Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. Ю. Митрофанов, О. А. Тараканов

ДИСКРЕТНАЯ СТРУНА, МОДЕЛИРУЮЩАЯ МУЗЫКАЛЬНУЮ ГАММУ

1. Введение

Дискретной струной мы называем невесомую нить конечной длины, натянутую единичной силой, на которой размещено конечное число точечных масс (бусин). Концы струны жёстко закреплены; струна может совершать малые колебания в вертикальной плоскости.

Дискретная струна, несущая n бусин, определяется набором их масс $m_1, m_2, \dots, m_n$ и расстояний $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$: l_1 – расстояние от левого конца струны до первой бусины; l_i, $i = 2, \dots, n$ – расстояния между $(i-1)$-ой и i-ой бусинами, l_{n+1} – расстояние от n-ой бусины до правого конца струны. Струна имеет n собственных частот, отвечающих гармоническим собственным колебаниям (см. [2]).

Нотам первой октавы музыкальной гаммы отвечают частоты (в герцах): $v_1 = 262$ (до), $v_2 = 294$ (ре), $v_3 = 330$ (ми), $v_4 =349$ (фа), $v_5 = 392$ (соль), $v_6 = 440$ (ля), $v_7 = 494$ (си) (см. [3]). Поставим задачу: найти дискретную струну с семью бусинами, собственные частоты которой совпадают с $v_1, \dots, v_7$.

Задача решается в два этапа. Первый – решение обратной спектральной задачи, состоящей в восстановлении струны по ее спектру $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и набору постоянных $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, связанных с нормированными собственными колебаниями; дополнительно предполагается известной первая длина l_1. Мы описываем процедуру решения обратной спектральной задачи и приводим необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Сама процедура, в существенных чертах, следует схеме работы [1]; найденные же условия разрешимости являются новыми и составляют один из главных результатов работы.

Второй этап работы – вычислительный эксперимент, состоя-

Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00107 и № 96-15-96121.

щий в программировании процедуры и численной реализации. Результаты расчетов и их обсуждение отнесены в п. 8 работы.

Авторы признательны М. И. Белишеву за постановку задачи и внимание к работе.

2. Постановка задачи

Уравнение колебаний струны имеет известный вид:

$$u_{tt} + Lu = 0;$$

здесь $u = u(t) = \{u^i(t)\}_{i=1}^n$, $u^i(t)$ – отклонение i-ой бусины от положения равновесия; L – оператор в R^n, матрица которого в стандартном базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$: $e_j^k = \delta_j^k$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{c_1+c_2}{m_1} & \dfrac{-c_2}{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{-c_2}{m_2} & \dfrac{c_2+c_3}{m_2} & \dfrac{-c_3}{m_2} & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{-c_3}{m_3} & \dfrac{c_3+c_4}{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{c_n+c_{n+1}}{m_n} \end{pmatrix};$$

$c_i := \frac{1}{l_i}$ суть жесткости струны.

Через $(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ мы обозначаем стандартное скалярное произведение в R^n. Введем новое скалярное произведение:

$$(x, y)_M := \sum_{i=1}^n m_i x^i y^i;$$

пусть R_M^n – соответствующее евклидово пространство. В R_M^n введем ортонормированный базис:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{m_j}}\, e_j \right\}_{j=1}^n,$$

где e_j – элемент стандартного базиса. В этом базисе матрица оператора L приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{c_1+c_2}{m_1} & \dfrac{-c_2}{\sqrt{m_1m_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{-c_2}{\sqrt{m_1m_2}} & \dfrac{c_2+c_3}{m_2} & \dfrac{-c_3}{\sqrt{m_2m_3}} & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{-c_3}{\sqrt{m_2m_3}} & \dfrac{c_3+c_4}{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{c_n+c_{n+1}}{m_n} \end{pmatrix}.$$

Известно (см. [2]), что оператор L положительно определен в R^n_M и имеет простой спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$: $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$. Пусть $\{\phi_j\}_{j=1}^n$: $L\phi_j=\lambda_j\phi_j$ есть собственный базис L, нормированный условиями: $(\phi_i,\phi_j)_M=\delta_{ij}$, $\phi_j^1>0$; заметим, что всегда $\phi_j^1\neq 0$ (см. [2]).

Определим нормировочные постоянные

$$\kappa_j := c_1\phi_j^1 = \frac{c_1}{\sqrt{m_1}}\left(\phi_j, \frac{e_1}{\sqrt{m_1}}\right)_M, \quad j=1,\ldots,n. \tag{1}$$

Совокупность пар $\{\lambda_j,\kappa_j\}_{j=1}^n$ называется спектральными данными струны.

<u>Обратная спектральная задача</u> состоит в восстановлении масс $m_1,\ldots,m_n$ и жесткостей $c_2,\ldots,c_{n+1}$ по заданным $\{\lambda_j,\kappa_j\}_{j=1}^n$ и известному c_1. Основной результат работы содержит следующая

Теорема 1. *Числа $c_1>0$; $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n$; $\kappa_1>0$; $\kappa_2>0,\ldots,\kappa_n>0$ являются первой жесткостью и спектральными данными некоторой струны в том и только в том случае, если они удовлетворяют условию*

$$c_1>\sum_{j=1}^n\frac{\kappa_j^2}{\lambda_j}. \tag{2}$$

Кроме того, в работе описывается эффективная процедура, восстанавливающая параметры струны по спектральным данным. Сама процедура является версией схемы [1]; она приводится в п. 5; пп. 3–4 содержат вспомогательные результаты.

3. Канонический базис

Обозначим $h_1 = \frac{e_1}{\sqrt{m_1}}$; как легко видеть из структуры матрицы L, набор h_1, Lh_1, $L^2h_1, \dots, L^{n-1}h_1$ образует базис в R^n_M. Проведем его ортогонализацию по Шмидту, начиная с h_1; пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ есть получившаяся система: $(h_i, h_j)_M = \delta_{ij}$. С учетом структуры матрицы нетрудно проверить равенство:

$$h_j = (-1)^{j-1}\frac{e_j}{\sqrt{m_j}}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Базис $\{h_j\}_{j=1}^n$ назовем каноническим; матрица оператора L в нем приобретает вид:

$$l^{(h)} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1+c_2}{m_1} & \dfrac{-c_2}{\sqrt{m_1m_2}} & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{-c_2}{\sqrt{m_1m_2}} & \dfrac{c_2+c_3}{m_2} & \dfrac{c_3}{\sqrt{m_2m_3}} & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{-c_3}{\sqrt{m_2m_3}} & \dfrac{c_3+c_4}{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{c_n+c_{n+1}}{m_n} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Полезно заметить следующее: по известным c_1, m_1 и элементам матрицы (4) можно последовательно восстановить остальные массы $m_2, \dots, m_n$ и жесткости $c_2, \dots, c_{n+1}$.

4. Спектральное представление

Пусть $\widetilde{R}^n$ – экземпляр R^n; $\{\widetilde{e}_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в $\widetilde{R}^n$. Линейное отображение $U : R^n_M \to \widetilde{R}^n$, $U\phi_j = \widetilde{e}_j$, $j = 1, \dots, n$ является унитарным оператором. Пространство $\widetilde{R}^n$ называется пространством спектрального представления.

Из (1) легко усмотреть равенство:

$$\widetilde{h}_1 = Uh_1 = \frac{\sqrt{m_1}}{c_1}\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из условия $\|\widetilde{h}_1\| = \|h_1\|_M = 1$ имеем

$$m_1 = \frac{c_1^2}{\sum_{j=1}^n \kappa_j^2}. \tag{6}$$

Матрица оператора $\widetilde{L} = ULU^{-1}$ в стандартном базисе диагональна:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}; \tag{7}$$

элементы степенного базиса $\widetilde{h}_1, \widetilde{L}\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{L}^{n-1}\widetilde{h}_1$ имеют вид:

$$\widetilde{L}^k\widetilde{h}_1 = \frac{\sqrt{m_1}}{c_1}\begin{pmatrix} \lambda_1^k\kappa_1 \\ \lambda_2^k\kappa_2 \\ \vdots \\ \lambda_n^k\kappa_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

5. Процедура решения обратной задачи

Напомним, что c_1; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ предполагаются известными. Искомые параметры струны находятся по следующей схеме:

(i) определяем m_1 по формуле (6);

(ii) находим элемент $\widetilde{h}_1$ (см. (5)); по нему восстанавливаем степенной базис $\widetilde{h}_1$, $\widetilde{L}\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{L}^{n-1}\widetilde{h}_1$ (см. (8));

(iii) проводя в $\widetilde{R}^n$ ортогонализацию степенного базиса, начиная с $\widetilde{h}_1$, строим базис $\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2, \dots, \widetilde{h}_n$;

(iv) находим матрицу оператора $\widetilde{L}$ в базисе $\{\widetilde{h}_j\}_{j=1}^n$. Эта матрица, по унитарной эквивалентности операторов $\widetilde{L}$ и L, совпадает с матрицей последнего в базисе $\{h_j\}_{j=1}^n$; в результате матрица (4) оказывается в нашем распоряжении;

(v) зная c_1 и m_1, по элементам матрицы (4) последовательно находим $m_2, \dots, m_n$ и $c_2, \dots, c_{n+1}$.

Обратная задача решена; в оставшейся части работы мы устанавливаем условия на спектральные данные, гарантирующие ее разрешимость.

6. Вспомогательные результаты

Приводимые здесь леммы будут использованы для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть* Δ_i $(i=0,1,\dots,n-1)$ *– минор матрицы* $l^{(h)}$ *(см. (4)), образованный строками и столбцами с номерами* $i+1, i+2,\dots,n$*; положим* $\Delta_n := 1$*. Справедливы равенства:*

$$m_i\Delta_{i-1} - c_i\Delta_i = \left(\prod_{k=i+1}^{n+1} m_k\right)^{-1}\left(\prod_{k=i+1}^{n} c_k\right), \quad i=1,\dots,n-1;$$

$$m_n\Delta_{n-1} - c_n\Delta_n = c_{n+1}. \tag{9}$$

Доказательство. Проверим последнее из равенств (9):

$$m_n\Delta_{n-1} - c_n\Delta_n = m_n\frac{c_n+c_{n+1}}{m_n} - c_n = c_{n+1}.$$

Установим вспомогательное равенство

$$m_i\Delta_{i-1} - c_i\Delta_i = \frac{c_{i+1}}{m_{i+1}}(m_{i+1}\Delta_i - c_{i+1}\Delta_{i+1}), \quad i=1,\dots,n-1. \tag{10}$$

Раскладывая минор Δ_{i-1} по его первой строке, имеем:

$$\Delta_{i-1} = \frac{c_i+c_{i+1}}{m_i}\,\Delta_i - \frac{c_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}\,\det a, \tag{11}$$

где

$$a = \begin{pmatrix} \frac{c_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}} & \frac{c_{i+2}}{\sqrt{m_{i+1} m_{i+2}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{c_{i+2}+c_{i+3}}{m_{i+2}} & \frac{c_{i+3}}{\sqrt{m_{i+2} m_{i+3}}} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{c_{i+3}}{\sqrt{m_{i+2} m_{i+3}}} & \frac{c_{i+3}+c_{i+4}}{m_{i+3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Раскладывая $\det a$ по первому столбцу, получаем:

$$\det a = \frac{c_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}\,\Delta_{i+1}.$$

Представляя последнее равенство в (11), получаем (10).

Оставшиеся равенства (9) получаются из (10) индукцией по убывающему i. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает необходимость условия (2) в теореме 1.

Лемма 2. *Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ являются спектральными данными некоторой струны, а c_1 – первая из ее жесткостей, то выполнено неравенство* (2).

Доказательство. По лемме 1 имеем:

$$m_1 \det l^{(h)} - c_1 \Delta_1 = \left(\prod_{k=2}^{n} m_k \right)^{-1} \left(\prod_{k=2}^{n+1} c_k \right) > 0,$$

откуда $\Delta_1 / \det l^{(h)} < m_1 / c_1$. С другой стороны, $\Delta_1 / \det l^{(h)}$ есть элемент с индексами 1,1 матрицы, обратной к $l^{(h)}$, откуда

$$\frac{m_1}{c_1} > (1, 0, \dots, 0)(l^{(h)})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (L^{-1} h_1, h_1)_M = (\widetilde{L}^{-1} \widetilde{h}_1, \widetilde{h}_1)_{\widetilde{R}^n} =$$

$$= \langle \text{см.}(5), (7) \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_1 \kappa_j^2}{c_1^2 \lambda_j}.$$

Умножая на $\frac{c_1^2}{m_1}$, получаем (2). Лемма доказана.

Заключительная лемма будет использована при доказательстве достаточности в теореме 1.

Лемма 3. *Пусть B есть симметрический положительно определенный оператор в R^d, b – его матрица в стандартном базисе, причем $b_{i,i+1} \neq 0$, $i = 1, \dots, d-1$. Пусть Δ_i – минор b, образованный строками и столбцами с номерами $i+1, \dots, d$; $\Delta_d = 1$; m и c суть положительные числа, такие что $\frac{m}{c} > \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$. Определим $c' = m b_{11} - c$, $m' = \frac{(c')^2}{m} (b_{12})^{-2}$. Тогда m' и c' положительны и выполнено неравенство $\frac{m'}{c'} > \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$.*

Доказательство. Покажем, что $c' > 0$, т.е. $m/c > (b_{11})^{-1}$. Определим $(x, y)_B = (x, By)$; пусть $e \in R^d$ – элемент с компонентами $1, 0, \dots, 0$. По неравенству Коши имеем:

$$(e, Be)(e, B^{-1}e) = (e, e)_B (B^{-1}e, B^{-1}e)_B \geqslant (e, B^{-1}e)_B^2 = (e, e)^2 = 1.$$

В эквивалентной форме это неравенство имеет вид $b_{11}(b^{-1})_{11} \geqslant 1$, откуда

$$\frac{m}{c} > \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = (b^{-1})_{11} \geqslant \frac{1}{b_{11}};$$

значит, $c' > 0$. Из последнего заключаем, что и $m' > 0$.

Раскладывая $\det b$ по элементам первой строки, нетрудно получить:

$$m\Delta_0 - c\Delta_1 = \frac{c'}{m'}(m'\Delta_1 - c'\Delta_2),$$

откуда, с учетом $m', c' > 0$, получаем $\frac{m'}{c'} > \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. Лемма доказана.

7. Достаточность условия (2)

Проверим вначале, что условие (2) обеспечивает выполнимость каждого шага процедуры, описанной в п. 5.

Выполнимость первых двух шагов очевидна; заметим лишь, что $m_1 > 0$ (см. (6)).

Как видно из (8), набор $\{\widetilde{L}^k\widetilde{h}_1\}_{k=0}^{n-1}$ образует базис в $\widetilde{R}^n$, следовательно, шаг (iii) выполним. Проводя ортогонализацию по Шмидту, получим ортонормированный базис $\{\widetilde{h}_k\}_{k=1}^{n}$. Шаг (iii) выполнен; перейдем к шагу (iv).

Пусть $\widetilde{l}^{(h)}$ – матрица $\widetilde{L}$ в базисе $\{\widetilde{h}_k\}_{k=1}^{n}$; она симметрична и, по построению базиса, трехдиагональна, причем все элементы вида $\widetilde{l}^{(h)}_{ii}$, $\widetilde{l}^{(h)}_{i+1,i}$ и $\widetilde{l}^{(h)}_{i,i+1}$ отличны от нуля.

Перейдем к шагу (v). Ориентируясь на структуру матрицы (4), будем последовательно определять величины c_2, m_2; $c_3, m_3; \ldots; c_n, m_n; c_{n+1}$ по элементам матрицы $\widetilde{l}^{(h)}$ (см. заключительное замечание п. 3).

Отметим, что по условию (2) выполнено неравенство:

$$c_1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{\kappa_i^2}{\lambda_i} = \left(\frac{c_1}{\sqrt{m_1}}\widetilde{h}_1, \widetilde{L}^{-1}\frac{c_1}{\sqrt{m_1}}\widetilde{h}_1\right),$$

откуда

$$\frac{m_1}{c_1} > \left[(l^{(h)})^{-1}\right]_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta_0},$$

где Δ_i суть те же, что и в лемме 3, примененной к случаю $B = \widetilde{L}^{(h)}$. Далее определим, следуя процедуре решения обратной задачи (см. п. 5), числа $c_2 = m_1\widetilde{l}^{(h)}_{11} - c_1$, $m_2 = \frac{c_2^2}{m_1}[\widetilde{l}^{(h)}_{12}]^{-2}$. Применяя лемму 3, получаем неравенства:

$$c_2 > 0, \quad m_2 > 0, \quad \frac{m_2}{c_2} > \frac{\Delta_2}{\Delta_1}.$$

Далее, для усеченной матрицы $\widetilde{l}^{(h)}_{ik}$, $i,k=2,\dots,n$ определим $c_3 = m_2\widetilde{l}^{(h)}_{22} - c_2$, $m_3 = \frac{c_3^2}{m_2}[\widetilde{l}^{(h)}_{23}]^{-2}$; применяя лемму 3, получим:

$$c_3 > 0, \quad m_3 > 0, \quad \frac{m_3}{c_3} > \frac{\Delta_3}{\Delta_2}.$$

Продолжная процесс очевидным образом, найдем положительные $c_4,\dots,c_n$ и $m_4,\dots,m_n$. Положительность величины c_{m+1} легко следует из соотношений

$$\frac{m_n}{c_n} > \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \frac{1}{\widetilde{l}^{(n)}_{nn}}.$$

Шаг (v) выполнен.

По построению, матрица $\widetilde{l}^{(h)}$ приобретает вид (4); она отвечает струне с жесткостями $c_1,\dots,c_{n+1}$ и массами $m_1,\dots,m_n$. Проверим, что спектральные данные этой струны совпадают с $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ и $\kappa_1,\dots,\kappa_n$. В самом деле, спектр струны есть спектр матрицы $\widetilde{l}^{(h)}$, подобной матрице $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. По определению, нормировочные постоянные струны суть

$$\frac{c_1}{\sqrt{m_1}}(h_1,\phi_i)_M = \frac{c_1}{\sqrt{m_1}}(\widetilde{h}_1,\widetilde{\phi}_i) = \kappa_i.$$

Проверка завершена; теорема доказана.

8. Численный эксперимент

В качестве приложения рассмотрим задачу о моделировании нотного ряда дискретной струной. Задана последовательность чисел $v_1,\dots,v_7$, являющихся частотами (в герцах) семи основных нот первой октавы: $v_1 = 262$ (до), $v_2 = 294$ (ре), $v_3 = 330$ (ми), $v_4 = 349$ (фа), $v_5 = 392$ (соль), $v_6 = 440$ (ля), $v_7 = 494$ (си) (см. [3]). Требуется найти струну заданной длины $L = 1$ метр, несущую семь бусин, такую, что ее собственные частоты совпадают с $v_1,\dots,v_7$. Другими словами, надо определить массы бусин $m_1,\dots,m_7$ и расстояния $l_1,\dots,l_8$ ($l_1+\dots+l_8 = L$), так чтобы собственные значения найденной струны $\lambda_1,\dots,\lambda_7$ удовлетворяли равенствам $\lambda_1 = v_1^2,\dots,\lambda_7 = v_7^2$.

В приведенной постановке задача заведомо имеет бесконечное множество решений. В самом деле, выбирая, в дополнение к

$\lambda_1, \ldots, \lambda_7$, произвольные положительные числа $\kappa_1, \ldots, \kappa_7$ и решая соответствующую обратную задачу, получим различные струны с нужным спектром. Однако, численный эксперимент с пробными $\kappa_1 = \kappa_2 = \ldots = \kappa_7 = 1$ привел к физически нереальному ответу: величины $T := \frac{\max l_i}{\min l_i}$, $M := \frac{\max m_i}{\min m_i}$ имеют порядок 10^8. В этой ситуации произвол в выборе κ_i был использован для оптимизации струны по параметрам T и M. Оптимизация проводилась одним из вариантов метода скорейшего спуска с использованием пошагового алгоритма.

Приведем результаты расчетов:

Таблица 1

i	l_i (в сантиметрах)	m_i (в миллиграммах)
1	0.045	3360
2	1.28	108
3	8.71	15
4	39.66	5
5	39.65	14
6	9.29	107
7	1.32	3360
8	0.045	

Найденным параметрам струны отвечают значения $T = 890$; $M = 703$.

Проверка, состоящая в решении прямой задачи, показывает, что собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_7$ струны с таким набором длин и масс удовлетворяют требуемым равенствам $\lambda_1 = v_1^2, \ldots, \lambda_7 = v_7^2$ с погрешностью, меньшей 1%. Кроме того, как видно, найденная струна близка к симметричной (т.е. $l_1 \approx l_8, \ldots, l_4 \approx l_5$; $m_1 \approx m_7, \ldots, m_3 \approx m_5$). В связи с этим отметим следующее. В [2] приведена процедура, восстанавливающая симметричную струну с четным числом бусин по ее спектру. Нами получена модификация этой процедуры для струны с нечетным числом бусин. Как показывает эксперимент, ее применение к данным $\lambda_1 = v_1^2, \ldots, \lambda_7 = v_7^2$ приводит к параметрам, близким к указанным в таблице. Возникает гипотеза, что среди всех струн, имеющих заданные частоты $v_1, \ldots, v_7$, симметричная струна обладает наименьшими T и M. Вопрос о ее справедливости остается открытым.

Литература

1. М. И. Белишев, М. В. Путов, *Конечномерная обратная задача для пучка эрмитовых квадратичных форм.* Записки научн. семин. ПОМИ, **20** (1990), 33-36.
2. Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* М., ГИТТЛ (1950), 359с.
3. Г. Е. Шилов, *Простая гамма (устройство музыкальной шкалы). Серия "Популярные лекции по математике".* вып. 37, М., Наука (1980).

Mitrofanov M. Yu., Tarakanov O. A. Discrete string simulating a musical gamma.

The discrete string with fixed endpoints carrying a finite number of beads is determined by masses of beads and distances between them. The string possesses a set of simple eigenfrequencies corresponding to harmonic eigenmodes. In the paper the following problem is treated: to find a discrete string carrying seven beads such that its eigenfrequencies coincide with the freqiencies of the notes of the first octave of the musical gamma. The problem is solved in two steps. First, the spectral inverse problem is considered, that is, recovering the string by its spectrum and a set of constants related to the normalized eigenmodes. A procedure of solving this problem is described. One of the main results of the paper is a necessary and sufficient conditions for solvability of the spectral inverse problem. The second step is numerical realization of the procedure.

Санкт-Петербургский
государственный университет
miguelimo38@yahoo.com
tarakanov@togetherlab.nw.ru

Поступило 25 июля 2000 г.