Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. М. Рогинская

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ И $\mathcal{M}$–ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ЕДИНИЧНОГО ШАРА

1. Для того, чтобы сформулировать основные результаты этой заметки, нужна небольшая подготовка. Пусть M – метрическое пространство (для простоты будем считать его компактным), μ – конечная регулярная борелевская мера на M, β – вещественное число. Положим

$$D_\beta(\mu)(x) = \limsup_{\delta\to 0} \delta^{-\beta}|\mu|\{y : \mathrm{dist}(x, y) \leqslant \delta\}, x \in M.$$

Очевидно, что $D_\beta(\mu) \equiv 0$ при $\beta < 0$, однако нам будет удобно допускать отрицательные значения параметра β. Как видно из следующей теоремы, функция $D_\beta(\mu)$ при $\beta \geqslant 0$ тесно связана с “хаусдорфовой размерностью” меры μ.

Теорема 1. *Пусть $\beta \geqslant 0$. Существует единственное разложение $\mu = \rho + \nu$, где мера ρ сосредоточена на множестве σ-конечной β-меры Хаусдорфа, а мера ν равна нулю на всяком множестве σ-конечной β-меры Хаусдорфа. В таком разложении $\rho = \chi_F\mu$, где $F = \{D_\beta(\mu) > 0\}$.*

Разумеется, этот факт не нов, и мы лишь наметим доказательство ради полноты. Как подсказывает формулировка, положим $\rho = \chi_F\mu$. Пусть h_β – β-мера Хаусдорфа. Из леммы Витали о покрытиях следует, что $h_\beta\{D_\beta(\mu) > t\} \leqslant \frac{c\|\mu\|}{t}$, $t > 0$, поэтому множество F имеет σ-конечную β-меру Хаусдорфа. Для меры ν справедливо соотношение $D_\beta(\nu) = 0$ на множестве $M \setminus F$, т.е. на борелевском носителе меры ν, и, тем более, п.в. относительно ν. Простые стандартные рассуждения показывают, что тогда $|\nu|(K) = 0$ для любого множества K конечной β-меры Хаусдорфа (указание: пусть $\varepsilon > 0$, $E_N = \{x \in M : |\nu|\{y : \mathrm{dist}(x, y) \leqslant r\} < \varepsilon r^\beta$ при всех $r < 1/N\}$; тогда легко видеть, что $|\nu|(K \cap E_N) \leqslant C_\beta\varepsilon h_\beta(K)$). $\square$

Замечание. Нетрудно доказать, что если мера λ сосредоточена на множестве σ-конечной β-меры Хаусдорфа, то $D_\beta(\lambda) > 0$ п.в. относительно λ. Следовательно, таким свойством обладает мера ρ из теоремы 1.

Родственные результаты имеются в статье [4].

В дальнейшем меру ρ, доставляемую теоремой 1 для данного β, будем обозначать через μ_β. Будем считать, что $\mu_\beta = 0$ при $\beta < 0$.

Введем еще количественную характеристику "размерности" меры μ, положив $d_\beta(\mu) = \|\mu_\beta\|$. Очевидно, что $d_\beta(\mu) = |\mu|\{D_\beta(\mu) > 0\}$; последнее определение годится и при $\beta < 0$. Ясно, что функция $\beta \mapsto d_\beta(\mu)$ – неубывающая при $\beta \in \mathbb{R}$.

2. На единичной сфере S^{2n-1} в $\mathbb{C}^n$ имеются две естественные метрики: евклидова $e(x,y) = |x-y|$ и метрика Кораньи $k(x,y) = |1-\langle x,y\rangle|^{1/2}$. Мы будем писать $\mu^k_\alpha, \mu^e_\alpha$, D^k_α, d^k_α и D^e_α, d^e_α, чтобы указать, к какой из этих метрик относятся введенные выше характеристики. Напомним, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e(\omega,\xi) \leqslant k(\omega,\xi) \leqslant e(\omega,\xi)^2, \quad \omega,\xi \in S^{2n-1}. \tag{1}$$

Сформулируем главный результат статьи.

Теорема 2. *Если мера μ на сфере S^{2n-1} служит граничными значениями для некоторой плюригармонической функции в единичном шаре, то*

$$\mu^e_\gamma = \mu^k_{2(1+\gamma-n)} \quad \textit{и, следовательно,}$$

$$d^e_\gamma(\mu) = d^k_{2(1+\gamma-n)}(\mu), \quad \gamma < 2n-1. \tag{2}$$

Если $\gamma < 2n-2$, то обе части равенства (2) *обращаются в нуль.*

Замечание. Равенство (2) верно и при $\gamma = 2n-1$, но этот случай неинтересен, ибо соответствует максимально возможной хаусдорфовой размерности ($2n-1$ в случае метрики e и $2n$ в случае метрики k). Второе утверждение (об обращении в нуль обеих частей равенств) известно – например, теорема 3.1.2 в [1] существенно сильнее и показывает, что так же будет и при $\gamma = 2n-2$. Автору, однако, кажется любопытным, что указанную информацию можно получить в рамках идей, обсуждаемых в этой заметке (метод доказательства из [1] – совсем другой).

Приступая к доказательству теоремы 2, отметим, что при $\gamma < 2n-1$ для любой меры μ справедливо равенство

$$\mu^k_{2(1+\gamma-n)} = g\mu^e_\gamma,$$

где g – борелевская функция, $0 \leqslant g \leqslant 1$. Действительно, если $\gamma < n-1$, то левая часть равна нулю, и доказывать нечего. Пусть $\gamma \geqslant n-1$. Вспомним, что объем шара радиуса r в метрике Кораньи имеет порядок r^{2n} $(0 < r \leqslant 2)$. Стандартные оценки путем сравнения объемов показывают, что число точек в минимальной евклидовой ε-сети для такого шара не превосходит $C(n)\frac{(r+\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}})^{2n}}{(\varepsilon/2)^{2n-1}}$. Следовательно, шар радиуса r в метрике Кораньи может быть покрыт примерно r^{2-2n} евклидовыми шарами радиуса, пропорционального r^2. Сумма радиусов всех этих покрывающих шаров, возведенных в степень γ, не превосходит величины

$$cr^{2-2n}r^{2\gamma} = cr^{2(1+\gamma-n)}.$$

Это означает, что всякое множество конечной $2(1+\gamma-n)$-меры Хаусдорфа относительно метрики k будет иметь конечную γ-меру Хаусдорфа относительно евклидовой метрики. Поэтому нужное равенство следует из теоремы 1.

Теперь установим оценку $d^e_\gamma(\mu) \leqslant d^k_{2(1+\gamma-n)}(\mu)$ в случае плюригармонической меры μ. (Ввиду доказанного выше, из нее сразу следуют равенства (2)). Здесь понадобятся более изощренные рассуждения. Они приводятся в следующем пункте.

3. Функция u в единичном шаре пространства $\mathbb{C}^n$ называется M-гармонической, если $\widetilde{\Delta}u = 0$, где $\widetilde{\Delta}$ – оператор Лапласа–Бельтрами. Пусть μ – конечная борелевская мера на S^{2n-1}, тогда M-гармоническая функция, для которой мера μ служит граничными значениями, задается интегралом Пуассона–Сегё:

$$\mathcal{P}[\mu](r\xi) = \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{(1-r^2)^n}{|1-\langle\omega, r\xi\rangle|^{2n}}\,d\mu(\omega), \quad \xi \in S^{2n-1}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Аналогично, гармоническое продолжение меры μ в шар задается интегралом Пуассона:

$$\mathcal{P}[\mu](r\xi) = \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{1-r^2}{|\omega - r\xi|^2}\,d\mu(\omega), \quad \xi \in S^{2n-1}, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Для $\xi \in S^{2n-1}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathcal{P}^{\alpha}[\mu](\xi) = \limsup_{r\to 1}(1-r^2)^{\alpha}|\mathcal{P}[\mu](r\xi)|,$$
$$P^{\alpha}[\mu](\xi) = \limsup_{r\to 1}(1-r^2)^{\alpha}|P[\mu](r\xi)|.$$

Теорема 3. *Почти всюду относительно меры $|\mu|$ справедливы оценки*

$$\mathcal{P}^{n-\gamma/2}[\mu] \leqslant CD^k_{\gamma}(\mu), \quad \gamma < 2n, \tag{3}$$

$$cD^e_{\gamma}(\mu) \leqslant P^{2n-1-\gamma}[\mu] \leqslant CD^e_{\gamma}(\mu), \quad \gamma < 2n-1, \tag{4}$$

где положительные постоянные c и C зависят только от размерности. В частности,

$$d^k_{\gamma}(\mu) \geqslant \mu\{\mathcal{P}^{n-\gamma/2}[\mu] > 0\}, \quad d^e_{\gamma}(\mu) = \mu\{P^{2n-1-\gamma}[\mu] > 0\} \tag{5}$$

при тех же ограничениях на γ. (Подчеркнем, что теорема верна и при $\gamma \leqslant 0$.)

Закончим доказательство теоремы 2, опираясь на теорему 3. Плюригармоническая функция одновременно гармонична и M-гармонична, поэтому $P[\mu] = \mathcal{P}[\mu]$ в условиях теоремы 2. Пусть $\gamma < 2n-1$, тогда в силу (5)

$$d^e_{\gamma}(\mu) = \mu\{\mathcal{P}^{n-\frac{2(1+\gamma-n)}{2}}[\mu] > 0\} \leqslant d^k_{2(1+\gamma-n)}(\mu)$$

(при этом индекс $2(1+\gamma-n)$ строго меньше числа $2n$, как и требуется в (3)), так что равенства (2) проверены. Далее, из левого неравенства в (1) следует, что $\{D^k_{\gamma}(\mu) > 0\} \subset \{D^e_{\gamma}(\mu) > 0\}$, поэтому $d^k_{\gamma}(\mu) \leqslant d^e_{\gamma}(\mu)$ для всех γ. Из (2) теперь получается неравенство

$$d^k_{\gamma}(\mu) \leqslant d^k_{2(1+\gamma-n)}(\mu), \quad \gamma < 2n-1.$$

Так как функция $\gamma \mapsto d^k_{\gamma}(\mu)$ монотонно возрастает, заключаем, что она постоянна при $\gamma < 2n-2$ (ибо тогда $\gamma > 2(1+\gamma-n)$). Но она равна нулю при $\gamma < 0$, и все доказано. $\square$

Приступая к доказательству теоремы 3, отметим, что она в какой-то степени стандартна: подобные утверждения (как и доказательства) встречались – правда, не в применении к сфере (см., например, [6, 2, 3]).

Автору не известно, можно ли в общем случае расширить (3) до двойного неравенства (как в (4)). Нижняя оценка в (4) доказывается с помощью леммы Безиковича о покрытии для евклидовой метрики. Для метрики Кораньи аналогичный факт неверен, см. [5]. В случае, если мера μ в (3) сосредоточена на множестве σ-конечной γ-меры Хаусдорфа и абсолютно непрерывна относительно последней, нижняя оценка в (3), тем не менее, верна (см. [7]). Верна она и если $\mu \geqslant 0$ (последнее просто).

Проверим неравенство (3). Введем максимальную функцию

$$M_{\gamma,a}[\mu](\xi) = \sup_{r \leqslant a} \frac{|\mu|\{\eta : k(\xi,\eta) \leqslant r\}}{r^\gamma}.$$

Ясно, что $\lim_{a\to 0} M_{\gamma,a}[\mu] = D^k_\gamma[\mu]$.

Для фиксированной точки $\xi \in S^{2n-1}$ положим

$$X_0 = \{\omega \in S^{2n-1} : k(\omega,\xi) < \frac{1}{2}(1-r^2)^{1/2}\},$$
$$X_j = \{\omega \in S^{2n-1} : 2^{j-2}(1-r^2)^{1/2} \leqslant k(\omega,\xi) < 2^{j-1}(1-r^2)^{1/2}\}, \quad j \geqslant 1$$

(разумеется, $X_j = \varnothing$ при больших значениях k). Для оценки знаменателя ядра Пуассона–Сегё заметим, что $1-\langle\omega, r\xi\rangle = 1-r+r(1-\langle\omega,\xi\rangle)$, а вещественная часть второго слагаемого неотрицательна. Следовательно,

$$|1-\langle\omega,r\xi\rangle| \geqslant r|1-\langle\omega,\xi\rangle| \geqslant \frac{1}{2}2^{2(j-2)}(1-r^2), \tag{6}$$

если $\omega \in X_j$ с $j \geqslant 1$, а $r \geqslant 1/2$. Если же $\omega \in X_0$, то

$$|1-\langle\omega,r\xi\rangle| \geqslant 1-r-rk(\omega,\xi)^2 \geqslant \frac{1}{2}(1-r). \tag{7}$$

В соответствии с этими оценками, при $r \geqslant 1/2$ имеем

$$|\mathcal{P}[\mu](r\xi)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{X_j} \frac{(1-r^2)^n}{|1-\langle\omega,r\xi\rangle|^{2n}}\,d\mu(\omega)\right|$$

$$\leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}(1-r^2)^{-n}2^{-4jn}|\mu|\{\omega : k(\omega,\xi) \leqslant 2^{j-1}(1-r^2)^{1/2}\}.$$

Меру шара в j-м слагаемом мы оценим сверху величиной $(2^{j-1}(1-r^2)^{1/2})^\gamma M_{\gamma,(1-r^2)^{1/4}}[\mu](\xi)$, если j удовлетворяет неравенству $2^{j-1}(1-r^2)^{1/2} \leqslant (1-r^2)^{1/4}$; для прочих j промажорируем эту меру числом $\|\mu\|$. Суммируя геометрические прогрессии и умножая на $(1-r^2)^{n-\gamma/2}$, получим

$$|(1-r^2)^{n-\gamma/2}\mathcal{P}[\mu](r\xi)| \leqslant C(n)(M_{\gamma,(1-r^2)^{1/4}}[\mu](\xi) + (1-r^2)^{n-\gamma/2}\|\mu\|),$$

что в пределе при $r \to 1$ дает (3).

Правое неравенство в (4) доказывается так же: максимальная функция строится по евклидовым шарам, а сфера разбивается на множества Y_j,

$$Y_0 = \{\omega : |\omega - \xi| < \frac{1}{2}(1-r)\},$$
$$Y_j = \{\omega : 2^{j-2}(1-r) \leqslant |\omega - \xi| \leqslant 2^{j-1}(1-r)\}, \quad j \geqslant 1.$$

Мы опускаем вычисления.

Для доказательства левого неравенства в (4) нужна следующая лемма, являющаяся частным случаем результатов Безиковича. Обозначим через $B(x,r)$ евклидов шар радиуса r с центром в точке x.

Лемма 4. *Пусть μ_1, μ_2 – неотрицательные взаимно сингулярные меры на сфере, и пусть $C, c > 0$. Тогда для μ_1-почти всякой точки ξ при всех достаточно малых r справедливо неравенство*

$$c\mu_1(B(\xi,r)) - C\mu_2(B(\xi,r)) \geqslant \frac{c}{2}(\mu_1+\mu_2)(B(\xi,r)).$$

Ради полноты приведем доказательство. Пусть K – множество тех точек ξ, для которых утверждение неверно. Для каждой точки $\xi \in K$ можно найти шар $B = B(\xi,r)$ сколь угодно малого радиуса и такой, что $C'\mu_2(B) > \mu_1(B)$, где C' зависит лишь от C и c. Выберем компактные подмножества K_1 и K_2 непересекающихся носителей мер μ_1 и μ_2 такие, что $(\mu_1+\mu_2)(S^{2n-1} \setminus (K_1 \cup K_2)) < \varepsilon$.

Пусть $\nu = \mu_2\big|_{S\setminus K_2}$, тогда $\|\nu\| < \varepsilon$. Для каждой точки множества $K \cap K_1$ выберем шар B с центром в этой точке и не пересекающий K_2, для которого $C'\mu(B) > \mu_1(B)$. По лемме Безиковича о покрытиях, некоторое семейство $\{B_\alpha\}$ таких шаров покрывает множество $K \cap K_1$ с кратностью не выше $C(n)$. Следовательно,

$$\mu_1(K \cap K_1) \leqslant \mu_1(\cup B_\alpha) \leqslant C'\Sigma\mu_2(B_\alpha) = C'\Sigma\nu(B_\alpha)$$
$$\leqslant C'C(n)\nu(\cup B_\alpha) \leqslant C'C(n)\varepsilon.$$

Значит, $\mu_1(K) \leqslant \mu_1(K \cap K_1) + \mu_1(K \setminus K_1) \leqslant C''\varepsilon$. □

Так как ядро Пуассона положительно, то левое неравенство в (4) достаточно проверить для вещественных мер μ. Имеем:

$$P[\mu](r\xi)$$
$$\geqslant \sum_{j:2^{j-1}(1-r)\leqslant 4(1-r)^{1/2n}} \int\limits_{Y_j} \frac{1-r^2}{|\omega - r\xi|^{2n}} \, (d\mu_+(\omega) - d\mu_-(\omega)) - C(n)\|\mu\|.$$

Так как при $\omega \in Y_j$ справедливы неравенства

$$a(n)2^{-2jn}(1-r)^{1-2n} \leqslant \frac{1-r^2}{|\omega - r\xi|^{2n}} \leqslant A(n)2^{-2jn}(1-r)^{1-2n},$$

то, продолжая оценку и применяя преобразование Абеля, найдем

$$P[\mu](r\xi) \geqslant$$
$$\sum_{2^{j-1}(1-r)\leqslant 4(1-r)^{1/2n}} [a(n)2^{-2jn}(1-r)^{1-2n}\mu_+(Y_j) - A(n)2^{-2jn}(1-r)^{1-2n}\mu_-(Y_j)]$$
$$- C(n)\|\mu\| \geqslant$$
$$(1-r)^{1-2n}\sum_{\dots}[a'(n)2^{-2jn}\mu_+(\bigcup_{l\leqslant j} Y_j) - A(n)2^{-2jn}\mu_-(Y_j)] - C(n)\|\mu\|.$$

По лемме 4, при μ_+-почти каждом ξ выражение в квадратных скобках больше или равно числа $c|\mu|(Y_j) > 0$, если только r достаточно близко к единице. Оставляя в сумме лишь член с $j = 0$, получаем

$$P[\mu](r\xi) \geqslant c(1-r)^{1-2n}|\mu|(Y_0) - C(n)\|\mu\|,$$

откуда следует, что $P^{2n-1-\gamma}[\mu] \geqslant cD^e_\gamma(\mu)$ п.в. относительно μ_+. Аналогично проверяется, что это неравенство выполняется и п.в. относительно μ_-.

Благодарности. Автор признателен А. Б. Александрову, Н. Гарофало, Х. Карлссону, Б. Берндтссону за полезные обсуждения и С. В. Кислякову за помощь в подготовке рукописи.

Литература

1. А. Б. Александров, *Теория функций в шаре.* — В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ, Москва, т. 8 (1985), 115–190.

2. A. S. Besikovitch, *A general form of the covering principle and relative differentation of additive functions*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **41** (1945), 103–110.
3. A. S. Besikovitch, *A general form of the covering principle and relative differentation of additive functions*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **42** (1946), 1–10.
4. J.-P. Kahane, *Désintegration des mesures selon la demension*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, **306** (1988), 107–110.
5. A. Korányi, H. M. Reimann, *Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg Group*. Adv. Math., **111**, No. 1 (1995), 1–88.
6. N. A. Watson, *Applications of geometric measure theory to the study of Gauss–Weierstrass and Poisson integrals*. Ann. Acad. Sci. Fennicæ, Ser. A. I. Math., **19** (1994), 115–132.
7. Ph. Jaming, M. Roginskaya, (in preparation).

Roginskaya M. M. Asymptotical properties of harmonic and M-harmonic functions near the boundary of the unit sphere.

On the boundary of the complex n-ball, there are two a natural notions of Hausdorff dimension, namely, those related to the Euclidean and the Koranyi metric. It is shown that "Riesz decompositions" relative to these two dimension scales are linked rigidly for the measures that are boundary values of pluriharmonic functions in the ball.

Department of Math.
Chalmers University of
Technology and Göteborg University
SE-41296, Göteborg, Sweden
maria@math.chalmers.se

Поступило 3 мая 2000 г.