Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

Г. С. Мустафаев, М. Т. Караев

РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА $\sin a$ ПО ЭКСПОНЕНТАМ ДЛЯ ЭРМИТОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ a

1. Пусть A – комплексная банахова алгебра с единицей e. Элемент $a \in A$ называется *эрмитовым*, если $\|\exp(ita)\| = 1$ при всех $t \in R$. Хорошо известно [1–6], что для эрмитовых элементов $a \in A$ $\|a\| = |a|$, где $|a|$ – спектральный радиус элемента $a \in A$. Пусть $\sigma > 0$; обозначим через B_σ банахово пространство всех целых функций $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, с нормой

$$\|f\|_\sigma = \sup_z \big[\exp(-\sigma|\operatorname{Im} z|)|f(z)| \big] < \infty. \tag{1}$$

Из теоремы Фрагмена–Линделефа вытекает, что фактически

$$\|f\|_\sigma = \sup_{x \in R} |f(x)|.$$

Известно [1] также, что оператор дифференцирования $a = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ является эрмитовым в пространстве B_σ, и совпадение нормы и спектрального радиуса этого оператора равносильно классическому неравенству Бернштейна:

$$\|f'\|_\sigma \leqslant \sigma\|f\|_\sigma, \quad f \in B_\sigma.$$

Если положить $\sin a = (2i)^{-1}[\exp(ia) - \exp(-ia)]$, то совпадение нормы и спектрального радиуса оператора $\sin a$ $\big(|a| \leqslant \frac{\pi}{2}\big)$ в пространстве B_σ равносильно следующему более тонкому неравенству бернштейновского типа:

$$\sup_{x \in R} |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant 2\sin\sigma h\|f\|_\sigma, \tag{2}$$

где $f \in B_\sigma$ и $0 \leqslant \sigma h \leqslant \frac{\pi}{2}$. В пределе при $h \to 0$ оно также дает (1). Нетрудно видеть, что равенство $\|\sin a\| = |\sin a|$ влечет равенство $\|a\| = |a|$. В этой связи естественно возникает вопрос об отыскании доказательств вышеупомянутых равенств в рамках теории банаховых алгебр. В работе [1] выделен класс функций g, для которых $\|g(a)\| = |g(a)|$ для эрмитовых a. В той же работе (с. 94) указаны подходы к доказательству равенства $\|\sin a\| = |\sin a|$.

В этой заметке мы докажем интерполяционную формулу, выражающую $\sin a$ через экспоненты.

Теорема. *Если $a \in A$ – эрмитов элемент с положительным спектральным радиусом, то справедливо равенство*

$$\sin a = \frac{1}{i}\,\frac{4|a|}{\pi^2}\sum_{k\in Z}(-1)^{|k|}\frac{\cos|a|}{(2k+1)^2-\frac{4}{\pi^2}|a|^2}\exp\left[i\frac{1}{|a|}(2k+1)\frac{\pi}{2}a\right], \quad (3)$$

где при $|a| = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (для некоторых неотрицательных $k \in Z$) соответствующий коэффициет в разложении (3) заменяется его предельным значением. Далее, если $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$, то сумма модулей коэффициентов в разложении (3) есть $|\sin a|$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее:

Пусть $M(R)$ – сверточная алгебра ограниченых комплексных борелевских мер в R. Если a – эрмитов элемент и

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int\limits_R \exp(-it\lambda)d\mu(t)$$

преобразование Фурье–Стильтьеса, то полагаем

$$\widehat{\mu}(a) = \int\limits_R \exp(-ita)d\mu(t).$$

Этой формулой определяется не увеличивающий нормы гомоморфизм из $M(R)$ в алгебру A. Другими словами, a допускает $M(R)$-исчисление. Это исчисление обладает следующими свойствами [1]:

а) если $\widehat{\mu}(\lambda) = 0$ в вещественной окрестности $\sigma(a)$ – спектра элемента a, то $\widehat{\mu}(a) = 0$;

б) если для некоторого полинома $p(\lambda)$ $\widehat{\mu}(\lambda) = p(\lambda)$ в вещественной окрестности $\sigma(a)$, то $\widehat{\mu}(a) = p(a)$;

в) $\sigma(\widehat{\mu}(a)) = \widehat{\mu}(\sigma(a))$ – теорема об отображении спектра.

Кроме того, отметим, что $\sin a = [(2i)^{-1}(\delta_{-1} - \delta_1)]^\wedge(a)$.

В дальнейшем через $S(R)$ будем обозначать множество быстро убывающих функций на R, т.е. бесконечно дифференцируемых функций на R, для которых

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|x^n\, g^{(k)}(x)\right| = 0 \quad \text{для всех} \quad n, k = 0, 1, 2, \dots\,;$$

$\widehat{f}$ будет обозначать преобразование Фурье функции $f \in L^1(R)$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -|a| \leqslant x \leqslant |a|, \\ \sin(2|a| - x), & |a| \leqslant x \leqslant 3|a|. \end{cases}$$

Продолжим $f(x)$ периодически на всю ось R, полагая $f(x+4|a|) = f(x)$ для всех $x \in R$. Коэффициенты Фурье этой функции выражаются формулой

$$c_n(f) = \frac{1}{4|a|} \int\limits_{-|a|}^{3|a|} \exp\left(-\,i\frac{n\pi}{2|a|}x\right) f(x)\, dx.$$

Простые вычисления показывают, что

$$c_{2k}(f) = 0 \quad \text{и} \quad c_{2k+1}(f) = \frac{1}{i}\,\frac{4|a|}{\pi^2}(-1)^{|k|}\frac{\cos|a|}{(2k+1)^2 - \frac{4}{\pi^2}|a|^2}, \quad k \in Z.$$

Если $|a| = (2k_0+1)\frac{\pi}{2}$ для некоторого неотрицательного $k_0 \in Z$, то легко видеть, что $c_{\pm(2k+1)}(f) = 0$ при всех $k \neq k_0$ и

$$c_{\pm(2k_0+1)}(f) = \pm \lim_{|a|\to(2k_0+1)\frac{\pi}{2}} \frac{1}{i}\,\frac{4|a|}{\pi^2}(-1)^{k_0}\frac{\cos|a|}{(2k_0+1)^2 - \frac{4}{\pi^2}|a|^2} = \pm\frac{1}{2i}.$$

Значит, в этом случае правая часть равенства (3) совпадает с определением $\sin a$. Пусть μ есть дискретная мера, сосредоточенная в точках $-\frac{1}{|a|}(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ с соответствующими массами $c_{2k+1}(f)$. Поскольку

$$\sum_{k\in Z} \left|c_{2k+1}(f)\right| < \infty,$$

имеем $f(x) = \widehat{\mu}(x)$ и

$$\widehat{\mu}(a) = \frac{1}{i}\,\frac{4|a|}{\pi^2}\sum_{k\in Z}(-1)^{|k|}\frac{\cos|a|}{(2k+1)^2 - \frac{4}{\pi^2}|a|^2}\exp\left[i\frac{1}{|a|}(2k+1)\frac{\pi}{2}a\right].$$

Остается показать, что $\sin a = \widehat{\mu}(a)$. Для произвольного λ, где $0 < \lambda < 1$, положим $b = \lambda a$. Возьмем функцию $g \in S(R)$ такую, что $\widehat{g} \equiv 1$ в $\sigma(b)$ и $\widehat{g} \equiv 0$ в $R \setminus (-|a|, |a|)$.

Далее положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i}\big[g(x+1) - g(x-1)\big].$$

Нетрудно видеть, что

$$\widehat{\varphi}(x) = \sin x \widehat{g}(x) = \widehat{\mu}(x)\,\widehat{g}(x)$$

и поэтому

$$\sin b \widehat{g}(b) = \widehat{\mu}(b)\,\widehat{g}(b).$$

Поскольку $\widehat{g}(b)$ есть единица алгебра A (см. свойство б) выше), имеем

$$\sin b = \widehat{\mu}(b)$$

или

$$\sin \lambda a = \widehat{\mu}(\lambda a), \quad 0 < \lambda < 1.$$

В последнем равенстве, переходя к пределу при $\lambda \to 1$, получаем

$$\sin a = \widehat{\mu}(a).$$

Пусть теперь $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $|\sin a| = \sin |a|$ (см. свойство в) выше). С другой стороны, если положить в равенстве (3) $a = |a|e$, то получим

$$\sin |a| = \frac{4|a|}{\pi^2} \sum_{k \in Z} \frac{\cos |a|}{(2k+1)^2 - \frac{4}{\pi^2}|a|^2}.$$

Таким образом, сумма модулей коэффициентов в разложении (3) есть $|\sin a|$.

Теорема доказана.

Заметим, что совпадение нормы и спектрального радиуса $\sin a$ (для эрмитовых a при $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$) является очевидным следствием равенства (3).

Используя (3), получаем в пространстве B_σ следующую интерполяционную формулу.

Следствие. *Если* $f \in B_\sigma$ *и* $0 \leqslant \sigma h \leqslant \frac{\pi}{2}$, *то*

$$f(x+h) - f(x-h) = \\ = \frac{8\sigma h}{\pi^2} \sum_{k \in Z} (-1)^{|k|} \frac{\cos \sigma h}{(2k+1)^2 - \frac{4\sigma^2 h^2}{\pi^2}|a|^2} f\left(x + \frac{1}{\sigma}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$\frac{4\sigma h}{\pi^2} \sum_{k \in Z} \frac{\cos \sigma h}{(2k+1)^2 - \frac{4\sigma^2 h^2}{\pi^2}} = \sin \sigma h.$$

Литература

1. Е. А. Горин, *Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов.* — Вестник Харьковского университета вып. **45**, No. 205 (1980), 77–105.
2. Ю. А. Брудный, Е. А. Горин, *Изометрические представления и дифференциальные неравенства.* Ярославский государственный университет (1981).
3. H. A. Konig, *Functional calculus for hermitian elements of complex Banach algebras.* — Arch. Math. **28**, No. 4 (1977), 422–430.
4. A. M. Sinclair, *The norm of a hermitian element in a Banach algebra.* — Proc. Am. Math. Soc. **28** (1971), 446–449.
5. A. Browder, *On Bernstein's inequality and the norm of hermitian operators.* — Am. Math. Monthly **78** (1971), 871–873.
6. F. Bonsall, T. Duncan, *Complete normed algebras.* Springer-Verlag (1973).

Mustafaev G. S. and Karaev M. T. Expansion of the element $\sin a$ in exponentials for Hermitian a.

Let A be a complex Banach algebra with identity and $a \in A$ a Hermitian element. An interpolation formula is proved expressing $\sin a$ in terms of exponentials and implying, in particular, the identity $\|\sin a\| = |\sin a|$.

Институт математики
и механики
АН Азербайджана
ilham@lan.ab.az
atig@lan.ab.az

Поступило 10 мая 2000 г.