(z_*^1, z_*^2)$, $z^* \in I(z_1^*, z_2^*)$. Более того, ограничимся пока случаем, когда точки z_*^1, z_1^* лежат на разных сторонах квадрата K_j. Напомним, что в наших определениях компонента третьего поколения формируется на основе трансверсальной компоненты первого поколения, которая представляет собой пересечение обобщенной полосы и единичного квадрата K_j. В принятых ограничениях из определения 3.19 модификации отрезка следует, что $|z_* - z^*| \geq 1 - 2\sin\alpha/2 = \frac{C-1}{C+1}$. Рассуждая далее как в пункте 1, мы получим в качестве постоянной Лаврентьева $\frac{2 \cdot 2(3C+1)(C+1)}{C-1}$.

3. Завершим рассмотрение случая, когда точки лежат на внутренней границе компоненты $S_n^{(3)}$, $z_* \in I(z_*^1, z_*^2)$, $z^* \in I(z_1^*, z_2^*)$, причем точки z_*^1, z_1^* лежат на одной стороне квадрата K_j. Заметим, что если отрезки $[z_*^1, z_*^2]$, $[z_1^*, z_2^*]$ совпадают, то требуемое утверждение доказано в предложении 3.21. В случае, когда отрезки различны, будем, для определенности, считать, что список z_*, z_*^1, z_1^*, z^* согласован с порядком следования на $\partial S_n^{(3)}$. Это соглашение позволяет написать равенство

$$J(z_*, z^*, S_n^{(3)}) = J(z_*, z_*^1, S_n^{(3)}) \cup J(z_*^1, z_1^*, S_n^{(3)}) \cup J(z_1^*, z^*, S_n^{(3)}).$$

Оценим длины дуг в объединении: первую и третью на основании предложения 3.21, а вторую по схеме первого пункта доказательства этого предложения. Получим:

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \sqrt{2}|z_* - z_*^1| + C\sqrt{2}|z_*^1 - z_1^*| + \sqrt{2}|z_1^* - z^*|.$$

Введем в рассмотрение точки z_*^0 и z_0^*, являющиеся проекциями точек z_* и z^* соответственно на вертикальную сторону квадрата K_j, содержащую точки z_*^1 и z_1^*. Это возможно согласно принятым условиям. Из определения 3.19 ближней модификации отрезка вытекают неравенства $|z_* - z_*^1| \leq \sqrt{2}|z_*^0 - z_*^1|$ и $|z^* - z_1^*| \leq \sqrt{2}|z_0^* - z_1^*|$. Объединим эти неравенства и воспользуемся тем, что точки z_*^0, z_0^*, z_*^1 и z_1^* лежат на одной прямой:

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq 2C\big(|z_*^0 - z_*^1| + |z_*^1 - z_1^*| + |z_1^* - z_0^*|\big) =$$

$$= 2C|z_*^0 - z_0^*| \geq 2C|z_* - z^*|.$$

4. Рассмотрим теперь случай, когда точки z_* и z^* лежат на внешней границе обобщенной полосы, причем на одной из ее компонент (будем считать, что на Γ_1). Как указывалось ранее, справедлива оценка

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \sqrt{2}|J(z_*, z^*, S_n^{(2)})| \leq \sqrt{2}|J(z_*, z^*, \Gamma_1)|.$$

Остается воспользоваться условием Лаврентьева для кривой Γ_1:

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \sqrt{2}C|z_* - z^*|.$$

5. Остается рассмотреть смешанный случай: z_* – лежит на внешней границе компоненты, $z^* \in I(z_1, z_2)$. Рассуждая как в предыдущем пункте доказательства, мы получим оценку

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \sqrt{2}C|z_* - z_1| + \sqrt{2}|z^* - z_1|.$$

Оценим второе слагаемое по неравенству треугольника $|z^* - z_1| \leq |z_* - z_1| + |z_* - z^*|$ и получим

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \sqrt{2}(C+1)|z_* - z_1| + \sqrt{2}|z_* - z^*|.$$

Если наши точки "далекие", т.е. $|z_* - z^*| \geq 1/(C+1)|z_* - z_1|$, то справедлива оценка

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \leq \left(\sqrt{2}(C+1)^2 + 1\right)|z_* - z^*|.$$

Если же точки “близкие” (верно противоположное неравенство), то мы попадаем в условия предложения 3.20 и с его помощью получим оценку

$$|J(z_*, z^*, S_n^{(3)})| \le \big(2(C+1)^2 + 1\big)\,|z_* - z^*|.$$

Чтобы завершить доказательство, надо выбрать из пяти полученных постоянных наибольшую. Видно, что таковыми могут быть постоянные, получившиеся в первом или последнем пункте доказательства. Предложение доказано.

Завершение доказательства теоремы 3.1. Покажем, что полученное разбиение $\{S_n^{(3)}\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы. По построению это разбиение покрывает обобщенную полосу, и его элементы не имеют общих внутренних точек. В предложении 3.23 доказано, что каждое из множеств $S_n^{(3)}$ удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной $\max\{2(C+1)^2+1, \frac{2\sqrt{2}(3C+1)}{C_0}\}$.

Остается проверить четвертое условие. Воспользуемся тем, что по построению каждая компонента третьего поколения содержит в себе трансверсальную компоненту первого поколения и тем самым дугу $J \subset \partial S$, длина которой не меньше 1. С другой стороны, из предложений 3.8 и 3.21 следует, что $|\partial S_n^{(3)}| \le 2\sqrt{2}(3C+1)$, т.е. получаем $|\partial S_n^{(3)}| \le 2\sqrt{2}(3C+1)|J|$. Теорема полностью доказана.

Предложение 3.24. *Множество* $E \cap \partial S_n^{(3)}$ *является пористым подмножеством множества* $\partial S_n^{(3)}$. *Постоянная в условии пористости не превосходит величины* $2C_p(M+1)$, *где* C_p *– постоянная из неравенства* (1.2), $M = \max\big\{C(3C+1), \frac{2(3C+1)}{C_0}\big\}$.

§4. Построение расширения и симметричной точки для обобщенной полосы

Здесь будет показано, что обобщенная полоса допускает расширение, связанное с произвольным замкнутым подмножеством своей границы. Это расширение по-прежнему остается обобщенной полосой, а расстояние от любой точки исходной полосы до выделенного подмножества ее границы эквивалентно расстоянию от этой точки до границы расширения.

Далее мы покажем, что для любой точки обобщенной полосы существует симметричная точка, т.е. точка в дополнении полосы такая, что расстояния от любой точки на границе полосы до выбранной точки и до ее симметричной точки эквивалентны. Оба эти свойства играют важную роль в оценках сингулярных интегралов, проводимых ниже.

Вначале мы покажем, что если на кривой, удовлетворяющей условию Лаврентьева, выделить систему дуг и заменить каждую из них на "эквивалентную" (т.е. удовлетворяющую некоторым естественным ограничениям), то полученная кривая тоже будет удовлетворять условию Лаврентьева.

Предложение 4.1. *Пусть* Γ *– кривая в комплексной плоскости, удовлетворяющая условию Лаврентьева* ($|\Gamma(z_1, z_2)| \leq C|z_1 - z_2|$), $E \subset \partial\Gamma$ *– замкнутое подмножество кривой,* $\{\Gamma_n\}$ *– дуги дополнения множества* E *на кривой* Γ*. Пусть задана система дуг* $\{\gamma_n\}$ *таких, что:*

1) *дуги* γ_n *удовлетворяют условию Лаврентьева с постоянной* C_**, не зависящей от выбора дуги;*

2) $\gamma_n \subset \bigcup_{t\in\Gamma_n} B(t, \frac{k}{C}d(t))$*; здесь* $d(t)$ *– расстояние от точки* t *до концов дуги* Γ_n*,* $0 < k < 1$*.*

Тогда кривая $\gamma = \cup_n \gamma_n$ *удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной* $\frac{5C_* C^2}{1-k}$*.*

Предложение 4.2. *Пусть* S *– обобщенная полоса,* E *– замкнутое подмножество ее границы. Тогда существует обобщенная полоса* S_1*, содержащая в себе полосу* S*, и такая, что для любой точки* $z \in S$ *выполнено неравенство* $\mathrm{dist}(z, \partial S_1) \leq \frac{8}{3C}\,\mathrm{dist}(z, E)$*.*

Доказательство. Согласно определению 1.1 обобщенной полосы справедливо равенство $\partial S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем $\mathrm{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) \leq C_0$, и каждая из граничных кривых удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной C. Обозначим через $\Gamma_{k,1}$ дуги дополнения множества E на кривой Γ_1. Теорема 2.1 позволяет для каждой из дуг $\Gamma_{k,1}$ построить эквивалентную дугу $\gamma_{k,1}$, удовлетворяющую условию Лаврентьева с постоянной $C_1 = 2^{12}3^5\pi C^9$. Теорема 2.1 позволяет строить эквивалентную дугу с любой из сторон кривой Γ_1, мы выберем дуги $\gamma_{k,1}$ так, чтобы кривая Γ_1 отделяла их от кривой Γ_2. Обозначим через γ_1 объединение $\bigcup_k \gamma_{k,1}$. Аналогичным образом построим кривую γ_2. Обобщенная полоса S находится между кривыми γ_1 и γ_2. Обозначим через S_1 множество всех точек, находящихся между построенными кривыми и покажем, что это – искомое множество.

Проверим сначала, что множество S_1 является обобщенной полосой. Условие разделенности границ просто наследуется, так как по построению $\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) \geq \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) \geq C_0$. Остается проверить условие Лаврентьева для построенных кривых. Это следует из предложения 4.1. Поскольку кривая Γ_1 удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной C, как было отмечено выше, каждая из кривых $\gamma_{k,1}$ удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной C_1, и по построению (теорема 2.1) $\gamma_{k,i} \subset \bigcup_{t \in \Gamma_{k,i}} B(t, \rho)$, где $\rho = \left(1 + \frac{C}{4(3C+1)(2C+1)}\right)\frac{d(t)}{C}$. Следовательно, выполнены все условия предложения 4.1 и, значит, кривая γ_1 удовлетворяет условию Лаврентьева с постоянной $2CS_1\frac{3C^2+C-1}{2C-1} \leq 2^{13}3^5\pi C^{11}$.

Для завершения доказательства остается проверить, что расстояние от любой точки $z \in S$ до множества E оценивается сверху через $\operatorname{dist}(z, \partial S_1)$. Фиксируем точку $z \in S$ и выберем на границе области ∂S_1 ближайшую к ней точку w, $|z - w| = \operatorname{dist}(z, \partial S_1)$. Пусть $z_0 \in [z, w] \cap \partial S_1$. Ясно, что такая точка существует, а если их несколько, то возьмем ту из них, которая находится ближе к точке w. Из определения точки w следует, что круг $B(z_0, |z_0 - w|)$ не содержит точек ∂S_1, т.е. $|z_0 - w| = \operatorname{dist}(z_0, \partial S_1)$. Начнем с проверки требуемой оценки для точки z_0. Пусть $\Gamma_{k,1}$ – та из дуг дополнения множества E, которой принадлежит точка z_0. Тогда $w \in \gamma_{k,i}$, так как если бы $w \in \gamma_{m,i}$, $m \neq k$, то дуга $\Gamma_{m,i}$ отделяла бы точку z_0 от точки w, что противоречит определению точки z_0. По построению (теорема 2.1) $w \notin B(z_0, \frac{3|z_* - z_0|}{8C})$, здесь через z_* обозначен ближайший к точке z_0 конец дуги $\Gamma_{k,1}$, т.е.

$$\operatorname{dist}(z_0, \partial S_1) = |z_0 - w| \geq \frac{3|z_* - z_0|}{8C} \geq \frac{3}{8C}\operatorname{dist}(z_0, E).$$

Вернемся к рассмотрению выбранной первоначально точки z. Напомним, что по определению $w \in \partial S_1$ – ближайшая точка, т.е. $|z - w| = \operatorname{dist}(z, \partial S_1)$, и z_* – ближайший к точке w конец дуги дополнения множества E, на котором она лежит. Обозначим через w_* ближайшую к точке z точку множества E. Чтобы проверить неравенство $\operatorname{dist}(z, \partial S_1) \leq \operatorname{const}\ \operatorname{dist}(z, E)$, нам достаточно оценить величину $|z - w|$ снизу через $|z - z_*|$. Докажем такое неравенство:

$$|z - w| = |z - z_0| + |z_0 - w| \geq |z - z_0| + \frac{3}{8C}|z_* - z_0| \geq \frac{3}{8C}|z_* - z|.$$

Т.е.

$$\operatorname{dist}(z, \partial S_1) = |z - w| \geq \frac{3}{8C}|z_* - z| \geq \frac{3}{8C}\operatorname{dist}(z, E).$$

Предложение доказано.

В дальнейшем нам потребуются разбиения, приспособленные к фиксированной точке.

Предложение 4.3. *Пусть S – обобщенная полоса, и S_1 некоторое ее расширение, построенное в предложении* 4.2, *z – произвольная точка из полосы S. Тогда существует разбиение полосы S_1 на регулярные компоненты $\{S_n^{(1)}\}$ (определение* 3.2*) такое, что* $\operatorname{dist}(z, \partial S_n^{(1)}) \geq \operatorname{const} \operatorname{dist}(z, E)$.

Доказательство. В предложении 4.2 доказано, что расширение S_1 обладает следующим свойством: $\operatorname{dist}(z, \partial S_1) \geq \frac{3}{8C} \operatorname{dist}(z, E)$. Пусть $\{S_n^{(0)}\}$ – разбиение обобщенной полосы S_1 на регулярные компоненты, построенное в теореме 3.1. Требуемое утверждение будет доказано, если мы установим, что для любой точки $w \in \partial S_n^{(0)}$, лежащей внутри полосы S_1, выполнено неравенство $|z - w| \geq \operatorname{const} \operatorname{dist}(z, E)$. Вообще говоря это неравенство может нарушаться, но только в том случае, если точка z окажется слишком близко от некоторой дуги внутренней границы. Из определений компонент регулярного разбиения (определения 3.3, 3.6 и 3.22) следует, что для фиксированной точки z неравенство $|z - w| \geq \operatorname{const} \operatorname{dist}(z, E)$ может нарушаться только для точек одной дуги внутренней границы. Предположим, что это происходит на некоторой внутренней дуге γ. В предложении 3.5 отмечено, что вдоль дуги γ стыкуются две компоненты регулярного разбиения. Обозначим их через $S_n^{(0)}$ и $S_m^{(0)}$. Исправим имеющееся разбиение, объединив в нем компоненты $S_n^{(0)}$ и $S_m^{(0)}$. Полученное разбиение обозначим $\{S_n^{(1)}\}$ и покажем, что оно искомое. Теперь расстояние от точки z до границы вновь образованной компоненты равно расстоянию от этой точки до множества E. Остается проверить, что новое разбиение удовлетворяет определению регулярного разбиения (определение 3.2). Ясно, что надо проверить только выполнение условия Лаврентьева для области $S_k^{(1)}$, которая является объединением компонент $S_n^{(0)}$ и $S_m^{(0)}$. Фиксируем пару точек t_1, $t_2 \in \partial S_k^{(1)}$ и обозначим через $J(t_1, t_2, S_k^{(1)})$ меньшую из дуг границы компоненты, стягивающих точки t_1, t_2.

Заметим, что если точки t_1, t_2 лежат на разных компонентах связности границы обобщенной полосы, то из определения 3.2 и предложения 3.8 следует, что

$$|t_1 - t_2| \geq C_0 \frac{1}{4+12C} |\partial S_k^{(1)}| \geq \frac{1}{4+12C} |J(t_1, t_2, S_k^{(1)})|.$$

Рассмотрим теперь случай, когда точки t_1, t_2 лежат на одной компоненте связности границы обобщенной полосы. Перечислим (последовательно) все точки дуги $J(t_1, t_2, S_k^{(1)})$, где происходит переход с внешней границы области $S_k^{(1)}$ на ее внутреннюю границу и обратно. Пусть это точки w_1, $w_2, \dots, w_N$. Для удобства записи обозначим $w_0 = t_1$, $w_{N+1} = t_2$. Тогда условие Лаврентьева, выполненное на границе обобщенной полосы (теорема 3.1) и на дугах внутренней границы (предложение 3.21), гарантируют оценку

$$|J(t_1, t_2, S_k^{(1)})| = \sum_{r=0}^{N} |J(w_r, w_{r+1}, S_k^{(1)})| \leq C_1 \sum_{r=0}^{N} |w_r - w_{r+1}|.$$

Предположим дополнительно, что все точки w_r лежат на одной компоненте связности границы обобщенной полосы S_1, тогда мы можем "перейти" с хорд на дуги границы S_1 и вновь воспользоваться условием Лаврентьева, при этом мы получим

$$|J(t_1, t_2, S_k^{(1)})| \leq \sum_{r=0}^{N} |J(w_r, w_{r+1}, S_1)| = C_1 |J(t_1, t_2, S_1)| \leq C_1^2 |t_1 - t_2|.$$

Если же наше дополнительное предположение не выполнено, то для точки t_1 существует ближайшая по движению вдоль дуги пара w_r, w_{r+1}, точки которой лежат на разных компонентах связности границы S_1. Аналогичная пара w_m, w_{m+1} существует и для точки t_2. Т.е. точки t_1, w_r, w_m, t_2 лежат на одной компоненте связности границы S_1, а w_{r+1} и w_{m+1} – на другой. Мы покажем, что в этом случае расстояние между точками t_1 и t_2 ограничено снизу абсолютной постоянной.

Начнем со случая, когда $|t_1 - w_r|$ и $|t_2 - w_m|$ меньше, чем $\frac{|w_r - w_m|}{4}$. Тогда $|t_1 - t_2| \geq |w_r - w_m| - |t_1 - w_r| - |t_2 - w_m| \frac{1}{2} |w_r - w_m|$. Остается заметить, что по построению точки w_r, w_m лежат либо на одной прямой, либо на противоположных сторонах единичного квадрата. В первом случае из предложения 3.11 вытекает оценка

$$|w_r - w_m| = |w_r - w_{r+1}| + |w_{m+1} - w_{r+1}| + |w_{m+1} - w_m| \geq 2C_0,$$

во втором – $|w_r - w_m| \geq 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда, например, $|t_1 - w_r| \geq \frac{|w_r - w_m|}{4}$. Воспользуемся оценкой предложения 2.3: $C_1|t_1 - t_2| \geq |t_1 - w_r| + |t_2 - w_r|$; здесь C_1 – постоянная Лаврентьева для обобщенной полосы S_1 (см. теорему 3.1). В рассматриваемой ситуации это дает оценку

$$|t_1 - t_2| \geq \frac{1}{4C_1}|w_r - w_m| \geq \frac{C_0}{2C_1}.$$

Рассуждая, как и выше со ссылкой на предложение 3.8, получим, что

$$|t_1 - t_2| \geq \frac{C_0}{2C_1}\frac{1}{4+12C}|\partial S_k^{(1)}| \geq \frac{C_0}{8C_1(4+3C)}|J(t_1, t_2, S_k^{(1)})|.$$

Предложение доказано.

Перейдем теперь к построению симметричных точек. По аналогии с полуплоскостью, дадим следующее определение.

Определение 4.4. *Пусть $z \in G$ и $z_* \in \mathbf{C} \setminus G$. Мы будем говорить, что точки z и z_** симметричны *относительно ∂G, если $\frac{1}{C_*}|z - w| \leq |z_* - w| \leq C_*|z - w|$ для любой точки $w \in \partial G$, причем постоянная C_* не зависит от выбора точки z.*

Задача построения симметричной точки по существу локальна (это видно из приводимой ниже конструкции). Главная ее часть – реализация оценки для ближайшей граничной точки. Подчеркнем, что мы не пытаемся строить симметрию как инволюцию, для нас важно только выполнение неравенства.

Предложение 4.5. *Пусть Γ – граница области G, удовлетворяющая условию Лаврентьева с постоянной C. Тогда для каждой точки $z \in G$ существует точка z^*, симметричная z относительно Γ.*

Доказательство. Фиксируем точку $z \in G$ и обозначим через w_0 ближайшую к z точку на Γ. Предположим, что для некоторых постоянных C_1 и C_2, не зависящих от выбора точки z, нам удалось найти точку z_* такую, что

$$\{u : |u - z_*| < C_1|z - w_0|\} \cap \Gamma = \varnothing, \quad |z - z_*| < C_2|z - w_0|. \qquad (4.1)$$

Отложим доказательство этого предположения и проверим, что такая точка z_* удовлетворяет определению симметричной точки. Начнем с проверки определения для точки w_0, в этом случае из предположений, сделанных о точках w_0, z_*, непосредственно следует оценка $|z_* - w_0| \geq \operatorname{dist}(z_*, \Gamma) \geq C_1|z - w_0|$, а с другой стороны, $|z_* - w_0| \leq |z_* - z| + |z - w_0| \leq (C_1 + 1)|z - w_0|$. В этом случае можно положить $C_* = \max\{C_1 + 1, 1/C_1\}$. Рассмотрим теперь точки $w_1 \in \Gamma$, для которых $|w_1 - z| < 2|z - z_*|$. Покажем, что в этом случае расстояния до симметричных точек эквивалентны $|z - z_*|$. Действительно,

$$
\begin{aligned}
|w_1 - z| &\geq \operatorname{dist}(z, \Gamma) = |z - w_0| \geq C_2^{-1}|z - z_*|,\\
|w_1 - z_*| &\leq |w_1 - z| + |z - z_*| \leq 3|z - z_*|,\\
|w_1 - z_*| &\geq \operatorname{dist}(z_*, \Gamma) \geq C_1^{-1}|z - w_0| \geq (C_2/C_1)|z - z_*|.
\end{aligned}
$$

Для точки w_1 условие симметрии выполнено с постоянной $C_* = \max\{\frac{C_2}{2C_1}, 3C_2\}$.

Рассмотрим другую возможность. Пусть $w_2 \in \Gamma$ и $|w_2 - z| \geq 2|z - z_*|$. Покажем, что теперь расстояние до симметричных точек эквивалентно величине $|w_2 - w_0|$. Действительно, справедлива оценка

$$|w_2 - w_0| \geq |w_2 - z| - |z - w_0| \geq 2|z - z_*| - |z - w_0| \geq |z - z_*|.$$

Чтобы завершить проверку условий симметрии, остается провести дальнейшие оценки на основании неравенства треугольника, как и в предыдущем случае.

Теперь нам осталось доказать утверждение о существовании точки z_* и постоянных C_1, C_2, удовлетворяющих соотношениям (4.1). Предположим, что это неверно, и точки z_* не существует. Очевидно, что в таком случае кривая Γ выходит за пределы круга $B(z, C_2|z - w_0|)$. Обозначим через w_1, w_2 точки на кривой Γ такие, что дуга $\Gamma(w_1, w_2)$ является компонентой связности кривой Γ внутри круга $B(z, C_2|z - w_0|)$, содержащей точку w_0. Рассмотрим область T, являющуюся пересечением дополнения множества G с объединением кругов $B(w, \frac{C_2}{4C}|z - w_0|)$, $w \in \Gamma(w_1, w_2)$, $\frac{C_2}{4}|z - w_0| < |w - z| < \frac{3C_2}{4}|z - w_0|$. Мы покажем, что симметричную точку можно найти в множестве T, точнее, невыполнение там условий (4.1) ведет к противоречию. Отметим, что в области T не может находиться точек кривой Γ, кроме дуги $\Gamma(w_1, w_2)$ на ее границе. Предположим, что это не так, и существует точка $u \in (\Gamma \setminus \Gamma(w_1, w_2)) \cap T$; тогда найдется точка $w \in \Gamma(w_1, w_2)$, $|w - u| < \frac{C_2}{4C}|z - w_0|$. Заметим, что по построению дуга $\Gamma(w, u)$

либо проходит через точку w_0, либо выходит за пределы круга $B(z, C_2|z-w_0|)$, в любом случае длина такой дуги больше $\frac{C_2}{2}|z-w_0|$, а хорда имеет длину меньше, чем $\frac{C_2}{4C}|z-w_0|$, что противоречит условию Лаврентьева. Оценим теперь площадь области T. Очевидно, что каждая из концентрических окружностей $\{t : |t-z| = r\}$, $\frac{C_2}{4}|z-w_0| < r < \frac{3C_2}{4}|z-w_0|$ пересекает область по множеству, содержащему дугу длины не меньше $\frac{C_2}{4C}|z-w_0|$. Вычисляя площадь по сечениям, получим $|T| \geq \frac{C_2^2}{8C}|z-w_0|$. Обозначим через w_3, w_4 точки на дуге $\Gamma(w_1, w_2)$, в которых она входит в область T и выходит из нее. Построим на дуге $\Gamma(w_3, w_4)$ семейство вспомогательных точек $\{t_n\}$, $m = 1, \ldots, N$. Положим $t_1 = w_3$, далее выберем точку $t_2 \in \Gamma(w_3, w_4)$ так, что $|t_2 - t_1| = 2C_1|z-w_0|$. Будем продолжать этот процесс выбора точек, пока $|t_n - w_2| \geq C_1|z-w_0|$. Точку, для которой это условие впервые будет нарушено, назовем t_N. Наше построение гарантирует, что круги $B(t_n, C_1|z-w_0|)$, $B(t_{n+1}, C_1|z-w_0|)$ не пересекаются. С другой стороны, из условия Лаврентьева и соотношения $|t_2-t_1| = 2C_1|z-w_0|$ следует, что при любом n дуга кривой $\Gamma(t_n, t_{n+1})$ содержится в круге $B(t_n, 2CC_1|z-w_0|)$. Следовательно, любая точка, лежащая вне объединения кругов $B(t_n, (2CC_1+2C_1)|z-w_0|)$, находится на расстоянии не меньшем, чем $2C_1|z-w_0|$, от дуги $\Gamma(w_1, w_2)$. В частности, если бы нашлась точка $z' \in T$, не входящая в объединение кругов $B(t_n, (2CC_1+2C_1)|z-w_0|)$, то точка $z_* = \frac{1}{2}(z'+u')$, где u' – ближайшая к точке z' точка на кривой $\Gamma(w_3, w_4)$, удовлетворяла бы всем условиям (4.1). Так как мы предположили, что это неверно, то круги $B(t_n, (2CC_1+2C_1)|z-w_0|)$ должны покрывать область T. Следовательно, справедливы оценки

$$N\pi(2CC_1+2C_1)^2|z-w_0|^2 \geq |T| \geq \frac{C_2^2}{8C}|z-w_0|,$$

и, значит, $N \geq \frac{C_2^2}{C_1^2}\frac{1}{8\pi C(C+2)^2}$.

Оценим теперь длину кривой $\Gamma(w_3, w_4)$. Из определения точек t_n следует оценка $|\Gamma(w_3, w_4)| \geq N2C_1|z-w_0|$, а с другой стороны, $|\Gamma(w_3, w_4)| \leq C|w_3-w_4| < CC_2|z-w_0|$ и, следовательно, $N \leq \frac{C_2}{C_1}C$.

Объединяя обе оценки для числа N, получим $8C^2(C+2)^2 > \frac{C_2}{C_1}$. Эта оценка ведет к противоречию, поскольку отношение $\frac{C_2}{C_1}$ мы можем сделать сколь угодно большим. Предложение доказано.

§5. Вспомогательные оценки и конструкции

Здесь собран ряд важных для завершения доказательства оценок и конструкций. Мы не приводим доказательств тех из них, которые были установлены ранее.

Первая группа оценок показывает, как условие пористости влияет на свойство суммируемости интегралов с особенностями на этом множестве [2].

Предложение 5.1. *Пусть* Γ *– граница области Лаврентьева,* E *– пористое подмножество* Γ *с постоянной* γ *в оценке* (1.2), *тогда*

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{\operatorname{dist}^\beta(z,E)} \le C|J|^{1-\beta}$$

$$(J \text{ – любая дуга на } \Gamma, \quad \beta < \frac{-\log(1-\gamma)}{1-\log(1-\gamma)}).$$

Нам фактически потребуется усиление этой оценки, учитывающее особые точки вне дуги, по которой происходит интегрирование [6].

Предложение 5.2. *Пусть* Γ *– граница области Лаврентьева,* E *– пористое подмножество множества* Γ *с постоянной* γ *в оценке* (1.2), J *– любая дуга на* Γ, $\sigma > 0$, *тогда*

$$\int\limits_J \frac{|z-z_0|^\sigma |dz|}{\operatorname{dist}^\beta(z,E)} \le C|J|^{1-\beta-\sigma}, \quad \beta < \frac{-\log(1-\gamma)}{1-\log(1-\gamma)}, \quad \beta-\sigma \ne 1, \tag{5.1}$$

а если точка z_0 *лежит вне* Γ, *то*

$$\int\limits_J \frac{|dz|}{|z-z_0|^\sigma \operatorname{dist}^\beta(z,E)} \le C(|J|^{1-\beta-\sigma} + \operatorname{dist}^{1-\beta-\sigma}(z,E)),$$

$$\beta < \frac{-\log(1-\gamma)}{1-\log(1-\gamma)}, \quad \beta+\sigma \ne 1. \tag{5.2}$$

Другая группа оценок позволит нам соединять оценки интегралов, полученные для отдельных компонент разбиения, и перейти на всю обобщенную полосу [6, 7].

Предложение 5.3.

$$\sum_{n\neq N}\frac{1}{|n|^{\beta}|n-N|^{\sigma}}\leq C(N^{-\beta}+N^{-\sigma}+N^{1-\beta-\sigma}),$$

$$\beta\neq 1,\quad \sigma\neq 1,\quad \beta+\sigma>1. \tag{5.3}$$

Предложение 5.4.

$$\sum_{n\neq N_1,N_2}\frac{|n-N_1|+|n-N_2|}{(|n|+1)|n-N_1|^2|n-N_2|^2}\leq\frac{C}{|N_1|+|N_2|}. \tag{5.4}$$

Мы переходим к построению функции “аналитического расстояния” до множества E.

Предложение 5.5. *Пусть S – обобщенная полоса, удовлетворяющая условию Лаврентьева, E – локально пористое множество на границе полосы. Пусть, далее, S_1 – расширение полосы S, построенное в предложении 4.2. Тогда для любого числа ε существует аналитическая в полосе S_1 функция $g(z,\varepsilon)$ такая, что $|g(z,\varepsilon)|\asymp \operatorname{dist}^{\varepsilon}(z,E)$ для любого $z\in S$, причем постоянные в двусторонней оценке не зависят от выбора точки z.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию расстояния до множества E,

$$g_0(z)=\operatorname{dist}^{\varepsilon}(z,E),\qquad z\in\partial S_1.$$

Заметим, что область S_1 является областью Смирнова [11]. Кроме того, выполнено условие

$$\int\limits_{\partial S_1}\frac{|\log g_0(z,\varepsilon)|}{|z|^2+1}|dz|<\infty.$$

Действительно, разбивая интеграл на части полосами $\{n<\operatorname{Re}<n+1\}$, мы сможем оценить его сверху следующей суммой

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}(|n|^2+1)^{-1}I_n,\quad \text{где}\quad I_n=\int\limits_{\partial S_1}|\log g_0(z,\varepsilon)||dz|;$$

теперь остается заметить, что $|\log x|<x^{-\gamma}$ при любом $\gamma>0$, и воспользоваться оценкой из предложения 5.1. Следовательно, существует внешняя функция g_1 из класса Харди $H^1(S_1)$ такая, что $|g_1(z,\varepsilon)| = g_0(z,\varepsilon)$ при $z \in \partial S_1$ (см. [12]). Требуемая оценка будет получена за счет технического приема, предложенного Е. М. Дынькиным [9] и основанного на использовании симметричных точек. Кроме того, на этом этапе доказательства мы введем дополнительное ограничение $|\varepsilon| < \beta$, здесь β – постоянная, введенная в формулировке предложения 5.1. В предложении 4.5 доказано, что если $z \in S_1$, то существует симметричная точка z_* в дополнении, т.е. $|z-w| \asymp |z_* - w|$ при любом $w \in \partial S_1$. Нужная оценка для $|g(z,\varepsilon)|$ будет получена из формулы Коши, которая сохраняет силу для граничных значений функций из $H^1(S_1)$ (см. [12]):

$$g_1(z,\varepsilon) = (2i\pi)^{-1} \int\limits_{\partial S_1} g_1(w,\varepsilon)(w-z)^{-1}dw.$$

Фиксируем точку $z \in S$ и построим для нее симметричную точку z_* (предложение 4.5). Преобразуем подынтегральное выражение, используя тождество $(w-z)^{-1} = (w-z_*)^{-1} + (z-z_*)(w-z_*)^{-1}(w-z)^{-1}$. Так как точка z_* лежит вне контура интегрирования, то $\int\limits_{\partial S_1} g_1(w,\varepsilon)(w-z_*)^{-1}dw = 0$, как интеграл граничных значений функции класса Харди [12]. Следовательно,

$$g_1(z,\varepsilon) = (2i\pi)^{-1} \int\limits_{\partial S_1} g_1(w,\varepsilon) \frac{z-z_*}{w-z_*}\frac{dw}{w-z}. \qquad (5.5)$$

Оценим интеграл сверху, разделив контур интегрирования на две части. Сначала рассмотрим зону интегрирования, близкую к точке z. Напомним, что по условию предложения $z \in S$ и, значит (предложение 4.3), $\operatorname{dist}(z,E) \asymp \operatorname{dist}(z,\partial S_1)$. Пусть z_1 – ближайшая к z точка множества E, $I(z)$ – дуга на ∂S_1 с центром в точке z_1 и длиной равной $2|z-z_1|$. Если $w \in I(z)$, то $|w-z| \asymp |z-z_1| \asymp \operatorname{dist}(z,E)$, $|z-z_*| \asymp |w-z_*|$, следовательно,

$$\int\limits_{I(z)} \left| g_1(w,\varepsilon)\frac{z-z_*}{w-z_*}\frac{dw}{w-z}\right| \le$$

$$\leqslant C \int\limits_{I(z)} \frac{\operatorname{dist}^\varepsilon(w,E)|dw|}{|z-z_1|} \le C\operatorname{dist}^\varepsilon(z,E). \qquad (5.6)$$

Здесь оценки интегралов в сумме вытекают из оценок в предложении 5.2, справедливых при условии $-\beta < \varepsilon$. Покажем, что эта оценка сохраняется и для интеграла по второй части контура $\partial S_1 \setminus I(z)$. Отметим, что на сей раз $|w - z_*| \asymp |w - z|$, следовательно,

$$\int\limits_{\partial S_1 \setminus I(z)} \left| g_1(w,\varepsilon) \frac{z - z_*}{w - z_*} \frac{dw}{w - z} \right| \leq$$
$$\leqslant C \int\limits_{\partial S_1 \setminus I(z)} \frac{\operatorname{dist}(z,E)}{|w - z|^2} \operatorname{dist}^{\varepsilon}(w,E) |dw|. \tag{5.7}$$

Для того, чтобы эффективно пользоваться оценками интегралов, мы разобьем интеграл в сумму интегралов по компонентам регулярного разбиения обобщенной полосы (точнее говоря, по внешним границам этих компонент). Пусть множество всех целых чисел (номеров компонент) разбито на дизъюнктные подмножества Z_m так, что $|w|^2 + 1 \asymp |k|^2 + 1$, если $k \in Z_m$. Ясно, что такое разбиение существует, и при этом число элементов в каждом из множеств Z_m равномерно ограничено.

Завершим теперь оценку интеграла (5.7), полагая, что точка z входит в компоненту из группы Z_M:

$$\int\limits_{\partial S_1 \setminus I(z)} \left| g_1(w,\varepsilon) \frac{z - z_*}{w - z_*} \frac{dw}{w - z} \right| \leq$$
$$\leqslant C \sum_m \sum_{k \in Z_m} \frac{\operatorname{dist}(z,E)}{|M - m|^2 + 1} \int\limits_{\partial S_{1,k}}^{*} \operatorname{dist}^{\varepsilon}(w,E) |dw|. \tag{5.8}$$

Знак $*$ в интегралах указывает, что интегрирование происходит только по внешней части границы компоненты и, сверх того, в компоненте, содержащей точку z, исключена дуга $I(z)$. Отметим, что все интегралы в сумме оцениваются сверху по предложению 5.2, и они равномерно ограничены, т.е.

$$\int\limits_{\partial S_1 \setminus I(z)} \left| g_1(w,\varepsilon) \frac{z - z_*}{w - z_*} \frac{dw}{w - z} \right| \leq$$
$$\leqslant C \operatorname{dist}(z,E) \sum_m \frac{1}{|M - m|^2 + 1} \leq C \ \operatorname{dist}^{\varepsilon}(z,E); \tag{5.9}$$

оценка последней суммы получена из предложения 5.3. Объединяя оценки (5.6) и (5.8), мы получим неравенство $|g_1(w,\varepsilon)| \leq C\,\mathrm{dist}^\varepsilon(z,E)$.

Чтобы получить оценку функции $g_1(z,\varepsilon)$ снизу, заметим, что из ее определения вытекает, что функция $g_2(z) = \frac{1}{g_1(z,\varepsilon)}$ является внешней функцией с модулем граничных значений $\mathrm{dist}^{-\varepsilon}(z,E)$, $z \in \partial S_1$. Напомним, что пока мы рассматриваем случай, когда $|\varepsilon| < \beta$, и все предыдущие оценки функции g_1 пройдут и для функции g_2. Следовательно, $|g_2(z)| \leq C\,\mathrm{dist}^{-\varepsilon}(z,E)$, $z \in S_0$, а это означает, что $|g_1(z)| \asymp \mathrm{dist}^\varepsilon(z,E)$, $z \in S_0$.

Для завершения доказательства остается снять ограничение на ε. Чтобы построить функцию для любого ε, достаточно выбрать $M \in \mathbf{N}$ так, что $|\varepsilon/M| < \beta$, построить по "уменьшенному" показателю соответствующую функцию, а затем возвести ее в степень M. Предложение доказано.

Следующее техническое утверждение содержит описание линейного оператора продолжения функций из класса $\Lambda^\alpha(E)$ на всю комплексную плоскость, обладающего важным для нас свойством сбалансированности на границах всех компонент дополнения [6].

Предложение 5.6. *Пусть B – область Лаврентьева, E – пористое подмножество на границе области B. Тогда существует линейный оператор L, действующий из пространства $\Lambda^\alpha(E)$ в пространство $\Lambda^\alpha(\mathbf{C})$ такой, что*

1) $Lf(z) = f(z)$ *для* $z \in E$ *и* $f \in \Lambda^\alpha(E)$;

2) $||Lf||_{\Lambda^\alpha(\mathbf{C})} \leq C\ ||f||_{\Lambda^\alpha(E)}$;

3) $\int\limits_{\partial S_n} Lf(z)g(z,\varepsilon)dz = 0$ *при* $\varepsilon \geq -\beta$, *где* β *– постоянная из предложения* 5.1.

Норма оператора продолжения зависит только от постоянных в условиях пористости, Лаврентьева и показателя α.

Прежнее доказательство полностью повторятся, поскольку каждая компонента разбиения является областью Лаврентьева, и в ходе формирования компонент мы контролировали соотношение внешних и внутренних границ, что гарантирует наличие на внешней границе каждой из компонент достаточно большой дуги дополнения множества E.

В основе оценок оператора интерполяции лежит следующий простой критерий принадлежности функции классу Гельдера [3].

Предложение 5.7. *Пусть S_1 – расширение обобщенной полосы S, а S_2 – расширение S_1, построенные в предложении 4.2. Пусть f – функция, аналитическая в области S_2 и такая, что для любой точки $z \in S_2$ и ближайшей к ней точке $z_1 \in E$ выполнено неравенство $|f(z) - f(z_1)| \leq C|z - z_1|^\alpha$. Тогда $f \in \Lambda_a^\alpha(S_1)$.*

§6. Доказательство необходимости условий локальной пористости и редкости

Поскольку оба обсуждаемых условия являются локальными, их доказательства те же, что в работе [4].

§7. Конструкция оператора интерполяции

Оператор интерполяции строится вначале на компонентах разбиения, а затем происходит суммирование по всем компонентам. В дальнейшем мы будем получать оценки для функций на полосе S за счет доказательства более слабых оценок в расширениях полосы S_1. В некоторых случаях такой процесс будет итерироваться. Поэтому всюду в дальнейшем мы будем проводить вспомогательные оценки для расширенной полосы. Далее, во всех оценках для нас очень важна эквивалентность расстояния от точки из "меньшей" полосы до границы "большей" полосы и расстояния от той же точки до множества E. Конструкция расширений полосы (предложение 4.2) гарантирует это. Однако, переходя к компонентам разбиения, мы теряем это свойство для точек, близких к внутренней границе компоненты. Восстановить требуемую эквивалентность расстояний позволяет предложение 4.3, где разбиение "подстраивается" под выбранную точку. Чтобы не останавливаться на этом в каждой из последующих оценок, отметим, что возникающие в них постоянные равномерно ограничены. Они не зависят от выбора расширения и способа разбиения его на компоненты, а определяются постоянными в условиях, описывающих исходную полосу S, постоянной из условия пористости, а также количеством используемых расширений исходной полосы. Мы не будем проводить контроля величины этих констант, опираясь на то, что конечное число шагов, ведущих к их увеличению, оставит их ограниченными.

Перейдем теперь к описанию оператора интерполяции. Фактически мы описываем семейство операторов, зависящих от параметра ε, и расширения исходной полосы (предложение 4.2), определяющих соответствующую функцию "аналитического расстояния" g (предложение 5.5). Используя описанное в предложении 5.6 продолжение функции из класса Гельдера с множества E на всю комплексную плоскость, мы получаем возможность определить оператор на компонентах регулярного разбиения $\{S_n\}$ полосы S_1 (теорема 3.1), а затем получить оператор интерполяции, суммируя его части на компонентах разбиения. Заметим, что оператор интерполяции будет определен для полосы независимо от разбиения ее на компоненты, которое является только техническим средством для доказательства непрерывности оператора.

Фиксируем компоненту разбиения S_n и определим оператор H_n

$$f \in \Lambda^{\alpha,0}(E) \mapsto f_* = Lf \in \Lambda^{\alpha}(\mathbf{C});$$

$$H_n f(z) = \frac{g(z,\varepsilon)}{2\pi i} \int\limits_{\partial S_n} \frac{f_*(w)}{(w-z)} \frac{dw}{g(w,\varepsilon)}. \tag{7.1}$$

Все дальнейшие конструкции и рассуждения проходят по схеме, изложенной в работе [7]. Переход от стандартной полосы к обобщенной требует простых модификаций, характер которых виден из приводимых ниже формулировок.

Предложение 7.1 (внутренние точки). *Пусть $\alpha < \varepsilon < \beta$, где постоянная β определена в предложении 5.1, точка $z \in S_n$ такова, что $\operatorname{dist}(z, \partial S_n) \asymp \operatorname{dist}(z, E)$, $z_1 \in E$ – ближайшая к точке z. Тогда для любой функции f из пространства $\Lambda^{\alpha}_0(E)$ верна оценка*

$$|H_n f(z) - f(z_1)| \le C \frac{|z-z_1|^{\alpha}}{|z|+1}. \tag{7.2}$$

Проведем оценку функции $H_n f$ в точках, лежащих вне контура интегрирования. При этом отдельно рассмотрим случаи близкого и далекого расположения точки.

Предложение 7.2 (близкие точки). *Пусть $\alpha < \varepsilon < \beta$, где постоянная β определена в предложении 5.1. Пусть $z \in S_N$, компоненты S_N и S_n являются соседними. Обозначим через z_1 ближайшую к z*

точку множества E. Тогда для любой функции f из пространства $\Lambda_0^\alpha(E)$ справедлива оценка

$$|H_n f(z)| \le C\frac{|z-z_1|^\alpha}{1+|z|}\left(1+\left(\frac{|z-z_1|}{\operatorname{diam} S_n}\right)^{\varepsilon-\alpha}\right). \tag{7.3}$$

Предложение 7.3 (далекие точки). *Пусть $\alpha < \varepsilon < \beta$, где постоянная β определена в предложении* 5.1. *Пусть $z \in S_N$, компоненты S_N и S_n не являются соседними. Обозначим через z_1 ближайшую к z точку множества E. Тогда для любой функции f из пространства $\Lambda_0^\alpha(E)$ справедлива оценка*

$$|H_n f(z)| \le C\frac{|z-z_1|^\alpha}{(\operatorname{dist}(0,S_n)+1)\operatorname{dist}^2(z,S_n)}. \tag{7.4}$$

Следствие 7.4. *Утверждение теоремы* 1.7 *справедливо для показателей $\alpha < \beta$, где β – постоянная, определенная в предложении* 5.1.

Завершение доказательства теоремы 1.7. Для завершения доказательства требуется провести построение оператора редукции, понижающего гладкость, затем проинтегрировать функцию пониженной гладкости (на основании уже доказанного результата) и так же, как для стандартной полосы, провести "переделку" вспомогательной функции в искомую. Завершение доказательства – распространение интерполяции на точки множества E, лежащие внутри области, проходит по стандартной схеме, сведением к эквивалентной задаче в пространстве H^∞. Доказательства всех этих утверждений проходят так же, как и в работах [6, 7].

Теорема полностью доказана.

Литература

1. С. А.Виноградов, В. П. Хавин, *Свободная иннтерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1974, **47**, 15–54.
2. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гельдера.* — Мат. сб. 1979, **109**, 107–128.
3. Н. А. Широков, *Свободная интерполяция в пространствах $C^A_{r,\omega}$.* — Мат. сб. 1982, **117**, 337–358.

4. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Свободная интерполяция для классов Гельдера в жордановых областях. Нелинейные краевые задачи и некоторые вопросы теории функций.* В кн: Проблемы математического анализа, СПбГУ, СПб, 1995, вып. 15, с. 109–138.
5. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Свободная интерполяция для классов Гельдера в квазиконформных областях. Нелинейные краевые задачи и некоторые вопросы теории функций.* В кн: Проблемы математического анализа, СПбГУ, СПб, 1997, вып. 16, с. 145–166.
6. А. М. Коточигов, Н. А. Широков, *Интерполяция в окрестности точки острия.* — Алгебра и анализ, 1998, **10**, вып. 4, 142–176.
7. A. M. Kotochigov, *Intrepolation sets for Hölder spaces of functions analytic in a strip. Complex analysis. Operator and Related Topics.* Operator Theory Advances and Applications, Berkshäuser Verlag. 2000, **113**, p. 179–194.
8. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям.* Мир, М. (1969).
9. Е. М. Дынькин, *Оценки аналитических функций в жордановых областях.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ 1977, **73**, 70–90.
10. Е. М. Дынькин, *Неаналитический принцип симметрии и конформные отображения.* — Алгебра и анализ, 1993, **5**, вып. 3, 119–142.
11. Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps.* Springer–Verlag (1992).
12. П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p.* Мир, М. (1984).

Kotochigov A. M. Interpolation in a generalized strip.

It is shown that the description of interpolation sets for analytic Hölder classes in a standard strip can be carried over entirely to the generalized strip, i.e., to the subset of the standard strip bounded by two Lavrent'ev curves. To do this, some geometric properties of a generalized strip are established, namely, it is shown that a generalized strip can be extended accross the arcs of an interpolation set on the boundary, and that it decomposes in Lavrent'ev domains.

С.-Петербургский
государственный
электротехнический университет
kam@peterlink.ru

Поступило 10 мая 2000 г.