Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. М. Маламуд

О ПОДОБИИ ТРЕУГОЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИАГОНАЛЬНОМУ

Введение

Несмотря на существование резольвентного критерия подобия (см. теорему 1.1) замкнутого оператора самосопряжённому, простые достаточные условия подобия оказываются в ряде случаев предпочтительнее.

В настоящей работе приводится ряд достаточных условий подобия несамосопряжённого оператора $A = G + iV^{1/2}JV^{1/2}$ (с корректно определённой мнимой компонентой) самосопряжённому. Кроме того, приводятся достаточные условия (а в диссипативном случае–критерии) подобия треугольного оператора

$$A_1 := Q_\alpha + iK : f \to \alpha(x)f(x) + i\int_x^1 k(x,t)f(t)d\mu(t) \qquad (0.1)$$

самосопряжённому.

Остановимся кратко на содержании работы.

В §1 (теорема 1.4) приведены достаточные (в том числе известные) условия подобия оператора A самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром. Одно из наиболее сильных среди них выглядит так:

$$V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_+(E), \quad ||V^{1/2}R_A(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant C/\varepsilon^{1/2},\ \varepsilon > 0.$$

Все условия в теореме 1.4 можно разбить на две группы: формулируемые в терминах пары операторов A и A^*, либо только в терминах оператора A. В предложении 1.5 показывается, что все условия подобия внутри каждой из двух групп попарно эквивалентны. Например, условие 12_+) (ограниченность J-формы характеристической функции $\theta_A(z)$) эквивалентно хорошо известному условию $8_+) : V^{1/2}R_A(z)f, V^{1/2}R_{A^*}(z)f \in H^2_+(E)$.

В §2 изучается подобие оператора A самосопряжённому при условии (2.1) слабой коррелированности положительной и отрицательной частей $P_\pm V$ оператора $JV (J = P_+ - P_-)$. Это условие введено С. Набоко [13], который показал с помощью функциональной модели диссипативного оператора, что при его наличии на недиссипативные операторы переносится известный критерий С. Надя-Фояша [20]. Здесь предлагается элементарное (не использующее функциональной модели) доказательство результата из [13], а также пополняется список критериев подобия. Например, при условии (2.1) оценки

$$||V^{1/2}(A-z)^{-1}|| \leqslant C|\operatorname{Im} z|^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,$$

оказываются необходимыми и достаточными для подобия самосопряжённому.

В §3 изучается подобие самосопряжённому диссипативного оператора A_1 вида (0.1), действующего в $L_m^2([0,1];d\mu)$ с непрерывной мерой $d\mu$ и $m \leqslant \infty$. Здесь с помощью простых свойств T-гладких (в смысле Т. Като [28]) операторов элементарно доказывается критерий И. Гохберга и М. Крейна (анонсированный ими в [5]) подобия диссипативного оператора A_1 (с $d\mu = dx$ и $m < \infty$) самосопряжённому. В этом же параграфе получены обобщения критерия из [5] на случай $m = \infty$, охватывающие неядерные возмущения, а также приведен один результат о подобии самосопряжённому недиссипативного оператора A_1 с ядром $k(x,t)$, не вырождающимся на диагонали.

В §4 приводятся подробные доказательства утверждений, анонсированных в [8] и [10]. Именно, здесь изучается подобие диагональному оператора A_1 вида (0.1) с ядром $k(x,t)$, вырождающимся на диагонали. В частности, доказывается, что A_1 подобен Q_α, если $|K(x,t)(\alpha(x)-\alpha(t))|^{-1} \leqslant \varphi(x-t)$, где $\varphi \in L_1[0,1]$.

Обозначения: $\mathfrak{H}$ - гильбертово пространство, $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ - спектр и резольвентное множество оператора A; $R_A(z) := (A - zI)^{-1}$ и $\operatorname{spr} A$ - его резольвента и спектральный радиус; $\operatorname{Lat} A$ и $\{A\}'$ – решётка инвариантных подпространств и коммутант оператора A; $A\lceil\mathfrak{H}_1-$ его сужение на $\mathfrak{H}_1$.

Большинство результатов §1–§3 получено автором в 1984–1985 г.г.

Я выражаю признательность В. Васюнину и В. Капустину, побудивших меня написать эту статью, за полезные обсуждения.

§1. О подобии самосопряженному оператору с абсолютно непрерывным спектром

1.1. В этом параграфе приводятся условия подобия несамосопряженного оператора

$$A = G + iV_1 = G + iV^{1/2}JV^{1/2} = G + iJV \tag{1.1}$$

самоспряженному оператору с абсолютно непрерывным спектром. Здесь в (1.1) $G = G^*, V_1 = V_1^*$ и $V_1 = JV = V^{1/2}JV^{1/2}$ – полярное представление оператора V_1, $V = |V_1|, J = \mathrm{sign} V_1$.

В дальнейшем считаем оператор V_1 сильно G-ограниченным, т.е. $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(V_1) = \mathcal{D}(V)$, и с некоторыми константами $a \in [0,1)$ и $b > 0$ справедливо неравенство

$$||Vf|| \leqslant a||Gf|| + b||f||, \quad a < 1, \quad f \in \mathcal{D}(G). \tag{1.2}$$

Хорошо известно, что условие сильной G-ограниченности (1.2) оператора V влечёт замкнутость оператора A, определённого на $\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(G)$.

Обозначим $E := \overline{\mathcal{R}(V)}$. Характеристическая функция $\theta(z) := \theta_A(z) : E \to E$ оператора A вида (1.1) определяется (см. [1]) формулой

$$\theta_A(z) = I + 2iJV^{1/2}(A^* - zI)^{-1}V^{1/2}, \qquad z \in \rho(A^*). \tag{1.3}$$

Напомним критерий подобия замкнутого оператора A самосопряженному, полученный в [14, 23] (другие доказательства содержатся в [9] и [4]).

Теорема1.1. *Замкнутый оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ подобен самосопряженному тогда и только тогда, когда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ и для всех $f \in \mathfrak{H}$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} \int \varepsilon||R_A(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant \ C_1^+||f||^2, \qquad f \in \mathfrak{H}, \\ \sup_{\varepsilon>0} \int \varepsilon||R_{A^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant \ C_2^+||f||^2, \qquad f \in \mathfrak{H}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

в которых C_1^+ и C_2^+ не зависят от f.

Замечание 1.2. Разумеется, оценки (1.4) для резольвент $R_A(z)$ и $R_{A^*}(z)$ в $\mathbb{C}_+$ можно заменить такими же оценками в $\mathbb{C}_-$.

Нам понадобится также следующая известная лемма.

Лемма 1.3. *Пусть B – максимальный диссипативный оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда:*

1) *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \int ||R_B(\lambda - i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 2\pi ||f||^2, \qquad f \in \mathfrak{H}, \\ \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \int ||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 2\pi ||f||^2, \qquad f \in \mathfrak{H}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

2) *Если к тому же $B = G + iV$ – оператор вида* (1.1), *удовлетворяющий условию* (1.2), *то для любого $\varepsilon > 0$ и любого $f \in \mathfrak{H}$*

$$\begin{aligned} \int ||\sqrt{V} R_B(\lambda - i\varepsilon)f||^2 d\lambda &\leqslant 2\pi ||f||^2, \\ \int ||\sqrt{V} R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda &\leqslant 2\pi ||f||^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Неравенства (1.5) хорошо известны и вытекают из равенства Парсеваля, применённого к тождеству $R_B(\lambda - i\varepsilon)f = -i\int_{-\infty}^{0} e^{i(\lambda-i\varepsilon)t}U(t)f dt$, в котором $U(t) := \exp(-itB)$- сжимающая полугруппа.

Неравенства (1.6) доказаны в [12] при помощи самосопряжённой дилатации оператора B (доказательство, не использующее дилатации, имеется в [9]).

Напомним важное для дальнейшего определение T-гладкости.

Определение [28]. *Пусть T – замкнутый плотно определенный оператор в $\mathfrak{H}$ с вещественным спектром ($\sigma(T) \subset \mathbb{R}$). Замкнутый оператор K называют гладким относительно T или T-гладким, если $\mathcal{D}(K) \supset \mathcal{D}(T)$ и справедливы неравенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||KR_T(\lambda \pm i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant\ C||f||^2, \quad f \in \mathfrak{H}, \quad \varepsilon > 0$$

с константой C, не зависящей от $f \in \mathfrak{H}$.

Напомним, что оператор A называют простым (вполне несамосопряжённым), если он не имеет приводящих самосопряжённых частей.

Всякий оператор A вида (1.1) допускает единственное представление $A = A_1 \oplus A_2$, в котором $A_1 = A_1^*$, а A_2–простой.

Теорема 1.4. *Пусть A – оператор вида (1.1)–(1.2) с вещественным спектром ($\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$), $P_\pm = (I \pm J)/2$. Тогда A подобен самосопряжённому при выполнении любого из следующих условий:*

$1_\pm$) $-iA$ – *генератор группы* $U(t) =: \exp(-itA)$ *типа* C_0 *и* $\int_0^\infty ||V^{1/2}\exp(\mp itA)f||^2dt$, $\int_0^\infty ||V^{1/2}\exp(\mp itA^*)f||^2dt \leqslant C_1^\pm ||f||^2$;

$2_\pm$) $-iA$ – *генератор группы* $U(t) =: \exp(-itA)$ *типа* C_0 *и* $\int_0^\infty ||P_\pm V^{1/2}\exp(\mp itA)f||^2dt$, $\int_0^\infty ||P_\mp V^{1/2}\exp(\mp itA^*)f||^2dt \leqslant C_2^\pm ||f||^2$;

3) $-iA$ – *генератор группы* $U(t) =: \exp(-itA)$ *типа* C_0 *и* $\int_{-\infty}^\infty ||V^{1/2}\exp(-itA)f||^2dt \leqslant C_3||f||^2$, $f \in \mathfrak{H}$;

4) $V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $f \in \mathfrak{H}$;

5) $P_\pm V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $f \in \mathfrak{H}$;

$6_\pm$) $V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $||V^{1/2}R_A(\lambda \mp i\varepsilon)|| \leqslant C_6/\varepsilon^{1/2}$;

$7_\pm$) $P_\pm V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $||P_\mp V^{1/2}R_A(\lambda \mp i\varepsilon)|| \leqslant C_7^\pm/\varepsilon^{1/2}$;

$8_\pm$) $V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $V^{1/2}R_{A^*}(z)f \in H^2_\pm(E)$, $f \in \mathfrak{H}$;

$9_\pm$) $P_\pm V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_\pm(E)$, $P_\mp V^{1/2}R_{A^*}(z)f \in H^2_\pm(E)$, $f \in \mathfrak{H}$;

$10_\pm$) $||V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant C_{10}^\pm/\varepsilon^{1/2}$, $||V^{1/2}R_{A^*}(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant C_{10}^\pm/\varepsilon^{1/2}$;

$11_\pm$) $||P_\pm V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant C_{11}^\pm/\varepsilon^{1/2}$, $||P_\mp V^{1/2}R_{A^*}(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant C_{11}^\pm/\varepsilon^{1/2}$;

$12_\pm$) $\max\{\sup_{z\in\mathbb{C}_\mp} ||\theta_A^*(z)J\theta_A(z)||, \sup_{z\in\mathbb{C}_\pm} ||\theta_A(z)J\theta_A^*(z)||\} = C_{12}^\pm < \infty$;

$13_\pm$) $\max\{\sup_{z\in\mathbb{C}_\mp} ||P_\pm\theta_A^*(z)J\theta_A(z)P_\pm||, \sup_{z\in\mathbb{C}_\pm} ||P_\mp\theta_A(z)J\theta_A^*(z)P_\mp||\} = C_{13}^\pm < \infty$.

При этом простая часть оператора A подобна самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром.

Доказательство. i) На 1-м шаге установим подобие самосопряжённому при условиях 1)–3) и докажем (попутно) эквивалентности $1_+) \iff 2_+)$ и $1_-) \iff 2_-)$. Импликации $1_+) \Longrightarrow 2_+)$ и $1_-) \Longrightarrow 2_-)$ очевидны.

Пусть выполнены условия 2_+). Тогда из тождества

$$\begin{aligned} ||e^{-itA}f||^2 &= ||f||^2 + 2\int_0^t (JV^{1/2}e^{-isA}f, V^{1/2}e^{-isA}f)ds \\ &= ||f||^2 + 2\int_0^t ||P_+V^{1/2}e^{-isA}f||^2ds - 2\int_0^t ||P_-V^{1/2}e^{-isA}f||^2ds. \end{aligned} \tag{1.7}$$

вытекает ограниченность полугруппы $U(t) = \exp(-itA)$, $t \geqslant 0$: $||U(t)||^2 \leqslant 1 + 2C_3, t \geqslant 0$.

Аналогичное тождество для A^*

$$||e^{-itA^*}f||^2 = ||f||^2 + 2\int_0^t ||P_- V^{1/2} e^{-isA^*} f||^2 ds - \\ - 2\int_0^t ||P_+ V^{1/2} e^{-isA^*} f||^2 ds \quad (1.8)$$

и равенство $\exp(-itA^*) = U^*(-t)$ ведут к оценке $||U(t)|| \leqslant 1 + 2C_3, t < 0$.

Таким образом, группа $U(t)$ ограничена, и по теореме С.-Надя ([32, 20]) оператор A подобен самосопряжённому.

Подобие самосопряжённому при условиях 3) также следует из тождества (1.7) и теоремы С.-Надя.

Осталось заметить, что из неотрицательности правых частей тождеств (1.7) и (1.8) вытекают неравенства

$$\int_0^t ||P_- V^{1/2} e^{-isA} f||^2 ds, \quad \int_0^t ||P_+ V^{1/2} e^{-isA^*} f||^2 ds \ \leqslant\ (1/2 + C_2^+)||f||^2,$$

доказывающие импликацию $2_+) \Longrightarrow 1_+)$. Импликация $2_-) \Longrightarrow 1_-)$ доказывается так же.

ii) Для доказательства подобия при условиях 4)–$7_\pm$) достаточно доказать его при условиях $7_\pm$), предварительно установив импликации 4) $\Longrightarrow$ 5), $6_+) \Longrightarrow 7_+)$, $6_-) \Longrightarrow 7_-)$ и 5) $\Longrightarrow 7_\pm)$. Первые три из них очевидны.

Установим две последних. В силу принципа равномерной ограниченности, включения $P_\pm V^{1/2} R_A(z) f \in H^2_\pm(E)$ при всех $f \in \mathfrak{H}$ эквивалентны оценкам

$$\begin{aligned} ||P_+ V^{1/2} R_A(z) f||_{H^2_+(E)} &\leqslant\ C_5^+ ||f||, \\ ||P_- V^{1/2} R_A(z) f||_{H^2_-(E)} &\leqslant\ C_5^- ||f|| \end{aligned} \quad (1.9)$$

с константами $C_5^\pm$, не зависящими от $f \in \mathfrak{H}$.

С другой стороны, для вектор-функций $\varphi \in H^2_\pm(E)$ справедливо хорошо известное (см. [3, 15]) неравенство

$$||\varphi(z)||_E \leqslant (\pi|\operatorname{Im} z|)^{-1/2} ||\varphi||_{H^2_\pm(E)}, \qquad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- . \qquad (1.10)$$

Объединяя (1.9) и (1.10), приходим к требуемой импликации $5) \Longrightarrow 6_+)$. Импликация $5) \Longrightarrow 6_-)$ доказывается аналогично.

iii) Установим подобие самосопряжённому при условиях $7_\pm)$.

Пусть для определённости выполнены условия $7_+)$. Рассмотрим наряду с A максимальный диссипативный оператор $B = G + iV$. Для его резольвенты известны следующие, вытекающие, например, из (1.6) и (1.10), оценки:

$$||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}|| = ||V^{1/2}R_B(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant \sqrt{2/\varepsilon}. \tag{1.11}$$

Учитывая их, лемму 1.3 и тождество Гильберта

$$R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)-R_A(\lambda+i\varepsilon) = 2iR_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon), \tag{1.12}$$

придём к неравенству

$$\begin{aligned} \varepsilon\int ||R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 2\varepsilon\int ||R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ +4\varepsilon\int ||2iR_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda &\leqslant 4\pi||f||^2 \\ +32\int ||P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ (4\pi+32C_5^{+2})||f||^2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Далее, согласно оценке $7_+)$ $||R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_-|| = ||P_-V^{1/2}R_A(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant C_7^+/\varepsilon^{1/2}$. Поэтому из тождества, аналогичного (1.12), и леммы 1.3 получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon\int ||R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 2\varepsilon\int ||R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ +2\varepsilon\int ||2iR_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_-V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda &\leqslant 4\pi||f||^2 \\ +\ 8C_7^{+2}\int ||V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 4\pi(1+4C_7^{+2})||f||^2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

По теореме 1.1. оператор A подобен самосопряжённому.

iv) Переходя к доказательству подобия при условиях $8_\pm)$ – $13_\pm)$, заметим, что достаточно установить его лишь при условиях $11_\pm)$. Действительно, импликации $8_+) \Longrightarrow 9_+)$, $8_-) \Longrightarrow 9_-)$, $10_+) \Longrightarrow 11_+)$ и $10_-) \Longrightarrow 11_-)$ очевидны. Импликации $9_+) \Longrightarrow 11_+)$ и $9_-) \Longrightarrow 11_-)$ доказываются так же, как импликации $5) \Longrightarrow 6_\pm)$ на шаге ii).

Далее, импликации $12_+) \Longrightarrow 13_+)$ и $12_-) \Longrightarrow 13_-)$ также очевидны, а эквивалентности $10_+) \Longleftrightarrow 12_+)$, $10_-) \Longleftrightarrow 12_-)$ и $11_+) \Longleftrightarrow 13_+)$, $11_-) \Longleftrightarrow 13_-)$ – очевидные следствия хорошо известных (см. [1]) тождеств:

$$4\,\mathrm{Im}\, z V^{1/2} R_A(\overline{z}) R_{A^*}(z) V^{1/2} = J - \theta_A^*(z) J \theta_A(z), \tag{1.15}$$

$$4\,\mathrm{Im}\, z V^{1/2} R_{A^*}(z) R_A(\overline{z}) V^{1/2} = J - \theta_A(z) J \theta_A^*(z). \tag{1.16}$$

Итак, осталось установить подобие самосопряжённому при условиях $11_\pm)$. Пусть для определенности выполнены условия $11_-)$. Для этого случая вторая из оценок (1.4) уже установлена на шаге iii) (см.неравенство (1.14)). Первая же из оценок (1.4) доказывается так же, как (1.13). Действительно, записывая правую часть тождества Гильберта (1.12) в виде $-2iR_A(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)$ и пользуясь соотношением

$$||R_A(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}P_+|| = ||P_+V^{1/2}R_{A^*}(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant C_{11}^-/\varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.17}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \int ||R_A(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant\ 2\varepsilon \int ||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\
&+2\varepsilon \int ||2iR_A(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\
&\leqslant 4\pi||f||^2 + 8(C_{11}^-)^2 \int ||V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant 4\pi(1 + 4(C_{11}^-)^2)||f||^2.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

По теореме 1.1 оператор A подобен самосопряжённому.

v) Итак, подобие оператора A самосопряжённому, т.е. равенство $L^{-1}AL = T = T^*$, установлено во всех случаях. Осталось показать, что T абсолютно непрерывен, если оператор A простой. На этом шаге докажем это лишь при условиях $3) - 7_\pm)$, доказав предварительно, что оператор $V^{1/2}L$ является T-гладким. Так как условие 4) означает A-гладкость оператора $V^{1/2}$, а условие 3) ему равносильно (см. [28]), то из равенства $L^{-1}AL = T$ легко следует T-гладкость оператора $V^{1/2}L$ при условиях 3) и 4).

Доказательство T-гладкости оператора $V^{1/2}L$ при условиях 5) и $7_\pm)$ сведем к доказательству его T-гладкости при условиях 4) и $6_\pm)$, установив импликации $5) \Longrightarrow 4)$, $7_+) \Longrightarrow 6_+)$ и $7_-) \Longrightarrow 6_-)$.

Очевидно, достаточно установить лишь вторую из них.

Итак, пусть $P_+V^{1/2}R_A(z)f \in H^2_+(E)$ и $||P_-V^{1/2}R_A(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant C_7^+/\varepsilon^{1/2}$.

Так как характеристическая функция $\theta_B(z) = I + 2iV^{1/2}(B^* - z)^{-1}V^{1/2}$ диссипативного оператора – сжимающая в $\mathbb{C}_+$, то $||V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}|| \leqslant 1$.

Поэтому из (1.12), леммы 1.3 и первого из неравенств (1.9) получаем

$$\begin{aligned}\int ||V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ &\leqslant\ 2\int ||V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ &+ 8\int ||V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ &\leqslant\ 4\pi||f||^2 + 8\int ||P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant 4(\pi + 2(C_5^+)^2)||f||^2.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Аналогично с учётом оценки $||V^{1/2}R_B(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant (2/\varepsilon)^{1/2}$ устанавливается неравенство

$$||V^{1/2}R_A(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant (\sqrt{2} + 2C_7^+)/\varepsilon^{1/2}. \tag{1.20}$$

Комбинируя неравенства (1.19) и (1.10), приходим ко второй (аналогичной (1.20)) оценке $\|V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)\| \leqslant \widetilde{C}\varepsilon^{-1/2}$ с некоторой константой $\widetilde{C}$.

Таким образом, при условиях $5) - 7_\pm)$ справедливы (с некоторой константой $S > 0$) неравенства $\|V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^{-1/2}$. Поэтому

$$\begin{gathered}||V^{1/2}L(T-z)^{-1}|| \leqslant ||V^{1/2}(A-z)^{-1}|| \cdot ||L|| \leqslant C'(|\operatorname{Im} z|)^{-1/2}, \\ z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-,\end{gathered} \tag{1.21}$$

где $C' := C||L||$. Так как T самосопряжён, то по теореме Т. Като [28] условие (1.21) эквивалентно условию T-гладкости оператора $V^{1/2}L$.

Обозначим через $\mathfrak{H}_{ac}$ и $\mathfrak{H}_s$ абсолютно непрерывное и сингулярное подпространства оператора T. По другой теореме Като [28] T-гладкость оператора $V^{1/2}L$ влечёт соотношение $V^{1/2}L(\mathfrak{H}_s) = 0$ и, в частности, – равенство $Af = A^*f \quad \forall f \in L(\mathfrak{H}_s)$. Так как подпространство $L(\mathfrak{H}_s)$ инвариантно относительно A, то оно приводит A. Этот факт противоречит простоте оператора A, если $\mathfrak{H}_s \neq 0$. Итак, $\mathfrak{H}_s = 0$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac}$, что и требовалось.

vi) Докажем теперь, что оператор $V^{1/2}L$ является T-гладким при условиях $1_\pm$), $2_\pm$) и $8_\pm$)$-13_\pm$). Достаточно доказать это при условиях $11_\pm$), установив предварительно импликации $\mathrm{i}_+) \Longrightarrow 11_+)$ и $\mathrm{i}_-) \Longrightarrow 11_-)$ при $\mathrm{i} \in \{1, 2, 8, \dots, 13\}$.

Начнем с импликации $1_+) \Longrightarrow 8_+)$. Так как при условиях 1_+) и 2_+) группа $U(t) = \exp(-itA)$ ограничена, то она имеет (экспоненциальный) тип 0. Следовательно, при каждом $\varepsilon > 0$ справедливо тождество

$$V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)f = i\int_0^\infty e^{i(\lambda+i\varepsilon)t}V^{1/2}e^{-itA}f\,dt, \qquad f \in \mathfrak{H}. \qquad (1.22)$$

Вытекающее из него равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} ||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda = 2\pi\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}||V^{1/2}e^{-itA}f||^2 dt \qquad (1.23)$$

и аналогичное равенство, связывающее $R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)$ с полугруппой $\exp(-itA^*)$, $t > 0$, дают требуемое.

Так как $1_+) \Longleftrightarrow 2_+)$ (см. шаг i)), то импликация $2_+) \Longrightarrow 8_+)$ также доказана.

Импликации $\mathrm{i}_+) \Longrightarrow 11_+)$ и $\mathrm{i}_-) \Longrightarrow 11_-)$ при $\mathrm{i} \in \{8, 9, 10, 12, 13\}$ либо очевидны, либо уже отмечались выше, а эквивалентности $10_+) \Longleftrightarrow 11_+)$ и $10_-) \Longleftrightarrow 11_-)$ установлены на шаге v).

Для доказательства T-гладкости оператора $V^{1/2}L$ при условиях 10_+) докажем эквивалентность $10_+) \Longleftrightarrow 10_-)$.

Для этого нам понадобится (полезная и в дальнейшем) импликация

$$||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)|| \leqslant C/\varepsilon^{1/2} \Longrightarrow \varepsilon||R_A(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant 1 + 2\sqrt{2}C. \quad (1.24)$$

Так как

$$\begin{gathered} ||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}|| = ||V^{1/2}R_B(\lambda - i\varepsilon)|| \leqslant \sqrt{2/\varepsilon} \quad \text{и} \\ \varepsilon||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)|| \leqslant 1, \end{gathered} \qquad (1.25)$$

то, учитывая (1.12), имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon||R_A(\lambda + i\varepsilon)|| &\leqslant \varepsilon||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)|| + \varepsilon||R_A(\lambda + i\varepsilon) - R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)|| \\ &\leqslant 1 + \varepsilon||2R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)|| \\ &\leqslant 1 + 2\sqrt{\varepsilon}||R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}|| \cdot \sqrt{\varepsilon}||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)|| \leqslant 1 + 2\sqrt{2}C. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

Точно так же приходим к оценке $\varepsilon||R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)|| \leqslant 1+2\sqrt{2}C$, которая вместе с равенством $\varepsilon||R_A(\lambda-i\varepsilon)|| = \varepsilon||R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)||$ и оценкой (1.26) доказывает импликацию (1.24)

С учетом (1.24) импликация $10_+) \Longrightarrow 10_-)$ доказывается уже совсем легко:

$$\begin{aligned}&||V^{1/2}R_A(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant ||V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)||\\&+||V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)\cdot 2i\varepsilon R_A(\lambda-i\varepsilon)||\\&\leqslant [C_{10}^{+}+2(1+2\sqrt{2})C_{10}^{+}\cdot C_{10}^{+}]\varepsilon^{-1/2}.\end{aligned}$$

Оценка оператор-функции $||V^{1/2}R_{A^*}(\lambda-i\varepsilon)||$, как и обратная импликация $10_-) \Longrightarrow 10_+)$, устанавливаются аналогично.

Таким образом, каждое из условий $1_\pm)$, $2_\pm)$ и $8_\pm)-13_\pm)$ влечёт оценки $||V^{1/2}R_A(\lambda\pm i\varepsilon)|| \leqslant C\varepsilon^{-1/2}$, которые, в свою очередь, ведут к (1.21).

Доказательство завершается теперь так же, как и на предыдущем шаге. •

1.2. Условия $1_\pm)-13_\pm)$ в теореме 1.4 можно условно разбить на две группы:

1) условия $3)-7_\pm)$, формулируемые в терминах оператора A;

2) условия $1_\pm), 2_\pm)$ и $8_\pm)-13_\pm)$, формулируемые в терминах пары операторов A и A^*.

В следующем предложении мы покажем попарную эквивалентность условий внутри каждой группы, а также выясним, что условия 1-й группы слабее условий 2-й группы (менее ограничительны).

Предложение 1.5. *Условия 1-й группы в теореме 1.4 (также, как и условия 2-й группы) попарно эквивалентны.*

Кроме того, каждое из условий 2-й группы влечет все условия 1-й группы.

Доказательство. Бóльшая часть эквивалентностей внутри каждой группы уже отмечена в процессе доказательства теоремы 1.4. Ниже мы докажем лишь некоторые, наиболее содержательные, из оставшихся эквивалентностей.

i) Установим импликацию $6_+) \Longrightarrow 4)$. Согласно (1.24) второе из условий $6_+)$ влечёт оценки $\varepsilon||R_A(\lambda\pm i\varepsilon)|| \leqslant \widetilde{C}_6^{\pm} := 1+2\sqrt{2}C_6^{\pm}$. Применяя тождество Гильберта для резольвент и первое из условий $6_+)$ (эквивалентное первому из неравенств (1.9) с $P_+ = I$), получим

$$\int ||V^{1/2}R_A(\lambda - i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant 2\int ||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda$$
$$+ 2\int ||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)2i\varepsilon R_A(\lambda - i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant\ 2C_6^{+2}||f||^2 \qquad (1.27)$$
$$+ 8\widetilde{C}_6^{+2}\int ||V^{1/2}R_A(\lambda + i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant\ 2C_6^{+2}(1 + 8\widetilde{C}_6^{+2})||f||^2.$$

Так же доказываются импликация $6_-) \Longrightarrow 4)$ и эквивалентность $6_+) \Longleftrightarrow 6_-)$.

ii) Докажем импликацию $4) \Longrightarrow 3)$ (обратная импликация установлена в теореме 1.4). Так как при условиях 4) оператор A подобен самосопряжённому, то A генерирует ограниченную C_0-группу $U(t) = \exp(-itA)$. Поэтому $U(t)$ имеет (экспоненциальный) тип ноль и, следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ справедливы тождества (1.22)–(1.23). Требуемое вытекает теперь из (1.23) и теоремы Фату о предельном переходе.

iii) Переходим к условиям 2-й группы. Эквивалентности $8_+) \Longleftrightarrow 8_-)$ и $10_+) \Longleftrightarrow 10_-)$ доказываются точно так же, как импликация $6_+) \Longrightarrow 4)$ на шаге i). Следует лишь для получения вспомогательных оценок $\varepsilon||R_A(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant \widetilde{C}_8^{\pm} := 1 + 2\sqrt{2}C_8^{\pm}$ воспользоваться импликациями $8_+) \Longrightarrow 10_+)$ и (1.24), доказанными в теореме 1.4.

Попутно получим импликации $8_+) \Longrightarrow 4)$ и $8_-) \Longrightarrow 4)$, дающие связь между условиями двух групп.

Докажем ипликации $10_+) \Longrightarrow 8_+)$ и $10_-) \Longrightarrow 8_-)$ (обратные утверждения содержатся в теореме 1.4).

На шаге vi) предыдущей теоремы показано, что условия $10_+)$ обеспечивают, наряду с подобием оператора A самосопряжённому ($L^{-1}AL = T = T^*$), также и T-гладкость оператора $V^{1/2}L$. Поэтому с некоторой константой $C > 0$ справедливы неравенства

$$\int ||V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)f||^2 d\lambda = \int ||V^{1/2}LR_T(\lambda \pm i\varepsilon)L^{-1}f||^2 d\lambda$$
$$\leqslant C||L^{-1}f||^2 \leqslant C||L^{-1}||^2 \cdot ||f||^2, \qquad \varepsilon > 0, \qquad (1.28)$$

означающие A-гладкость оператора $V^{1/2}$.

Далее, отправляясь от равенства $L^*A^*(L^{-1})^* = T^*$ и учитывая эквивалентность $10_+) \Longleftrightarrow 10_-)$, придём к оценке $||V^{1/2}(L^{-1})^*$

$R_T(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant C'/\varepsilon^{1/2}$, аналогичной оценке (1.21). Так как $T = T^*$, то по критерию Т. Като [28] оператор $V^{1/2}(L^{-1})^*$ является T-гладким. Повторяя доказательство (1.28), придём ко второму неравенству

$$||V^{1/2}R_{A^*}(z)f||^2_{H^2_\pm(E)} \leqslant C||L^*||^2 \cdot ||f||^2,$$

означающему A^*-гладкость оператора $V^{1/2}$. Тем самым доказаны обе импликации $10_\pm) \Longrightarrow 8_\pm)$. Остальные эквивалентности либо уже обсуждались ранее, либо легко сводятся к только что установленным. $\bullet$

Замечание 1.5. a) Условия $1_\pm) - 13_\pm)$ теоремы 1.4 не являются, как показывают примеры (см. §2), необходимыми для подобия самосопряженному с абсолютно непрерывным спектром. В то же время они оказываются необходимыми при дополнительном условии (2.1) (см. §2);

b) Условия $||V^{1/2}R_A(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant \varepsilon^{1/2}$ (менее ограничительные, чем $6_\pm$)) не являются достаточными для подобия самосопряженному, хотя и остаются таковыми (а также и необходимыми) при дополнительных предположениях (см. §2).

То же относится и к импликации $4) \Longrightarrow 8_+)$ (а, значит, и к эквивалентности $4) \Longleftrightarrow 8_+)$) : она верна при дополнительном условии (2.1), но, по-видимому, не верна в общем случае. Другими словами, речь идет о примере такого оператора A вида (1.1), что $V^{1/2}$ является A-гладким, но не является A^*-гладким.

c) Мне не известно прямое (элементарное) доказатльство эквивалентности $10_+) \Longleftrightarrow 8_+)$, не использующее теоремы 1.1 и критерия Т. Като T-гладкости.

d) Достаточность условий $1_\pm$), 3), $8_\pm$) для подобия самосопряженному содержится (с теми же доказательствами) в [14] и [9]. Ряд других условий, хотя явно и не сформулирован в [14] и [9], по существу там содержится. Так, например, доказательство подобия при условиях 10_+) отличается от такового же (содержащегося в [9]) при условиях 8_+) лишь тем, что в (1.18) используется оценка (1.6) для $R_B(z)$ вместо более грубой оценки $||V^{1/2}R_B(\lambda \pm i\varepsilon)|| \leqslant \sqrt{2/\varepsilon}$.

Отметим ещё, что в [2] при условии абсолютной непрерывности спектра оператора A (в смысле [12]) подобие самосопряженному при условиях, близких к $12_\pm$), доказано с помощью функциональной модели диссипативного оператора (см. [20, 16]). Именно, условия в [2] сформулированы в терминах предельных значений J-формы $J-\theta_A^*(\lambda+i0)J\theta(\lambda+i0)$ характеристической функции $\theta_A(z)$.

Условия $12_\pm$) и $13_\pm$) очевидно выполнены, если $\sup_{z\notin\mathbb{R}}|\theta_A(z)|<\infty$. Подобие самосопряжённому при указанном условии установлено Л. А. Сахновичем [19].

§2. О подобии самосопряжённому при условии слабой корреляции положительной и отрицательной частей мнимой компоненты

2.1. Для диссипативных операторов список условий подобия самосопряжённному значительно шире списка, указанного в теореме 1.4. Более того, все перечисленные в теореме 1.4 достаточные условия подобия являются (в случае диссипативного A) также и необходимыми.

С. Н. Набоко [13] показал, что в ряде вопросов спектральной теории условие диссипативности можно заменить следующим условием:

$$C_1 := \sup_{\lambda\in\mathbb{C}_+}\max\{||P_+\theta_B(\lambda)P_-||,\quad ||P_-\theta_B(\lambda)P_+||\}<1, \tag{2.1}$$

в котором $\theta_B(\lambda)$ – характеристическая функция диссипативного оператора $B=G+iV$. Естественно называть условие (2.1) условием слабой коррелированности положительной и отрицательной частей мнимой компоненты $A_I=JV$ оператора A. В частности, Набоко показал в [13] с помощью функциональной модели, что на операторы этого класса переносится известная теорема Надя-Фояша ([33, 20]) о подобии диссипативного оператора самосопряжённому.

Ниже предлагается доказательство упомянутого результата из [13], не использующее функциональной модели, а также пополняется список критериев подобия самосопряжённому.

Теорема 2.1. *Пусть* $A=G+iJV$ – *оператор вида* (1.1)–(1.2), *удовлетворяющий условиям* (2.1). *Тогда следующие условия экви-*

валентны:

1) *Оператор A подобен самосопряжённому;*
2) $\sup\limits_{\varepsilon>0} \int \varepsilon ||R_A(\lambda \pm i\varepsilon)f||^2 d\lambda \ \leqslant\ C_2^2 ||f||^2, \quad f \in \mathfrak{H};$
3) $||(A-z)^{-1}|| \leqslant C_3(|\operatorname{Im} z|)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-\,;$
4) $V^{1/2}(A-z)^{-1} f \in H^2_+(E), \quad V^{1/2}(A^*-z)^{-1} f \in H^2_+(E), \qquad f \in \mathfrak{H};$
5) $V^{1/2}(A-z)^{-1} f \in H^2_\pm(E), \qquad f \in \mathfrak{H};$
6) $||V^{1/2}(A-z)^{-1}|| \leqslant C_6(|\operatorname{Im} z|)^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-\,;$
7) $||\theta_A(z)^* J \theta_A(z)|| \leqslant C_7, \qquad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-\,;$
8) $||\theta_A(z)|| \leqslant C_8, \qquad z \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-\,.$

При выполнении любого из условий 2)–7) простая часть оператора A подобна самосопряженному с абсолютно непрерывным спектром.

Доказательство. i) Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Условие 2) означает, что при каждом $\sigma > 0$ вектор-функция $R_A(z)f$ принадлежит векторным классам Харди $H^2_\pm(\sigma; \mathfrak{H})$ в полуплоскостях $\mathbb{C}^\sigma_\pm := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geqslant \pm\sigma\}$ и $||R_A(z)||_{H^2_\pm(\sigma;\mathfrak{H})} \leqslant C_2 ||f|| \sigma^{-1/2}$. Из (1.10) и последней оценки с $\sigma = \varepsilon/2$ получаем требуемое неравенство

$$||R_A(\lambda \pm i\varepsilon)f|| \leqslant (\pi\varepsilon/2)^{-1/2} ||R_A(z)f||_{H^2_\pm(\sigma;\mathfrak{H})} \leqslant 2C_2 \pi^{-1/2} ||f|| \varepsilon^{-1}.$$

ii) Установим импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Воспользуемся для этого элементарным неравенством

$$(a+b)^2 \ \leqslant\ (1+\delta^{-1})a^2 + (1+\delta)b^2, \qquad \delta > 0. \tag{2.2}$$

Так как $2||P_- V^{1/2} R(z) V^{1/2} P_+|| = ||P_- \theta_B(z) P_+|| \leqslant C_1$ при $z \in \mathbb{C}_+$, то из тождества Гильберта (1.12) получаем

$$\begin{aligned}
&\int ||P_- V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&\leqslant (1+\delta^{-1}) \int ||P_- V^{1/2} R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
+&(1+\delta) \int ||2P_- V^{1/2} R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon) V^{1/2} P_+ V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \quad (2.3)\\
\leqslant&(1+\delta^{-1}) \int ||P_- V^{1/2} R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
+&(1+\delta) C_1^2 \int ||P_+ V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из (2.1), (2.2) и очевидного соотношения

$$R_A(\lambda+i\varepsilon) - R_B(\lambda-i\varepsilon) = R_B(\lambda-i\varepsilon)[2iVP_- + 2i\varepsilon] R_A(\lambda+i\varepsilon)$$

вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
&\int ||P_+ V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&\leqslant (1+\delta^{-1}) \int ||P_+ V^{1/2} R_B(\lambda-i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&+ (1+\delta)^2 \int ||2P_+ V^{1/2} R_B(\lambda-i\varepsilon) V^{1/2} P_- V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&+ (1+\delta)(1+\delta^{-1}) \int ||2P_+ V^{1/2} R_B(\lambda-i\varepsilon) \cdot i\varepsilon R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&\leqslant (1+\delta^{-1}) \int ||P_+ V^{1/2} R_B(\lambda-i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&+ (1+\delta)^2 C_1^2 \int ||P_- V^{1/2} R_A(\lambda+i\varepsilon) f||^2 d\lambda \\
&+ \widetilde{C}_2 \int ||P_+ V^{1/2} R_B(\lambda-i\varepsilon) f||^2 d\lambda,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

в котором $\widetilde{C}_2 := 2(1+\delta)(1+\delta^{-1}) C_2^2$.

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\widetilde{C}_1 := (1+\delta) C_1 < 1$. Складывая (2.3) и (2.4) и применяя лемму 1.2, приходим к оценке

$$\begin{gathered}(1-\widetilde{C}_1^2)\int ||V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ \leqslant (1+\delta^{-1})\int ||V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)f||^2 d\lambda \\ +\widetilde{C}_2\int ||P_+V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant 2\pi(1+\delta^{-1}+\widetilde{C}_2)||f||^2.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Аналогично устанавливается вторая оценка

$$(1-\widetilde{C}_1^2)||V^{1/2}R_{A^*}(z)f||^2_{H^2_+(E)} \ \leqslant\ 2\pi(1+\delta^{-1}+\widetilde{C}_2)||f||^2. \tag{2.6}$$

Оценки (2.5)–(2.6) доказывают требуемую импликацию.

iii) Импликации 4) $\Longrightarrow$ 5) и 5) $\Longrightarrow$ 6) верны без условия (2.1) и доказаны в теореме 1.4. Эквивалентность 6) $\Longleftrightarrow$ 7)–следствие тождества (1.15).

Установим 7) $\Longrightarrow$ 8). Аналогично L_2-оценке (2.2) получим

$$\begin{aligned}||P_+V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| &\leqslant ||P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| \\ &+ C_1||P_-V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}||.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, пользуясь уже отмечавшимися ранее соотношениями

$$\begin{aligned}&||R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| = ||V^{1/2}R_A(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant C_6/\sqrt{\varepsilon}, \\ &||V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant \sqrt{2/\varepsilon}\end{aligned} \tag{2.8}$$

и повторяя вывод неравенства (2.4), придём к оценке

$$\begin{aligned}&||P_-V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| \leqslant ||P_-V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)V^{1/2}|| \\ &+2||P_-V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| \\ &+2||P_-V^{1/2}R_B(\lambda-i\varepsilon)\cdot\varepsilon R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| \\ &\leqslant 1+2\sqrt{2}C_7+C_1||P_+V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}||.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Складывая (2.7) и (2.9), получим

$$\begin{aligned}||\theta_A(\lambda+i\varepsilon)|| &\leqslant 1+2||V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}|| \\ &\leqslant C_8 := 1+4(1+\sqrt{2}C_6)(1-C_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Аналогично устанавливается оценка $||\theta_A(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant C_8$.

iv) Докажем импликацию 8) $\Longrightarrow$ 2). Так как импликация 8) $\Longrightarrow$ 7) и эквивалентность 7) $\Longleftrightarrow$ 6) очевидны, то достаточно установить импликацию 6) $\Longrightarrow$ 2). Последняя же верна без условия (2.1) и содержится в теореме 1.4.

Действительно, импликация $||V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)|| \leqslant C_6\varepsilon^{1/2} \Longrightarrow \varepsilon\int ||R_A(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant C_2^2||f||^2$ доказана в неравенстве (1.18). Импликация

$$||V^{1/2}R_A(\lambda-i\varepsilon)|| \leqslant C_6\varepsilon^{1/2} \Longrightarrow \varepsilon\int ||R_A(\lambda-i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant C_2^2||f||^2$$

доказывается аналогично.

Осталось заметить, что при выполнении одного из условий 2)–8) подобие простого оператора A самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром вытекает из импликации 4) $\Longrightarrow$ 1), доказанной в теореме 1.4. $\bullet$

Пример 2.2. Рассмотрим оператор $A : f \to \mathrm{sign}x\cdot f''(x)$ с естественной областью определения $\mathcal{D}(A) = W_2^2(\mathbb{R})$. Оператор A является вполне несамосопряжённым расширением симметрического оператора $A_0 := A\lceil\mathcal{D}(A_0)$ с областью $\mathcal{D}(A_0) = \{f \in W_2^2(\mathbb{R}) : f(0) = f'(0) = 0\}$ и индексами деффекта $n_\pm(A_0) = 2$. Исходя из этого, несложно сосчитать характеристическую функцию $\theta_A(\lambda)$:

$$\theta_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2+i & (1-i)/\sqrt{-\lambda} \\ (1-i)\sqrt{\lambda} & 2+i \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sqrt{\lambda}$ означает ветвь двузначной функции на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$, выделяемую условием $\sqrt{1} = 1$.

Легко видеть, что как сама характеристическая функция $\theta_A(\lambda)$, так и её J-форма $J - \theta_A^*(\lambda)J\theta_A(\lambda)$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, не являются ограниченными в $\mathbb{C}_+$. Тем не менее, оператор A подобен самосопряжённому, $LAL^{-1} = T = T^*$ (см. [24], а также [27], где содержится другое доказательство этого факта.) Так как $W_A(\lambda)$ не ограничена лишь в окрестностях нуля и бесконечности, то спектр оператора T абсолютно непрерывен. Хотя оператор A не имеет вид (1.1), для него справедлив аналог теоремы 1.4.

Этот пример показывает, что условия теоремы 1.4 (без дополнительных ограничений типа (2.1)) являются лишь достаточными для подобия самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром.

Отметим ещё, что $\det W_A(\lambda) = 5+4i$. Из этого равенства можно заключить, что абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(A)$ не пуст, ибо $|\det \theta_A(\lambda)| \neq 1$.

2.2. В процессе доказательства теоремы 2.1 получено следующее дополнение к известной теореме Дэвиса–Фояша [25].

Теорема2.3. *Пусть* $A = G + iJV$ *– оператор вида* (1.1)–(1.2), *удовлетворяющий условиям* (2.1). *Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *Оператор* A *подобен диссипативному;*

2) $\sup\limits_{\varepsilon>0} \int \varepsilon ||R_A(\lambda - i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant C_2^2 ||f||^2, \quad f \in \mathfrak{H};$

3) $||(A-z)^{-1}|| \leqslant C_3(|\operatorname{Im} z|)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{C}_-;$

4) $V^{1/2}(A^*-z)^{-1} f \in H^2_+(E), \qquad f \in \mathfrak{H};$

5) $V^{1/2}(A-z)^{-1} f \in H^2_-(E), \qquad f \in \mathfrak{H};$

6) $||V^{1/2}(A-z)^{-1}|| \leqslant C_6(|\operatorname{Im} z|)^{-1/2}, \qquad z \in \mathbb{C}_-;$

7) $||\theta_A(z)^* J \theta_A(z)|| \leqslant C_7, \qquad z \in \mathbb{C}_+;$

8) $||\theta_A(z)|| \leqslant C_8, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$

Доказательство. Импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6) $\Longrightarrow$ 7) $\Longrightarrow$ 2) установлены в процессе доказательства теоремы 2.1.

Так, например, при доказательстве неравенства (2.5) ((2.6)) использована лишь оценка $\varepsilon||(A-\lambda-i\varepsilon)^{-1}|| \leqslant C_2$ $(\varepsilon||(A-\lambda+i\varepsilon)^{-1}|| \leqslant C_2)$ для верхней (нижней) полуплоскости, т.е. лишь "половина" условия (3). Тем самым, в действительности, доказаны две импликации, вторая из которых

$$\varepsilon||(A-\lambda+i\varepsilon)^{-1}|| \leqslant C_2 \Longrightarrow V^{1/2} R_{A^*}(z) f \in H^2_+(E), \quad f \in \mathfrak{H},$$

в точности совпадает с импликацией 3) $\Longrightarrow$ 4).

Заключительная импликация 7) $\Longrightarrow$ 1) составляет содержание известной теоремы Дэвиса–Фояша [25] и справедлива без условия (2.1). $\bullet$

Замечание 2.4. Эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 8) в теоремах 2.1 и 2.2 доказаны С. Н. Набоко [13] с помощью функциональной модели. Остальные эквивалентности, по-видимому, новы.

Условия 2) и 3) в теореме 2.1, очевидно, необходимы, но не достаточны (см. соответственно [11] и [13]) для подобия самосопряженному без условия (2.1). Примеры показывают, что условия 4)–7) в теореме 2.1 не являются ни необходимыми, ни достаточными для подобия оператора A самосопряженному, а условия 4) и 5), а также 5) и 6) – не эквивалентны.

§3. Подобие треугольного оператора диагональному и T-гладкость.

3.1. Пусть A – замкнутый оператор в $\mathfrak{H}$ с вещественным спектром, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Напомним, что проектор-функция $F(t)$, определённая на $\mathbb{R}$, называется спектральной функцией оператора A, если:

a) подпространства $\mathfrak{H}_t := F(t)\mathfrak{H}$ образуют неубывающее семейство, т.е. $\mathfrak{H}_{t_1} \subset \mathfrak{H}_{t_2}$ при $t_1 < t_2$;

b) каждое подпространство $\mathfrak{H}_t$ инвариантно для A;

c) $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = I$, т.е. пересечение всех подпространств $\mathfrak{H}_t$ есть $\{0\}$, а их объединение плотно в $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $P(t) := P_A(t) \quad (t \in \mathbb{R})$ ортогональный проектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_t$. Ясно, что $P(t)$ – ортогональная спектральная функция оператора A, называемая его спрямлённой спектральной функцией. Ясно также, что $P(t)$ непрерывна слева одновременно с $F(t)$.

Отправная точка исследований этого параграфа – следующий результат Гохберга и Крейна.

Теорема 3.1 [5]. *Пусть A – максимальный диссипативный оператор в $\mathfrak{H}$ с вещественным спектром и ограниченной мнимой компонентой $V \geqslant 0$. Для того, чтобы A был подобен самосопряжённому, необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная слева ортогональная спектральная функция $P(t) \quad (t \in \mathbb{R})$ оператора A, разделяющая его спектр и такая, что оператор-фунция $V^{1/2}P(t)V^{1/2}$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$||V^{1/2}\big(P(t_2) - P(t_1)\big)V^{1/2}|| \leqslant C|t_2 - t_1|, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Условие (3.1) не является, вообще говоря, необходимым для подобия недиссипативного оператора самосопряжённому. Тем не менее, справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. *Пусть оператор $A = G + iJV$ удовлетворяет условиям 2-й группы теоремы 1.4. Тогда:*

1) *существует два непрерывных слева (ортогональных) разложения единицы $P(t)$ и $P_*(t)$, разделяющие спектры операторов A и A^* соответственно;*

2) *оператор-функции $V^{1/2}P(t)V^{1/2}$ и $V^{1/2}P_*(t)V^{1/2}$ удовлетворяют условию Липшица.*

Доказательство. 1) По теореме 1.4 оператор A подобен самосопряжённому, $L^{-1}AL = T = T^*$. Пусть E_t – непрерывное слева разложение единицы оператора T. Тогда $F(t) := LE_tL^{-1}$ будет косой спектральной функцией оператора A, так как $\mathfrak{H}_t := F(t)\mathfrak{H} = LE_t\mathfrak{H} \in \operatorname{Lat} A$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ и семейство подпространств $\{\mathfrak{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$– неубывающее. Кроме того, из равенств $AF(t) = LTE_tL^{-1}$ и $A^*(I - F^*(t)) = (L^{-1})^*T(I - E_t)L^*$ вытекают соотношения $\sigma(A\lceil\mathfrak{H}_t) = \sigma(T\lceil E_t\mathfrak{H}) \subset (-\infty, t]$ и $\sigma(A^*\lceil\mathfrak{H}_t^+) = \sigma(A^*(I - F^*(t))\lceil\mathfrak{H}_t^+) = \sigma(T\lceil(I - E_t)\mathfrak{H}) \subset [t, \infty)$. Эти соотношения означают, что спрямлённая спектральная функция $P(t) = P^*(t) := P_A(t)$ оператора A разделяет его спектр.

2) В доказательстве теоремы 1.4 показано, что оператор $V^{1/2}(L^{-1})^*$ является T-гладким. Так как T самосопряжён, то по критерию Т. Като [28] одно из эквивалентных условий T-гладкости – следующее:

$$||V^{1/2}(L^{-1})^*(E_{t_2} - E_{t_1})||^2 \leqslant C|t_2 - t_1|, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

В терминах косой спектральной функции $F(t)$ оператора A условие (3.2) можно записать следующим, эквивалентным, образом:

$$||(F(t_2) - F(t_1))V^{1/2}||^2 = ||V^{1/2}(F(t_2)^* - F(t_1)^*)||^2 \leqslant C||L^*|| \cdot |t_2 - t_1|. \tag{3.3}$$

Для завершения доказательства остаётся показать, что оценка (3.3) справедлива также для спрямлённой спектральной функции $P(t) = P_A(t)$.

Для этого положим $\Delta P := P(t_2) - P(t_1)$ и $\Delta F := F(t_2) - F(t_1)$. Замечая, что $\Delta P \cdot \Delta F h = \Delta P h$ для $h \in \mathfrak{H}_2 := \mathfrak{H}_{t_2}$, получим

$$||(P(t_2) - P(t_1))h|| \leqslant ||(F(t_2) - F(t_1))h||, \qquad h \in \mathfrak{H}_2. \tag{3.4}$$

Это неравенство доказывает (3.1) при дополнительном условии $P(t_2) = I$ (т.е. при условии $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$).

Освободимся теперь от условия $P(t_2) = I$. Положим $\widetilde{A} := A\lceil\mathfrak{H}_2$ и заметим, что $\widetilde{A}$ подобен самосопряжённому оператору $\widetilde{T} := T\lceil E_{t_2}\mathfrak{H}$. Ясно, что спрямлённая (ортогональная) спектральная функция $\widetilde{P}(t)$ оператора $\widetilde{A}$ определяется равенством

$$P(t) = \begin{cases} P(t)\lceil\mathfrak{H}_2, & -\infty < t \leqslant t_2, \\ P(t_2)\lceil\mathfrak{H}_2, & t_2 \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

Далее, очевидно, $\widetilde{A}^* = P(t_2)A^*\lceil\mathfrak{H}_2$, откуда $\widetilde{V}_1 := (\widetilde{A} - \widetilde{A}^*)/2i = P(t_2)V_1\lceil\mathfrak{H}_2$. Отсюда следует, что $P(t_2)E_t^{V_1}P(t_2)\lceil\mathfrak{H}_2$ – разложение единицы оператора $\widetilde{V}_1$, где $E_t^{V_1}$ – разложение единицы для V_1. Поэтому $\widetilde{V} := |\widetilde{V}_1| = P(t_2)|V_1|\lceil\mathfrak{H}_2 = P(t_2)V\lceil\mathfrak{H}_2$.

Так как $\widetilde{P}(t_2) = I_{\mathfrak{H}_2}$, то, применяя (3.4) к оператору $\widetilde{A}$, получим

$$||\Delta\widetilde{P}\widetilde{V}\Delta\widetilde{P}|| = ||\widetilde{V}^{1/2}\Delta\widetilde{P}\widetilde{V}^{1/2}|| \leqslant C||L^*|| \cdot |t_2 - t_1|, \tag{3.5}$$

где $\Delta\widetilde{P} := \widetilde{P}(t_2) - \widetilde{P}(t_1)$. Но легко видеть, что $\Delta\widetilde{P}\widetilde{V}\Delta\widetilde{P} = \Delta\widetilde{P}(P(t_2)\cdot V\lceil\mathfrak{H}_2)\Delta\widetilde{P} = \Delta P \cdot V \cdot \Delta P\lceil\mathfrak{H}_2$. Поэтому из (3.5) получаем неравенство

$$||\Delta P \cdot V \cdot \Delta P|| = ||\Delta P \cdot V \cdot \Delta P\lceil\mathfrak{H}_2|| = ||\Delta\widetilde{P} \cdot \widetilde{V} \cdot \Delta\widetilde{P}|| \leqslant C||L^*|| \cdot |t_2 - t_1|, \tag{3.6}$$

эквивалентное (3.1).

Аналогично, отправляясь от T-гладкого оператора $V^{1/2}L$ (его T-гладкость установлена в теореме 1.4), придём к оценке $||V^{1/2}\Delta P_* V^{1/2}|| \leqslant C||L^{-1}|| \cdot |t_2 - t_1|$. •

Следствие 3.3. *Пусть $A = G + iJV$ – оператор вида* (1.1)–(1.2), *и выполнено условие* (2.1). *Тогда условие* (3.1) *необходимо для подобия оператора A самосопряжённому.*

Доказательство. Если A подобен самосопряжённому, то по теореме 2.1 $V^{1/2}$ является одновременно A-гладким и A^*-гладким. Остаётся применить предложение 3.2.

Замечание 3.4. a) Каждое из (эквивалентных) условий первой группы теоремы 1.4 влечёт липшицевость не двух, а лишь одной функции $V^{1/2}P_*(t)V^{1/2}$.

b) Предложение 3.2 и следствие 3.3 распространяют теорему 3.1 в части необходимости на недиссипативный случай. Доказательство предложения 3.2 аналогично содержащемуся в [9] для диссипативных операторов, где доказательство Гохберга и

Крейна было существенно упрощено. Доказательство импликации (3.4) $\Longrightarrow$ (3.6) аналогично содержащемуся в [5].

Дополним предложение 3.2 следующим простым утверждением, доказательство которого опускается.

Предложение 3.5. *Пусть* V_1 *– ограниченный самосопряжённый оператор в* $\mathfrak{H}$ *с полярным разложением* $V_1 = JV$ $(V \geqslant 0, J = J^* = J^{-1})$ *и* $P(t)$ *– его непрерывное слева ортогональное разложение единицы. Если функция* $V^{1/2}P(t)V^{1/2}$ *удовлетворяет условию Липшица, то существует единственный оператор* A *с мнимой компонентой* $A_I := (A - A^*)/2i = JV$*, вещественным спектром* $(\sigma(A) \subset \mathbb{R})$ *и спектральной функцией* $P(t)$*, разделяющей его спектр. Этот оператор имеет вид*

$$A = \int_a^b t dP(t) + 2i \int_a^b P(t)JV dP(t).$$

3.2. Пусть μ – конечная положительная непрерывная мера на $[0,1]$, $m \leqslant \infty$. Обозначим $L^2_m(d\mu) := L^2_m([0,1]; d\mu) = L^2([0,1]; d\mu) \otimes l^2_m$ гильбертово пространство вектор-функций $f = \{f_j\}_1^m$ с нормой

$$||f||^2_{L^2_m} = \sum_{j=1}^m \int_0^1 |f_j(x)|^2 d\mu(x) = \int_0^1 ||f(x)||^2_{l^2_m} d\mu(x),$$

где $l^2_m = \mathbb{C}^m$, если $m < \infty$, и $l^2_\infty = l^2$.

Рассмотрим в $L^2_m(d\mu)$ треугольный оператор $A = G + iJV$ вида

$$A = Q_\alpha + iK : f \mapsto \alpha(x)f(x) + 2i \int_x^1 k(x,t)f(t)d\mu(t), \tag{3.7}$$

где $\alpha(x) = \overline{\alpha}(x)$ – измеримая (по Борелю) функция на $[0,1]$ и $k(x,t) = (k_{ij}(x,t))_1^m$–$\mu \times \mu$-измеримое эрмитово матричное ядро на $[0,1] \times [0,1]$.

Ясно, что $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, и мнимая компонента JV оператора A имеет вид: $JV = K_I := (K - K^*)/2i$, $\quad K_I : f \mapsto \int_0^1 k(x,t)f(t)d\mu(t)$. Кроме того, разложение единицы $E_{Q_\alpha}(t)$ оператора Q_α $(Q_\alpha : f \mapsto \alpha f)$ разделяет спектр оператора A. Поэтому, если A подобен самосопряжённому, то, согласно предложению 3.5, $P(t) := E_{Q_\alpha}(t)$ будет его спрямлённой (ортогональной) спектральной функцией.

Наша ближайшая цель – выразить условие (3.1) в терминах меры μ и функций $\alpha(x)$ и $k(x,t)$.

В этом пункте мы рассматриваем только диссипативные операторы вида (3.7). Будем говорить, что ядро $k(x,t)$ факторизуемо, если $k(x,t) = \Phi(x)\Phi^*(t)$, где $\Phi := (\varphi_{ij}) = \mathrm{row}(\varphi_1, ..., \varphi_n, ...)$ – матрица-функция, состоящая из m строк и бесконечного числа столбцов $\varphi_j = \mathrm{col}(\varphi_{ij})_{i=1}^m \in L_m^2(d\mu)$ и такая, что порождаемое ею отображение

$$\Phi : l^2 \to L_m^2(d\mu), \qquad \Phi : a = (a_j)_1^\infty \mapsto (\Phi a)(x) = (\sum_j \varphi_{ij}(x) a_j)_{i=1}^m \tag{3.8}$$

ограничено.

Предложение 3.6. *Пусть A – диссипативный оператор вида* (3.7) *с факторизуемым ядром $k(x,t) = \Phi(x)\Phi^*(t)$. Тогда $V^{1/2} = K_I^{1/2}$ удовлетворяет условию* (3.1) *в точности тогда, когда*

$$\beta(x) := \int\limits_{-\infty < \alpha(t) \leqslant x} ||k(t,t)|| d\mu(t) = \int\limits_{\alpha^{-1}(-\infty, x]} ||k(t,t)|| d\mu(t) \tag{3.9}$$

удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Достаточность. Пусть β удовлетворяет условию Липшица. Так как ядро $k(x,t)$ факторизуемо, то $||k(x,t)||^2 \leqslant ||k(x,x)|| \cdot ||k(t,t)||$ для $\mu \times \mu$-п.в. $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$. Далее, заметим, что спектральные меры E_{Q_α} и E_Q операторов Q_α и Q $(Q : f \mapsto xf)$ связаны равенством $E_{Q_\alpha}(\Delta) = E_Q(G_\Delta)$, где $\Delta = (s_1, s_2)$ – произвольный интервал и $G_\Delta := \alpha^{-1}(\Delta) = \{x \in [0,1] : s_1 < \alpha(x) < s_2\}$. Учитывая эти соотношения, получим

$$\begin{aligned} &||V^{1/2} E_{Q_\alpha}(\Delta) f||^2 = (V E_{Q_\alpha}(\Delta) f, E_{Q_\alpha}(\Delta) f) \\ &= \int\limits_{G_\Delta} d\mu(x) \int\limits_{G_\Delta} \big(k(x,t) f(t), f(x)\big)_{l_m^2} d\mu(t) \end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_{G_\Delta \times G_\Delta} ||k(x,x)||^{1/2} \cdot ||k(t,t)||^{1/2} \cdot ||f(t)||_{l^2_m} \cdot ||f(x)||_{l^2_m} d\mu(t) d\mu(x)$$
$$= (\int\limits_{G_\Delta} ||k(x,x)||^{1/2} \cdot ||f(x)||_{l^2_m})^2 d\mu(x)$$
$$\leqslant \int\limits_{G_\Delta} ||k(x,x)|| d\mu(x) \cdot \int\limits_{G_\Delta} ||f(x)||^2_{l^2_m} d\mu(x) \leqslant (\beta(s_2) - \beta(s_1)) \cdot ||f||_{L^2_m(d\mu)}. \tag{3.10}$$

Неравенство (3.10) доказывает липшицевость функции $||V^{1/2} E_{Q_\alpha}(t)||^2$, так как функция β – липшицева.

Необходимость. Пусть теперь функция $||V^{1/2} E_{Q_\alpha}(t)||^2$ – липшицева. Из (3.8) легко следует, что сопряжённый оператор Φ^* имеет вид

$$\Phi^* : L^2_m(d\mu) \to l^2, \qquad \Phi^* : f \mapsto \int\limits_0^1 \Phi^*(t) f(t) d\mu(t). \tag{3.11}$$

Следовательно, K_I допускает факторизацию через l^2, $K_I = \Phi\Phi^*$.

Далее, обзначим через $\sigma(t) := \sigma_\alpha(t) := \mathrm{mes}\,\{x \in [0,1] : \alpha(x) \leqslant t\}$ функцию распределения для функции α, $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$, где $\alpha_1 := \inf\{\alpha(x) : x \in [0,1]\}$, $\alpha_2 := \sup\{\alpha(x) : x \in [0,1]\}$.

Так как $||E_{Q_\alpha}(t)\Phi|| = ||\Phi^* E_{Q_\alpha}(t)|| = ||V^{1/2} E_{Q_\alpha}(t)||$, то для каждого $a = \{a_j\}_1^\infty \in l^2$ и каждого интервала $\Delta = (s_1, s_2) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$ имеем

$$\begin{aligned} ||E_{Q_\alpha}(\Delta)\Phi a||^2 &= \sum_{i=1}^m \int\limits_{G_\Delta} |\sum_{j=1}^\infty \varphi_{ij}(x) a_j|^2 d\mu(x) \\ &= \int\limits_{s_1}^{s_2} ||\Phi(\sigma(t))a||^2_{l^2_m} d\mu(\sigma(t)) \leqslant C|\Delta| \cdot ||a||^2_{l^2}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Пусть $\nu = \mu \circ \sigma$ – суперпозиция функций μ и σ (здесь μ – функция распределения меры $d\mu$) и $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ – её разложение Лебега.

Из (3.12) следует, что $\Phi(\sigma(t))a = 0$ для ν_s-п.в. $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и всех $a \in l^2$. Отсюда заключаем, что

$$\Phi(\sigma(t)) = 0 \text{ для } \nu_s\text{-п.в. } t \in [\alpha_1, \alpha_2]. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) немедленно следует неравенство

$$||\Phi(\sigma(t))a||^2_{l^2_m} \cdot \nu'_{ac}(t) \leqslant C||a||^2_{l^2_m} \text{ для п.в. } t \in [\alpha_1, \alpha_2], \quad a \in l^2,$$

эквивалентное, очевидно, следующему: $||\Phi(\sigma(t))||^2 \cdot \nu'_{ac}(t) \leqslant C$ для п.в. $t \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Объединяя его с (3.13), приходим к оценке

$$\int_{s_1}^{s_2} ||k(\sigma(t), \sigma(t))|| d\nu(t) =$$

$$= \int_{s_1}^{s_2} ||\Phi(\sigma(t))||^2 d\nu(t) = \int_{s_1}^{s_2} ||\Phi(\sigma(t))||^2 d\nu_{ac}(t) \leqslant C|s_2 - s_1|,$$

означающей липшицевость функции β. •

Для операторов с ядерной мнимой компонентой предложение 3.6 можно дополнить.

Предложение 3.7. *Пусть A – диссипативный оператор в $L^2_m(d\mu)$ вида* (3.7) *с факторизуемым ядром $k(x,t) = \Phi(x)\Phi^*(t)$ и $\int_0^1 \operatorname{tr} k(t,t)$ $d\mu(t) < \infty$. Тогда $V^{1/2} = K_I^{1/2}$ удовлетворяет условию* (3.1) *в точности тогда, когда функция*

$$\beta_1(x) := \int_{\alpha^{-1}(-\infty, x]} \operatorname{tr} k(t,t) d\mu(t) \tag{3.14}$$

удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Достаточность. Если β_1 липшицева, то β – также липшицева. Остаётся применить предложение 3.6.

Необходимость. Покажем вначале, что в случае факторизуемого ядра $k(x,t)$ условие $\int_0^1 \operatorname{tr} k(t,t) d\mu(t) < \infty$ эквивалентно ядерности оператора $K_I \geqslant 0$.

Пусть $\{e_i(t)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2(d\mu)$, а $\delta_j = (\delta_{kj})_{k=1}^m$ – ортонормированный базис в l^2_m (здесь δ_{kj} – символ Кронекера). Тогда $\{e_i \otimes \delta_j\}_{i,j=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2_m(d\mu) = L^2(d\mu) \otimes l^2_m$.

В силу (3.8) и (3.11) $K_I = \Phi\Phi^*$. Поэтому, вычисляя след в базисе $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$, где $e_{ij} := e_i \otimes \delta_j$, и пользуясь равенством Парсеваля, получим

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} K_I &= \sum_{i,j}(K_I e_{ij}, e_{ij}) = \sum_{i,j} ||\Phi^* e_{ij}||^2_{l^2} = \sum_{j,k}\sum_{i} |(\varphi_{jk}, e_{ij})|^2 = \\ &= \sum_{j,k} ||\varphi_{jk}||^2_{L^2(d\mu)} = \int_0^1 \operatorname{tr} k(t,t)d\mu(t) < \infty.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Итак, $K_I \in \mathfrak{S}_1$. То же верно, разумеется, и для оператора $E_{Q_\alpha}(\Delta)K_I E_{Q_\alpha}(\Delta)$, где $\Delta = (s_1, s_2) \subset [\alpha_1, \alpha_2]$. Обозначим через $\{e_j(\Delta)\}_1^{\infty}$ ортонормированный базис из его собственных векторов, а через $\{\lambda_j(\Delta)\}_1^{\infty}$ – множество соответствующих собственных значений.

Далее, для каждого вектора $f \in L^2_m(G_\Delta; d\mu)$ обозначим через $a_j := (f, e_j(\Delta))$ его коэффициенты Фурье. Согласно равенству Парсеваля

$$\sum_j \lambda_j(\Delta)|a_j|^2 = (K_I E_{Q_\alpha}(\Delta)f,\ E_{Q_\alpha}(\Delta)f) \leqslant C|\Delta|\cdot||f||^2_{L^2_m} = C|\Delta|\cdot||a||_{l^2}. \tag{3.16}$$

Так как (3.16) справедливо для всех $a \in l^2$, то $\lambda(\Delta) := \{\sqrt{\lambda(\Delta)}\}_1^{\infty} \in l^2$ и $\sum \lambda_j(\Delta) \leqslant C|\Delta|$.

С другой стороны, так как $E_{Q_\alpha}(\Delta)K_I E_{Q_\alpha}(\Delta)$ – неотрицательный интегральный оператор в $L^2_m(d\mu)$ с факторизуемым ядром $\chi_{G_\Delta}(x)k(x,t)\chi_{G_\Delta}(t) = \chi_{G_\Delta}(x)\Phi(x)(\chi_{G_\Delta}(t)\Phi(t))^*$, то по формуле следов (3.15)

$$\begin{aligned}\int_{G_\Delta} \operatorname{tr} k(t,t)d\mu(t) &= \int_0^1 \operatorname{tr} \chi_{G_\Delta}(t)k(t,t)d\mu(t) \\ &= \operatorname{tr} E_{Q_\alpha}(\Delta)K_I E_{Q_\alpha}(\Delta) = \sum \lambda_j(\Delta) \leqslant C|\Delta|.\end{aligned}$$

Значит, β_1 – липшицева. •

Следующая теорема, обобщающая результат Гохберга и Крейна [ГК], – основной результат этого пункта.

Теорема 3.8. *Пусть A – диссипативный оператор в $L^2_m(d\mu)$ вида (3.7) с факторизуемым ядром, а мера $d\mu$ непрерывна. Тогда:*

1) *для его подобия самосопряжённому необходимо и достаточно, чтобы функция* β *вида* (3.9) *удовлетворяла условию Липшица;*

2) *если к тому же* $\int_0^1 \operatorname{tr} k(x,x)d\mu(x) < \infty$, *то предыдущий критерий справедлив с заменой* β *на функцию* β_1 *вида* (3.14)*;*

3) *если в дополнение к условию* 1) $k(x,x) > 0$ *для* μ*-п.в.* $x \in [0,1]$, *то* A *подобен самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) получаются комбинированием теоремы 3.1 с предложениями 3.6 и 3.7 соответственно. Для доказательства утверждения 3) достаточно заметить, что оператор A простой, если $K(x,x) > 0$ для μ-п.в. $x \in [0,1]$. $\bullet$

В следующей простой лемме показывается, что непрерывное ядро с конечным следом факторизуемо.

Лемма 3.9. *Пусть* K_I – *неотрицательный ядерный интегральный оператор в* $L^2_m(d\mu)$ *с непрерывным ядром* $k(x,t)$. *Тогда* $k(x,t)$ *факторизуемо.*

Доказательство. Так как оператор K_I – ядерный в $L^2_m(d\mu)$, то существует ортонормированный базис $\{e_j\}_1^\infty$ из его собственных векторов, $K_I e_j = \lambda_j e_j$ $(1 \leqslant j < \infty)$. Полагая

$$\phi_j := \sqrt{\lambda_j} e_j =: col(\phi_{ij})_{i=1}^\infty \quad \text{и} \quad \Phi(x) = \operatorname{row}(\varphi_1, ...\varphi_n, ...) = (\varphi_{ij}(x)),$$

придём к искомой факторизации $k(x,t) = \Phi(x)\Phi^*(t)$. Действительно, нужно лишь проверить ограниченность отображения $\Phi : l^2 \to L^2_m(d\mu)$. Так как $k(x,t)$ непрерывно, то для каждого $a = \{a_j\}_1^\infty \in l^2$, пользуясь формулой следов, имеем

$$\sum_{i=1}^m \int_0^1 |\sum_{j=1}^\infty \varphi_{ij}(x) a_j|^2 d\mu(x) \leqslant \sum_{i=1}^m \int_0^1 \sum_j |\varphi_{ij}(x)|^2 \cdot \sum_j |a_j|^2 d\mu(x)$$

$$= ||a||^2_{l^2} \cdot \sum_i \int_0^1 k_{ii}(x,x) d\mu(x) = ||a||^2_{l^2} \cdot \int_0^1 \operatorname{tr} k(x,x) d\mu(x)$$

$$= ||a||^2_{l^2} \cdot \operatorname{tr} K_I. \quad \bullet$$

Замечание 3.10. Если $K_1 (\geqslant 0)$ – ядерный оператор в $L^2_m(d\mu)$, то из леммы 3.9 и предложений 3.6 и 3.7 вытекает, что функции β

и β_1 могут быть липшицевыми лишь одновременно. В частности, утверждение 1) теоремы 3.8 справедливо с β вместо β_1.

Замечание 3.11. а) При $\alpha(x) = x$ для операторов с факторизуемым ядром условие $\beta \in \operatorname{Lip} 1$ эквивалентно условию $k(x,t) \in L^\infty(d\mu) \times L^\infty(d\mu)$. В такой форме условие Q-гладкости оператора $K_I^{1/2}$ при $d\mu = dx$ доказано Т. Като [29]. Предложения 3.6 и 3.7 дают критерий Q_α-гладкости оператора $K_I^{1/2}$ для факторизуемых ядер в терминах их сужения на диагональ.

Для общих (не факторизуемых) ядер условие Q_α-гладкости $K_I^{1/2}$ также можно (аналогично [29]) выразить в терминах ядра $k(x,t)$, но нельзя, вообще говоря, выразить в терминах $k(x,x)$. Действительно, $k(x,x)$ (а также функции β и β_1 вида (3.9) и (3.14)) определены корректно лишь для факторизуемых ядер. В общем случае они не имеют смысла (если $k(x,t)$ не является непрерывным), так как можно изменить $k(x,x)$ на множестве положительной μ-меры, не изменяя оператора K. Существенной в этом круге вопросов является формула следов (3.15), не имеющая места для нефакторизуемых разрывных ядер.

в) Утверждение 1) теоремы 3.8 обобщает результат, анонсированный Гохбергом и Крейном [5], и совпадает с ним при $m < \infty$, $d\mu = dx$, $k(x,t) \in C(\Omega) \otimes \mathbb{C}^{m\times m}$ и непрерывной слева $\alpha(x)$. При $m \leqslant \infty$, $\alpha(x) = x$, $d\mu = dx$ и $K_I \in \mathfrak{S}_1$ утверждение 1) теоремы 3.8 другим (довольно сложным) методом доказано в [17]. При $m = 1, d\mu = dx$ и $k(x,t) = 1$ теорема 3.8 доказана в [33] (см. также [20]).

с) В недавней работе Васюнина и Купина [30] изучается треугольный диссипативный оператор A вида (3.7) в $L^2(d\mu)$ с факторизуемым (при $m = 1$) ядром $k(x,t)$ и произвольной, не обязательно непрерывной мерой $d\mu$. В этом случае A может иметь дискретный спектр в $\mathbb{C}_+$ и заведомо не подобен самосопряжённому. В [30] получены как необходимые, так и достаточные условия подобия оператора A нормальному оператору. Их исследование базируется на резольвентном критерии подобия диссипативного оператора нормальному, полученному Н. Бенамарой и Н. Никольским [22].

Приведём ещё один результат о подобии недиссипативного оператора

$$A = Q + iK : f \mapsto xf(x) + 2i \int\limits_x^1 k(x,t)f(t)dt, \quad f \in L^2[0,1],$$

самосопряжённому.

Теорема 3.12. *Пусть* $\varphi_j(x) \in C[0,1]$ *и*

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(t)}, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \quad (1 \leqslant j < \infty).$$

Пусть к тому же:

1) $\Phi(x) := \mathrm{row}(\varphi_1, ..., \varphi_n ...) \in \mathrm{Lip}\, 1$, *т.е.*

$$||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| = \big(\sum_j |\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)|^2\big)^{1/2}$$

$$\leqslant C|x_1 - x_2| \quad x_1, x_2 \in [0,1];$$

2) $K(x,x) > 0$, $x \in [0,1]$.

Тогда оператор A *подобен самосопряжённому в* $L^2[0,1]$.

Доказательство опускается из-за недостатка места.

Пример 3.13. Рассмотрим недиссипативный оператор $A = Q + iK$ в $L^2[0,1]$,

$$A : f \mapsto xf(x) + \frac{1}{m+1} \int\limits_0^x \big[\big(\frac{x}{t}\big)^{\frac{1}{m}} - \frac{t}{x}\big] f(t)dt, \quad m > 2.$$

Вводя оператор Харди $R_m : f \mapsto \frac{1}{mx}\int_0^x f(t)dt$ и замечая, что $||R_m|| = 2/m$, легко проверим равенство $(I - R_m)^{-1}A(I - R_m) = Q$

Таким образом, A подобен самосопряжённому с абсолютно непрерывным спектром. В то же время оператор $|K_I|^{1/2}$ не является Q-гладким. Действительно, в противном случае $|K_I|$ должен быть интегральным оператором с ядром $K_1(x,t) \in L^\infty([0,1] \times [0,1])$. Но это не так, ибо ядро оператора $|K_I|^2 = K_I^2$ не принадлежит $L^\infty([0,1] \times [0,1])$.

§4. Подобие треугольного оператора диагональному в пространствах $L^p[0,l]$

В этом параграфе мы изучаем подобие треугольного оператора

$$A = Q_\alpha + iK : f \mapsto \alpha(x)f(x) + i\int_0^x k(x,t)f(t)dt \qquad (4.1)$$

диагональному оператору $Q_\alpha : f \mapsto \alpha(x)f(x)$ в пространствах $L^p[0,l]$ при $l \leqslant \infty$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4.1. В этом пункте рассматриваются операторы вида (4.1) с ядрами $k(x,t)$, вырождающися на диагонали.

Обозначим через X_1 (X_2) множество всех измеримых в $\Omega = \{0 \leqslant t \leqslant x \leqslant l\}$ функций f, удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in(0,l)} \int_t^l |f(x,t)|dx < \infty \qquad \bigl(\operatorname*{vraisup}_{x\in(0,l)} \int_0^x |f(x,t)|dt < \infty\bigr). \qquad (4.2)$$

Отождествляя функции, равные при п.в. $(x,t) \in \Omega$, получим банаховы пространства, за которыми сохраним те же обозначения X_1 и X_2.

Далее, если оператор T действует в шкале $L^p[0,l]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, то обозначим через $||T||_p$ и $\mathrm{spr}_p(T)$ соответственно его норму и спектральный радиус в $L^p[0,l]$.

Теорема 4.1 [8]. *Пусть $l \leqslant \infty$, и $\alpha(x)$ – ограниченная, строго монотонно возрастающая функция на $[0,l]$. Предположим также, что ядро*

$$R(x,t) := \frac{|k(x,t)|}{\alpha(x) - \alpha(t)} \qquad (4.3)$$

порождает оператор R типа Вольтерра, $R : f \to \int_0^x R(x,t)f(t)dt$, который ограничен в $L^1[0,l]$ и $L^\infty[0,l]$ и $\max\{\mathrm{spr}_1(R), \mathrm{spr}_\infty(R)\} < 1/2$. Тогда оператор A вида (4.1) подобен оператору Q_α в $L^p[0,l]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Доказательство. i) Покажем вначале, что существует оператор M типа Вольтерра ($M : f \mapsto \int_0^x M(x,t)f(t)dt$) с ядром $M(x,t) \in X_1 \cap X_2$, который удовлетворяет уравнению

$$(I + M)(Q_\alpha + iK) = Q_\alpha(I + M). \qquad (4.4)$$

Заметим, что ограниченность оператора K в $L^1[0,l](L^\infty[0,l])$ эквивалентна условию $k(x,t) \in X_1(X_2)$. Поэтому, если ядро $M(x,t)$ лежит в $X_1 \cap X_2$, то оператор MK является интегральным оператором в $L^p[0,l]$ с ядром $(M*K)(x,t) := \int_t^x M(x,s)k(s,t)ds$, так как операторы M и K регулярны (см. [7]) в $L^1[0,1]$ и $L^\infty[0,l]$.

Теперь легко видеть, что уравнение (4.4) эквивалентно уравнению

$$[\alpha(x)-\alpha(t)]M(x,t) = ik(x,t) + i\int_t^x M(x,s)k(s,t)ds. \tag{4.5}$$

Покажем, применяя метод последовательных приближений, что оно имеет решение $M(x,t) \in X_1 \cap X_2$. Положим

$$M_0(x,t) = 0,\ \ M_{n+1}(x,t) = \frac{ik(x,t)}{\alpha(x)-\alpha(t)} + i\int_t^x \frac{M_n(x,s)k(s,t)}{\alpha(x)-\alpha(t)}ds. \tag{4.6}$$

Пусть $R_n(x,t)$ – итерированные ядра оператора R с ядром вида (4.3). Докажем по индукции справедливость неравенств

$$|M_n(x,t) - M_{n-1}(x,t)| \leqslant R_n(x,t), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.7}$$

Неравенство $|M_1(x,t)| \leqslant R_1(x,t) := R(x,t)$ с очевидностью вытекает из (4.6) и (4.3). Считая оценку (4.7) доказанной при $n \leqslant j$, установим её при $n = j+1$. Из (4.6) и (4.7) имеем

$$\begin{aligned} M_{j+1}(x,t) - M_j(x,t)| &\leqslant \int_t^x \frac{|M_n(x,s) - M_{n-1}(x,s)|}{\alpha(x)-\alpha(t)} \cdot |k(s,t)|ds \\ &\leqslant \int_t^x |M_j(x,s) - M_{j-1}(x,s)| \cdot \frac{|k(s,t)|}{\alpha(s)-\alpha(t)}ds \\ &= \int_t^x R_j(x,s)R_1(s,t)ds = R_{j+1}(x,t). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Неравенство (4.8) доказывает предположение индукции (4.7).

Заметим далее, что нормы $||R||_1$ и $||R||_\infty$ оператора R в $L^1[0,l]$ и $L^\infty[0,l]$ легко выражаются через его ядро:

$$||R||_1 = ||R(x,t)||_{X_1}, \quad ||R||_\infty = ||R(x,t)||_{X_2}.$$

Поэтому из условия $\max\{\mathrm{spr}_1(R), \mathrm{spr}_\infty(R)\} < 1$ вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty R_n(x,t)$ в пространствах X_1 и X_2.Отсюда и из (4.7) вытекает сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty |M_n(x,t) - M_{n-1}(x,t)|$ в пространствах X_1 и X_2, т.е. сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^\infty \int_t^l |M_n(x,t) - M_{n-1}(x,t)| dx, \quad \sum_{n=1}^\infty \int_0^x |M_n(x,t) - M_{n-1}(x,t)| dt \tag{4.9}$$

в пространстве $L^\infty[0,1]$. В свою очередь сходимость каждого из рядов (4.9) влечёт (по теореме Б. Леви) сходимость п.в. в Ω ряда $\sum_{n=1}^\infty |M_n(x,t) - M_{n-1}(x,t)|$. Следовательно, п.в. в Ω существует предел $M(x,t) := \lim_{n\to\infty} M_n(x,t)$, определяющий решение уравнения (4.5). Из сходимости рядов (4.9) ясно, что $M(x,t) \in X_1 \cap X_2$. Следовательно, оператор $M (M : f \mapsto \int_0^x M(x,t) f(t) dt)$ ограничен в $L^1[0,l]$ и $L^\infty[0,l]$. По интерполяционной теореме М. Рисса [6] оператор M ограничен также в $L^p[0,l]$ при $1 < p < \infty$.

Тем самым, равенство (4.4) с оператором M, ограниченным в $L^p[0,l]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, установлено.

ii) Для доказательства подобия осталось показать, что $-1 \in \rho(M)$. Для этого достаточно, используя условие $\max\{\mathrm{spr}_1(R), \mathrm{spr}_\infty(R)\} < 1/2$, показать, что $\mathrm{spr}_p(M) < 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Согласно интерполяционной теореме М. Рисса $||R^n||_p \leqslant ||R^n||_1^{1/p} \cdot ||R^n||_\infty^{1-1/p}$ и, следовательно,

$$\mathrm{spr}_p(R) \leqslant \big(\mathrm{spr}_1(R)\big)^{1/p} \cdot \big(\mathrm{spr}_\infty(R)\big)^{1-1/p} \leqslant (1/2)^{1/p} \cdot (1/2)^{1-1/p} = 1/2.$$

По теореме об отображении спектра $\sigma\big(R(I-R)^{-1}\big)$ содержится в открытом круге с центром $(1/3, 0)$ и радиусом $r = 2/3$. Поэтому $\mathrm{spr}_p\big(R(I-R)^{-1}\big) < 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Заметим, далее, что оператор $R(I-R)^{-1}$ – интегральный с ядром $S(x,t) := \sum_{n=1}^\infty R_n(x,t)$. В силу (4.7) $|M(x,t)| \leqslant S(x,t)$ и, значит, $\mathrm{spr}_p(M) \leqslant \mathrm{spr}_p\big(R(I-R)^{-1}\big) < 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Следовательно, $-1 \in \rho(M)$ и равенство (4.4) означает подобие операторов $Q_\alpha + K$ и Q_α в $L_p[0,l]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. •

Следствие 4.2. *Если оператор r ограничен в $L^\infty[0,l]$ и $\mathrm{spr}_1(R) = 0$, то операторы A и Q_α подобны в $L^p[0,l]$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Из интерполяционной теоремы Рисса вытекает равенство $\mathrm{spr}_p(R) = 0$ при $p \in (1, \infty)$. •

Следствие 4.3. *Если $l < \infty$ и оператор R слабо компактен в $L^1[0,l]$ и ограничен в $L_\infty[0,l]$, то A подобен Q_α в $L^p[0,l]$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Так как R слабо компактен в $L^1[0,l]$, то R^2 компактен (см. [6, 7]). Так как R^2 – оператор типа Вольтерра, то он вольтерров, т.е. $\sigma(R^2) = \{0\}$. Но тогда $\operatorname{spr}_1(R) = 0$, и можно применить следствие 4.2. •

Следствие 4.4. *Если $l < \infty$ и найдется функция $\Phi \in L_1[0,l]$ (мажоранта) такая, что $R(x,t) \leqslant \Phi(x-t)$, то операторы $A = Q_\alpha + K$ и Q_α подобны в $L^p[0,l]$ при $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Оператор свертки $\Phi : f \mapsto \int_0^x \Phi(x-t)f(t)$ компактен в $L^p[0,l]$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и, в частности, $\operatorname{spr}_p\Phi = 0$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Поэтому спектральный радиус оператора R с мажорируемым ядром $R(x,t)(\leqslant \Phi(x-t))$ – также нулевой, $\operatorname{spr}_p R = 0$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. •

Следствие 4.5. *Пусть $l < \infty$, а ядро $k(x,t)$ имеет вид*

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)\psi_j(t), \quad \varphi_j(x)\psi_j(x) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{4.10}$$

Если существуют модули непрерывности w_j и $\widetilde{w}_j$ такие, что $\varphi_j \in \operatorname{Lip}(w_j)$, $\psi_j \in \operatorname{Lip}(\widetilde{w}_j)$ и

$$\int_0 \frac{w_j(\tau)\widetilde{w}_j(\tau)}{\tau} d\tau < \infty, \qquad j \in \{1, ..., n\}, \tag{4.11}$$

то оператор $A = Q + K$ подобен Q в $L^p[0,l]$ при $1 < p < \infty$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$|k(x,t)| \leqslant \sum_j (|\varphi_j(x)\psi_j(t)| + |\varphi_j(t)\psi_j(x)|) = \sum_j (|\varphi_j(x)| - |\varphi_j(t)|)$$
$$\times (|\psi_j(t)| - |\psi_j(x)|) \leqslant \sum_j w_j(x-t)\widetilde{w}_j(x-t). \tag{4.12}$$

В силу (4.11) и (4.12) применимо предыдущее следствие с мажорантой $\Phi(x) := \sum_j w_j(x)\widetilde{w}_j(x)/x$. •

Условия $\varphi_j(x)\psi_j(x) = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, обеспечивающие вырождение на диагонали ядра $k(x,t)$ вида (4.10) в следствии 4.5, являются довольно ограничительными. В следующем утверждении показывается, что в случае вещественного ядра $k(x,t)$ от них можно освободиться.

Следствие 4.6. *Пусть $l<\infty$, $n\geqslant 2$ и*

$$k(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j\varphi_j(x)\varphi_j(t), \quad \varepsilon_j=\pm 1, \quad k(x,x)=0,$$

где $\varphi_j=\overline{\varphi}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. Если существуют модули непрерывности w_j, такие, что $\varphi_j\in \mathrm{Lip}\,(w_j)$ и $\int_0 w_j^2(t)t^{-1}dt<\infty$ при $j\in\{1,...,n\}$, то операторы $A=Q+K$ и Q подобны в $L^p[0,l]$ $(1<p<\infty)$.

Доказательство. Так как $k(x,x)=0$, то

$$2|k(x,t)|=|\sum_j\varepsilon_j(\varphi_j(x)-\varphi_j(t)^2|\leqslant\sum_j|\varphi_j(x)-\varphi_j(t)|^2\leqslant\sum_j w_j^2(x,t).$$

Применение следствия 4.4 с мажорантой $\Phi(x):=2^{-1}\sum_j w_j^2(x)/x$ завершает доказательство. •

Приведём ещё одно следствие из теоремы 4.1, описывающее неединственность “треугольной модели” вида (4.1). Иначе говоря, выясняется связь ядер $k_i(x,t)$ простых операторов A_i $(i=1,2)$ вида (4.1) при условии совпадения их характеристических функций.

Следствие 4.7. *Пусть ядра $k_i(x,t)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Если операторы $A_i=Q_\alpha+K_i$ $(i=1,2)$ унитарно эквивалентны в $L^2[0,l]$, то*

$$k_2(x,t)=k_1(x,t)\exp[i(\varphi(x)-\varphi(t))], \quad \varphi(x)=\overline{\varphi(x)}.$$

Доказательство. В теореме 4.1 доказано существование обратимых операторов $I+M_i$ типа Вольтерра, сплетающих операторы $Q_\alpha+K_i$ и Q_α, $(I+M_i)(Q_\alpha+K_i)=Q_\alpha(I+M_i)$, $(i=1,2)$. По условию следствия $U(Q_\alpha+K_1)=(Q_\alpha+K_2)U$, где U – унитарен. Из этих равенств легко заключаем, что $\Psi:=(I+M_2)U(I+M_1)^{-1}$ коммутирует с Q_α, т.е. $\Psi\in\{Q_\alpha\}'$. Следовательно, Ψ – оператор умножения на функцию $\psi(x)\in L^\infty[0,l]$, причём $\psi^{-1}\in L^\infty[0,l]$. Так как $(I+M_2)^{-1}=I+M_3$, где $M_3:f\to\int_0^x M_3(x,t)f(t)dt$, то

$$U=(I+M_2)^{-1}\Psi(I+M_1)=(I+M_3)\Psi(I+M_1)=\Psi(I+M)$$

где M – оператор типа Вольтерра, $M : f \mapsto \int_0^x M(x,t)f(t)dt$ с ядром

$$M(x,t) = \psi(x)M_1(x,t) + M_3(x,t)\psi(t) + \int_t^x M_3(x,s)\psi(s)M_1(s,t)ds.$$

Унитарность оператора U эквивалентна равенству

$$(I+M)^{-1}\Psi^{-1} = (I+M^*)\Psi^*. \tag{4.13}$$

Пусть $P(t) : f \mapsto \chi_{[0,t]}(x)f(x) \quad (t \in [0,l])$ – разложение единицы оператора Q. Из (4.13) и треугольного вида оператора M вытекает, что подпространства $\mathfrak{H}_t := P(t)\mathfrak{H} \in \operatorname{Lat} M^*$ приводят оператор M, $P(t)M = MP(t), t \in [0,l]$. Другими словами, $M(x,t)\chi_{[0,a]}(t) = \chi_{[0,a]}(x)M(x,t), a \in [0,l]$. Следовательно, $M = 0, U = \Psi$ и $\psi(x) = \exp(i\varphi(x))$. •

Замечание 4.8. a) В условиях следствия 4.4 оператор R компактен, а значит вольтерров в $L^p[0,l]$ при $1 < p < \infty$. Это вытекает из компактности оператора Φ и теоремы о наследовании свойства компактности интегральным оператором с мажорируемым ядром в пространствах $L^p[0,1]$ при $1 < p < \infty$ (см. [7]). Можно показать, что R слабо компактен в L_1 и L_∞. Однако наличие некомпактных интегральных операторов с ограниченными ядрами в L_1 и L_∞ (см. [7]) не позволяет утверждать компактность R в L_1 и L_∞.

b) Теорема 4.1 и следствия 4.2–4.4 и 4.7 получены автором в 1976 г. и анонсированы в [8]. Близкий результат получен недавно методом Фридрихса Я. Микитюком и Р. Хрунивым [26]. Следствие 4.5 в случае парного ядра $k(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ (и $p = 2$) получено недавно С. Набоко и К. Треттер [31]. Используя специальную структуру ядра $k(x,t)$, они получили оценки (1.4) для резольвенты $R_A(\lambda)$, обеспечивающие применение теоремы 1.1. Отметим также, что следствия 4.5 и 4.6 инспирированы работой [31].

4.2. Здесь рассматриваются треугольные операторы с разностными ядрами:

$$A = Q + iK : f \mapsto xf(x) + i\int_0^x k(x-t)f(t)dt. \tag{4.14}$$

Для операторов вида (4.14) мы дополним теорему 4.1, освободившись от условия вырождения ядра на диагонали, т.е. от условия $k(0) = 0$.

Предложение 4.9 [10]. *Пусть $l < \infty$, $k(x) \in C[0, l]$ и $k(0) = \overline{k(0)}$. Если k удовлетворяет условию Дини*

$$\int_0 \frac{w_k(t)}{t} dt < \infty, \tag{4.15}$$

где w_k – модуль непрерывности функции k, то операторы A и Q подобны в $L^p[0, l]$ при $1 < p < \infty$.

Доказательство. Хорошо известно (см. [21]), что комплексные степени J^z оператора интегрирования, $J^z : f \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^x (x - t)^{z-1} f(t) dt$, $\operatorname{Re} z > 0$, образуют голоморфную полугруппу в $L^p[0, l]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Известно также [21, с. 676], что существуют сильные пределы $J^{i\eta} := s - \lim_{\xi \downarrow 0} J^{\xi + i\eta}$, и операторы $\{J^{i\eta}\}_{\eta \in \mathbb{R}}$ образуют C_0 группу ограниченных операторов в $L^p[0, l]$ $(1 < p < \infty)$. Впрочем, ограниченность оператора $J^{i\eta}$,

$$J^{i\eta} : f \mapsto x^{i\eta - 1} * f = \frac{1}{\Gamma(1 + i\eta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x - t)^{i\eta} f(t) dt \qquad (\eta \in \mathbb{R}),$$

немедленно следует из теоремы Михлина о мультипликаторах.

Установим теперь подобие операторов A и $A_1 := Q + iK_1$, где $K_1 : f \mapsto \int_0^x k_1(x - t) f(t) dt$ и $k_1(x) = k(x) - k(0)$. Для этого воспользуемся тождеством $J^{i\eta}(Q + i\eta J) = QJ^{i\eta}$, $\eta \in \mathbb{R}$ (см. [17]). Оно вытекает из очевидного равенства $J^{\xi + i\eta}\big(Q + (\xi + i\eta)J\big) = QJ^{\xi + i\eta}$, $\xi > 0$, после перехода в нём к пределу при $\xi \downarrow 0$ (и с учётом отмеченной выше ограниченности операторов $J^{i\eta}$).

Используя упомянутое тождество, перестановочность операторов K_1 и $J^{i\eta}$ и равенство $K = k(0)J + K_1$, придем к соотношению

$$J^{ik(0)} A J^{-ik(0)} = J^{ik(0)}(Q + ik(0)J + iK_1) J^{-ik(0)} = Q + iK_1 = A_1,$$

означающему подобие операторов A и A_1 в $L^p[0, l]$ $(1 < p < \infty)$.

Подобие операторов A_1 и Q теперь вытекает из следствия 4.4. Действительно, так как $k_1(0) = 0$, то в силу (4.14) $\Phi(x) := w_k(x)/x$ является суммируемой мажорантой для $k_1(x)/x$. $\bullet$

Замечание 4.10. a) Условие (4.15), очевидно, выполнено, если $k \in \operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha > 0$. Как известно, при каждом $\alpha \leqslant 1/2$ существуют 2π-периодические функции $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)} \in \operatorname{Lip}\alpha$, для которых $\sum_n |\hat{\varphi}(n)| = \infty$. Согласно предложению 4.9 оператор A вида (4.14) с ядром $k(x-t) := \varphi(x-t)$ подобен $Q = Q^*$ в $L^2[0, 2\pi]$, хотя его мнимая компонента $A_I = K_I\big(K_I : f \mapsto \int_0^{2\pi} k(x-t)f(t)dt\big)$ не ядерна, $A_I \notin \mathfrak{S}_1$. Заметим, что для диссипативных операторов A вида (4.1) (с $\alpha(x) = x$), подобных самосопряжённому, всегда $A_I = K_I \in \mathfrak{S}_1$.

b) Предложение 4.9 вместе с некоторыми другими результатами анонсировано в [10].

§5. Заключительные замечания

После того, как статья была подготовлена к печати, появилась заметка [34], в которой для операторов вида (1.1)–(1.2) с абсолютно непрерывным спектром получены два критерия подобия в терминах предельных значений характеристической функции.

Напомним (см. [12]), что абсолютно непрерывным подпространством $\mathfrak{H}_{ac}(A)$ оператора A вида (1.1)–(1.2) называют замыкание линеала $\widetilde{N}_e := \{f \in \mathfrak{H} : V^{1/2}R_A(z) \in H^2_{\pm}(E)\}$. Говорят, что A имеет абсолютно непрерывный спектр, если $\mathfrak{H}_{ac}(A) = \mathfrak{H}$.

Приведем "допредельные" аналоги теорем 1 и 2 из [34], которые верны без условия $\mathfrak{H}_{ac}(A) = \mathfrak{H}$ и элементарно выводятся из теоремы 1.1. В свою очередь, из них легко следуют теоремы 1 и 2 из [34].

Обозначим также через $w_A(z)$ и $w_{A^*}(z)$ две J-формы: $w_A(z) := \theta_A(z)J\theta_A^*(z) - J$, $\quad w_{A^*}(z) := J - \theta_A^*(z)J\theta_A(z)$.

Предложение 5.1. *Пусть A – оператор вида* (1.1)–(1.2) *и* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. *Тогда A подобен самосопряженному в точности тогда, когда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\int (w_A(\lambda - i\varepsilon)P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f,\ P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f)d\lambda \leqslant C\|f\|^2, \\ \int (w_{A^*}(\lambda + i\varepsilon)P_-V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f,\ P_-V^{1/2}R_{B^*}(\lambda - i\varepsilon)f)d\lambda \leqslant C\|f\|^2.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Доказательство. Из тождества Гильберта (1.12) и леммы 1.3

вытекает, что первая из оценок (1.4) эквивалентна следующей:

$$\mathfrak{t}_\varepsilon[f] := \varepsilon \int ||2R_A(\lambda+i\varepsilon)V^{1/2}P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)f||^2 d\lambda \leqslant C||f||^2. \quad (5.2)$$

Преобразуем $\mathfrak{t}_\varepsilon[f]$ с учетом тождества (1.16). Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{t}_\varepsilon[f] = 4\varepsilon \int (V^{1/2}R_{A^*}(\lambda - i\varepsilon)R_A(\lambda + i\varepsilon)V^{1/2}P_+R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f,\\
&P_+R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f)\,d\lambda = \int (w_A(\lambda - i\varepsilon)P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f, \qquad (5.3)\\
&P_+V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f)d\lambda.
\end{aligned}$$

Сравнивая (5.2) и (5.3), заключаем, что первая из оценок (1.4) эквивалентна первой из оценок (5.1). Аналогично показывается, что вторая из оценок (1.4) эквивалентно неравенству

$$\int (w_{A^*}(\lambda + i\varepsilon)P_-V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f,\ P_-V^{1/2}R_{B^*}(\lambda + i\varepsilon)f)d\lambda \leqslant C\|f\|^2. \quad (5.4)$$

Предложение доказано. $\bullet$

Предложение 5.2. *Пусть A – оператор вида* (1.1)–(1.2), $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ *и $w_{B^*}(z) := I - \theta_B^*(z)\theta_B(z)$. Он подобен самосопряженному тогда и только тогда, когда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\int (w_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f,\ P_+V^{1/2}R_A(\lambda+i\varepsilon)f)d\lambda \leqslant C\|f\|^2,\\
&\int (w_{B^*}(\lambda+i\varepsilon)P_-V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)f,\ P_-V^{1/2}R_{A^*}(\lambda+i\varepsilon)f)d\lambda \leqslant C\|f\|^2.
\end{aligned} \quad (5.5)$$

Доказательство. Следует опять воспользоваться тождеством (1.12), не изменяя в нем порядок сомножителей. $\bullet$

Теоремы 1 и 2 из [34] являются предельными формами предложений 1 и 2 для операторов A с абсолютно непрерывным спектром. Эти результаты, как утверждают авторы работы [34], доказаны ими при помощи функциональной модели диссипативного оператора.

Заметим, однако, что теоремы 1 и 2 из [34] легко вытекают из предложений 5.1 и 5.2. Например, оценка

$$\int (w_{B^*}(\lambda + i0)P_+V^{1/2}R_A(\lambda + i0)f, P_+V^{1/2}R_A(\lambda + i0)f)d\lambda \leqslant C||f||^2$$

на “гладких” векторах $f \in \widetilde{N}_e$ эквивалентна первой из оценок (5.5). При этом условие $f \in \widetilde{N}_e$ обеспечивает существование сильных предельных значений $V^{1/2}R_A(\lambda + i0)f$. Если $\widetilde{N}_e$ плотно в $\mathfrak{H}$, (т.е. $\mathfrak{H}_{ac}(A) = \mathfrak{H}$), то первая оценка в (5.5) верна для всех $f \in \mathfrak{H}$.

Литература

1. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* Москва, “Наука”, 1969.
2. В. Ф. Веселов, *Об отделимости инвариантных подпространств недиссипативного оператора.* — Вестник ЛГУ, сер.1, вып.4 (1988), 19–24.
3. Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции.* Москва, Мир, 1984.
4. А. М. Гомилко, *Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0-полугруппы операторов.* — Функц. анализ и его прил. **33, вып. 4** (1999), 66–69.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным.* — Функц. анализ и его прил. **1, вып. 1** (1967), 38–60.
6. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* ИЛ, Москва, 1962.
7. М. А. Красносельский и др., *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* Наука, Москва, 1966.
8. М. М. Маламуд, *О приведении операторов с непрерывным спектром к диагональному виду.* — Успехи матем. наук **32, No. 5** (1977), 167.
9. М. М. Маламуд, *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряжённому.* — Укр. матем. ж-л **37, No. 1** (1985), 49–56.
10. М. М. Маламуд, *Об одном классе операторов треугольного вида.* — XIV-я Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов, часть II (1989), 67.
11. А. С. Маркус, *Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве.* — Матем. сб. **70** (1966), 526–561.
12. С. Н. Набоко, *Функциональная модель теории возмущений и её приложения к теории рассеяния.* — Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова **147** (1980), 86–114.
13. С. Н. Набоко, *О сингулярном спектре несамосопряжённых операторов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 149–177.
14. С. Н. Набоко, *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам.* — Функ. анал. и его прил. **т.18, No. 1** (1984), 16–27.
15. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Москва, Наука, 1980.
16. Б. С. Павлов, *Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **39, No. 1** (1975), 123–148.
17. Л. А. Сахнович, *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром.* — Труды Моск. матем. общ-ва **19** (1968), 211–270.

18. Л. А. Сахнович, *Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром на единичной окружности.* — ДАН СССР **181, No. 3** (1968), 558–561.
19. Л. А. Сахнович, *Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром.* — Изв. АН СССР, серия матем. **33, No. 1** (1969), 52–64.
20. Б. Секельфальви-Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Москва, Мир, 1970.
21. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ, Москва, 1962.
22. N. E. Benamara, N. K. Nikolskii, *Rezolvent tests for similarity to a normal operator.* — Proc. London Math. Soc. **78,** No. 3 (1999), 585–626.
23. J. A. van Casteren, *Operators similar to unitary or selfadjoint ones.* — Pacific J. Math. **104,** No. **1** (1983), 241–255.
24. B. Curgus, B. Najman, *The operator* $(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ *is similar to a self-adjoint operator in* $L^2(\mathbb{R})$.. — Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1125–1128.
25. C. Davis, C. Foias, *Operators with bounded characteristic functions and their J-unitary dilation.* — Acta Sci. Math. **32,** Nos. 1, 2 (1971), 127–139.
26. R. O. Hryniv and Ya. V. Mykytyuk, *On similarity of perturbed multiplication operators.* — Матем. заметки (в печати).
27. I. M. Karabash, *On conditions for similarity of some differential operators to self-adjoint ones..* — Dopovidi NAN Ukraine No. 3 (2000), 39–43.
28. T. Kato, *Wave operators and similarity for some non-seld-adjoint operators.* — Math. Ann. **162** (1966), 258–279.
29. T. Kato, *Smooth operators and commutators.* — Studia Math. **31** (1968), 535–546.
30. S. Kupin and V. I. Vasyunin, *Some criteria for similarity of an integral dissipative operator to a normal operator.* — Algebra and Analiz (submitted).
31. S. N. Naboko, C. Tretter, *Lyapunov stability of a perturbed multiplication operator.* — Oper. Theory Adv. Appl. **106** (1998), 309–326.
32. B. Sz-Nagy, *On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space.* — Acta Sci. Math. **11** (1947), 152–157.
33. B. Sz.-Nagy, C. Foias, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert. X. Contractions similaires a des transformation unitaries.* — Acta Sci. Math. Szeged. **26,** Nos. 1, 2 (1965), 79-91.
34. А. В. Киселев, М. М. Фаддеев, *О задаче подобия для несамосопряженных операторов с абсолютно непрерывным спектром.* — Функ. анал. **34, No. 2** (2000), 78–81.

Malamud M. M. Similarity of a triangular operator to a diagonal one.

A series of sufficient conditions are given for the similarity of the nonselfadjoint operator $A = G + iV^{1/2}JV^{1/2}$ (with a well-defined imaginary part) to a selfadjoint operator. Next, sufficient conditions (becoming also necessary in the dissipative case) are given for the triangular operator $f \mapsto \alpha(x)f(x) + i\int_x^1 k(x,t)f(t)d\mu(t)$ to be similar to a selfadjoint operator.

Донецкий государственный
университет, Украина
mmm@univ.donetsk.ua

Поступило 1 сентября 2000 г.