Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

В. А. Слоущ

АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ПО БОЛЬШОЙ КОНСТАНТЕ СВЯЗИ ПРИ СИЛЬНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1. Введение

Настоящее краткое сообщение развивает тематику работ автора [1, 2] и содержит результаты абстрактного характера. Применениям к дифференциальным операторам посвящена заметка [3].

1.1. Пусть A – самосопряженный полуограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что спектр A имеет лакуну (α, β). Пусть $B(t) = A + tW^*W$, $t > 0$, – семейство возмущенных операторов. Существенно, что оператор $W(A - iI)^{-1}$ не предполагается ограниченным. При некоторых условиях (подробнее см. [1, 2]) спектр оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) дискретен при всяком $t > 0$. Пусть $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\lambda \in (\alpha, \beta)$, $\tau > 0$, – число собственных значений, прошедших через фиксированную точку λ лакуны при увеличении t от 0 до τ. Ниже исследуется асимптотика величины $N(\lambda, A, W, \tau)$ при больших τ. Кроме того, изучается величина

$$N(\alpha, A, W, \tau) := \lim_{\lambda \to \alpha + 0} N(\lambda, A, W, \tau).$$

Основным результатом работы являются теоремы 3.4 и 3.5. В теореме 3.5 задача об асимптотике величины $N(\lambda, A, W, \tau)$ сводится к задаче о спектральной асимптотике некоторого компактного оператора, что открывает возможности для применений. В теореме 3.4 получены оценки величины $N(\alpha, A, W, \tau)$. Сообщение не содержит доказательств, которые будут приведены в другом месте. В работе используются результаты статьи [2]. Необходимые сведения приведены в разделе 2. Результаты настоящего сообщения находят применение (см. [3]) при изучении дифференциальных операторов, когда возмущение имеет более высокий дифференциальный порядок, чем исходный оператор. Автор вы-

ражает глубокую благодарность М. Ш. Бирману за постановку задачи и помощь в работе.

1.2. Обозначения. Всюду ниже A – самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для линейного плотно определенного оператора M через $\mathrm{Dom}M$, M^*, $\rho(M)$ и $\sigma(M)$ обозначаются соответственно его область определения, сопряженный оператор, резольвентное множество и спектр. Для самосопряженного оператора T и борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$ через $E_T(\delta)$ обозначается спектральный проектор оператора T, а через $\pi_T(\delta)$ – размерность подпространства $E_T(\delta)\mathcal{H}$. Через $\sigma_e(T)$ обозначается существенный спектр оператора T. Если оператор T самосопряжен и полуограничен снизу, то его точная нижняя грань $\inf \sigma(T)$ обозначается m_T. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ – гильбертовы пространства. Через $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначается пространство линейных ограниченных операторов, переводящих $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, а через $S_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначим класс компактных операторов из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ (в случае $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$ вместо $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ будем писать $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, и аналогично для S_∞). Пусть $T \in S_\infty(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и $s_k(T)$ – сингулярные числа оператора T. Положим

$$n(s, T) := \#\{k \in \mathbb{N} \ : \ s_k(T) \geqslant s\}, \quad s > 0.$$

Через $\Sigma_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, $p > 0$, (подробнее см. [5]) обозначается класс компактных операторов, выделенный условием

$$|T|_p^p := \sup_{s>0} s^p n(s, T) < \infty, \quad p > 0.$$

Функционал $|\cdot|_p$ обладает свойствами квазинормы на Σ_p. Пространство Σ_p полно относительно $|\cdot|_p$ и несепарабельно. Условием

$$n(s, T) = o(s^{-p}), \quad s \to 0,$$

в $\Sigma_p(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ выделяется сепарабельное подпространство $\Sigma_p^0(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$. Функционалы

$$\Delta_p(T) := \limsup_{s \to +0} s^p n(s, T), \quad \delta_p(T) := \liminf_{s \to +0} s^p n(s, T), \quad T \in \Sigma_p,$$

непрерывны в классе Σ_p, $p > 0$.

2. Предварительные сведения

2.1. В этом пункте мы опишем невозмущенный оператор A и семейство возмущенных операторов $B(t)$, $t > 0$. Будут сформулированы условия дискретности спектра оператора $B(t)$ в спектральной лакуне оператора A. Всюду в дальнейшем оператор A положительно определен ($m_A > 0$), спектр $\sigma(A)$ содержит внутреннюю лакуну (α, β); возмущение неотрицательно. Более точно, пусть a – полуторалинейная форма, соответствующая оператору A; $d[a] = \mathrm{Dom}A^{1/2}$ – ее область определения, $a[u,v] = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)$, u, $v \in d[a]$. Пусть W_0 – плотно определенный замыкаемый линейный оператор, $\mathrm{Dom}W_0 =: D_0 \subset d[a]$. Обозначим через W замыкание W_0. Введем форму

$$b_0(t)[u,v] = a[u,v] + t(W_0u, W_0v), \quad u, v \in D_0,\ t > 0.$$

Форма $b_0(t)$ допускает замыкание $b(t)$. Легко понять, что $d[b(t)]$ не зависит от $t > 0$,

$$\widehat{d} := d[b(t)] \subset d[a] \cap \mathrm{Dom}W,$$

$$b(t)[u,v] = a[u,v] + t(Wu, Wv), \quad u, v \in \widehat{d}, \quad t > 0.$$

Через $B(t)$ обозначим самосопряженный в $\mathcal{H}$ оператор, порожденный формой $b(t)$. Ниже предполагается, что выполнены условия

$$E_A[m_A, \alpha]\mathcal{H} \subset \widehat{d}, \quad m_A < \alpha, \tag{2.1}$$

$$WE_A[m_A, \alpha] \in S_\infty(\mathcal{H}). \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *При условиях (2.1), (2.2) спектр оператора $B(t)$, $t > 0$, в лакуне (α, β) дискретен и не накапливается к правому краю, т. е. $\sigma_e(B(t)) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$, и при некотором $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ выполнено $(\beta - \varepsilon, \beta) \subset \rho(B(t))$.*

2.2. Вспомогательная оператор-функция $\Gamma(\lambda, t)$**.** Предположим, что выполнены условия (2.1) и (2.2). Обозначим для краткости $E_1 = E_A[m_A, \alpha]$, $E_2 = E_A[\beta, +\infty)$, $\mathcal{H}_k = E_k\mathcal{H}$, $I_k = I\mid_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$. Корректно определены следующие операторы

$$A_1 = A\mid_{\mathcal{H}_1}, \quad Q_1 = (WE_1)^*(WE_1)\mid_{\mathcal{H}_1}.$$

Обозначим через $b_2(t)$, $t > 0$, сужение формы $b(t)$ на $d[b_2] := \widehat{d} \cap \mathcal{H}_2$. Нетрудно проверить, что форма $b_2(t)$ положительно определена, плотно задана и замкнута в $\mathcal{H}_2$. Через $B_2(t)$ обозначим соответствующий форме $b_2(t)$ самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_2$. Ясно, что $m_{B_2(t)} \geqslant \beta$, а потому $(-\infty, \beta) \subset \rho(B_2(t))$. Корректно определена неотрицательная оператор-функция

$$\begin{aligned} F(t,\lambda) &:= t^2 (WE_1)^* (W(B_2(t) - \lambda I_2)^{-1/2} E_2) \times \\ &\times (W(B_2(t) - \lambda I_2)^{-1/2} E_2)^* (WE_1), \quad t > 0, \quad \lambda < \beta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

причем $F(t,\lambda) \in S_\infty(\mathcal{H})$. Далее, $F(t,\lambda)\mathcal{H}_2 = \{0\}$, а потому $\mathrm{Ran} F(t,\lambda) \subset \mathcal{H}_1$. Положим

$$F_1(t,\lambda) := F(t,\lambda)\,|_{\mathcal{H}_1}, \quad \Gamma(\lambda,t) := A_1 + tQ_1 - F_1(t,\lambda). \tag{2.4}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.2) *и* $\lambda \in (\alpha,\beta)$. *Тогда при любом* $\tau > 0$

$$\#\{t \in (0,\tau] : \ \lambda \in \sigma(B(t))\} < +\infty,$$

$$N(\lambda, A, W, \tau) = \pi_{\Gamma(\lambda,\tau)}[\lambda, +\infty), \tag{2.5}$$

где

$$N(\lambda, A, W, \tau) := \sum_{t \in (0,\tau]} \dim\mathrm{Ker}(B(t) - \lambda I)$$

– число собственных значений оператора $B(t)$, *прошедших через точку* λ *при увеличении* t *от* 0 *до* τ.

Замечание. В условиях теоремы 2.2 все собственные значения оператора $B(t)$ при увеличении t двигаются через точку λ слева направо. Более точно, если $\lambda \in \sigma(B(t_0))$, то для всякого достаточно малого $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\pi_{B(t)}[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] = \pi_{B(t)}[\lambda, \lambda + \varepsilon] = \dim\mathrm{Ker}(B(t_0) - \lambda I), \ t \in [t_0, t_0 + \delta],$$
$$\pi_{B(t)}[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] = \pi_{B(t)}[\lambda - \varepsilon, \lambda] = \dim\mathrm{Ker}(B(t_0) - \lambda I), \ t \in [t_0 - \delta, t_0].$$

3. Основные результаты

3.1. Оценки спектра. Обсудим свойства спектра оператора $B(t)$, $t > 0$, в лакуне (α,β), вытекающие из теоремы 2.2. Равенство (2.5) вместе с вариационным принципом сразу приводит к оценке, достаточно удобной для применений.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 2.2 *справедливо неравенство*

$$N(\lambda, A, W, \tau) \leqslant \pi_{A_1+\tau Q_1}[\lambda, +\infty), \quad \tau > 0. \tag{3.1}$$

Поскольку все собственные значения оператора $B(t)$ в (α, β) двигаются с ростом t вправо, из (2.5) вытекает

Следствие 3.2. *Если выполнены условия* (2.1), (2.2) *и* $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, *то*

$$\pi_{B(t)}[\alpha_1, \beta_1) = N(\alpha_1, A, W, t) - N(\beta_1, A, W, t). \tag{3.2}$$

Комбинируя (3.1) и (3.2), получаем

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.2). *Тогда*

$$\pi_{B(t)}(\alpha, \beta) \leqslant \pi_{A_1+tQ_1}(\alpha, +\infty), \ t > 0. \tag{3.3}$$

В силу равенств (2.3)–(2.5), функция $N(\cdot, A, W, t)$ не возрастает на интервале (α, β). Следовательно (ср. [4]), корректно определена величина

$$N(\alpha, A, W, t) := \lim_{\lambda \to \alpha+0} N(\lambda, A, W, t), \quad t > 0. \tag{3.4}$$

Предел (3.4) может быть как конечным, так и бесконечным. При этом, разумеется,

$$N(\lambda, A, W, t) \leqslant N(\alpha, A, W, t), \quad \lambda \in (\alpha, \beta), \quad t > 0. \tag{3.5}$$

Введем оператор-функцию, действующую в пространстве $\mathcal{H}$,

$$\chi(\lambda) = -WE_1(A_1 - \lambda I_1)^{-1}(WE_1)^*, \quad \lambda > \alpha. \tag{3.6}$$

При условиях (2.1) и (2.2) справедлив принцип Бирмана–Швингера, выражающийся в данном случае равенством

$$\pi_{A_1+tQ_1}[\lambda, +\infty) = \pi_{\chi(\lambda)}[t^{-1}, +\infty), \quad \lambda > \alpha, \quad t > 0. \tag{3.7}$$

Неотрицательная оператор-функция (3.6) не возрастает на интервале (α, ∞). Предположим, что она имеет компактную мажоранту:

$$\chi(\lambda) \leqslant \chi_0 \in S_\infty(\mathcal{H}), \quad \lambda > \alpha. \tag{3.8}$$

Используя (3.1), (3.3) и (3.7), можно получить следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.2) *и* (3.8). *Тогда*

(i) *при любом* $t > 0$ *правая часть в* (3.3) *конечна, а следовательно, спектр оператора* $B(t)$ *в лакуне* (α, β) *конечен;*

(ii) *при любом* $t > 0$ *величина* $N(\alpha, A, W, t)$ *конечна и справедлива оценка*

$$N(\alpha, A, W, t) \leqslant \pi_{\chi_0}[t^{-1}, +\infty), \quad t > 0. \tag{3.9}$$

3.2. Асимптотика. Здесь обсуждаются условия, при которых оценка (3.1) превращается в асимптотическое (при $\tau \to \infty$) равенство. Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} \Delta_q(\lambda, A, W) &:= \limsup_{t\to+\infty} t^{-q} N(\lambda, A, W, t), \quad \lambda \in (\alpha, \beta), \quad q > 0; \\ \delta_q(\lambda, A, W) &:= \liminf_{t\to+\infty} t^{-q} N(\lambda, A, W, t), \quad \lambda \in (\alpha, \beta), \quad q > 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Разумеется, интересен случай, когда при некотором $q > 0$ такие пределы конечны. Согласно (3.7), неравенство (3.1) переписывается в виде

$$N(\lambda, A, W, \tau) \leqslant \pi_{\chi(\lambda)}[\tau^{-1}, +\infty), \quad \tau > 0, \quad \lambda \in (\alpha, \beta). \tag{3.11}$$

Далее, пусть кроме (2.1), выполнены включения

$$WE_1\mathcal{H} \subset \mathrm{Dom} W^*, \quad W^*WE_1 \in \Sigma_q(\mathcal{H}), \quad q > 0, \tag{3.12}$$

$$E_A[\beta, \gamma](AW^*W - W^*WA)E_1 \in \Sigma_q^0, \quad \forall \gamma > \beta. \tag{3.13}$$

Из условия (3.12) вытекает, что $WE_1 \in \Sigma_{2q}(\mathcal{H})$, откуда следует включение $\chi(\lambda) \in \Sigma_q(\mathcal{H})$. Неравенство (3.11) приводит к оценкам

$$\Delta_q(\lambda, A, W) \leqslant \Delta_q(\chi(\lambda)), \quad \delta_q(\lambda, A, W) \leqslant \delta_q(\chi(\lambda)), \quad \lambda \in (\alpha, \beta). \tag{3.14}$$

Укажем условия, при которых оценки (3.14) превращаются в равенства.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* (2.1), (3.12), (3.13) *и* $\lambda \in (\alpha, \beta)$. *Тогда*

$$\Delta_q(\lambda, A, W) = \Delta_q(\chi(\lambda)), \quad \delta_q(\lambda, A, W) = \delta_q(\chi(\lambda)).$$

Если спектр оператора $\chi(\lambda)$ имеет асимптотику порядка q (т. е. $\delta_q(\chi(\lambda)) = \Delta_q(\chi(\lambda)) < \infty$), то величина $N(\lambda, A, W, t)$ в условиях теоремы 3.5 тоже имеет асимптотику, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{-q} N(\lambda, A, W, t), \quad \lambda \in (\alpha, \beta). \tag{3.15}$$

Обсудим возможность распространения асимптотики (3.15) на левый край лакуны. Для этого распространим обозначения (3.10) на случай $\lambda = \alpha$. Из (3.5), (3.9) вытекает

Предложение 3.6. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.2) *и* (3.8). *Тогда величина* $N(\alpha, A, W, t)$ *конечна при любом* $t > 0$, *причем*

$$\Delta_q(\lambda, A, W) \leqslant \Delta_q(\alpha, A, W) \leqslant \Delta_q(\chi_0), \quad \forall \lambda \in (\alpha, \beta),$$
$$\delta_q(\lambda, A, W) \leqslant \delta_q(\alpha, A, W) \leqslant \delta_q(\chi_0), \quad \forall \lambda \in (\alpha, \beta).$$

Из теоремы 3.5 и предложения 3.6 вытекает

Следствие 3.7. *Пусть выполнены условия* (2.1), (3.8), (3.12) *и* (3.13). *Тогда величина* $N(\alpha, A, W, t)$ *конечна при любом* $t > 0$, *и верны неравенства*

$$\begin{aligned} \Delta_q(\chi(\lambda)) \leqslant \Delta_q(\alpha, A, W) \leqslant \Delta_q(\chi_0), \quad \forall \lambda \in (\alpha, \beta), \\ \delta_q(\chi(\lambda)) \leqslant \delta_q(\alpha, A, W) \leqslant \delta_q(\chi_0), \quad \forall \lambda \in (\alpha, \beta). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Если дополнительно имеет место Σ_q*-сходимость*

$$\chi(\lambda) \to \chi_0, \quad \lambda \to \alpha,$$

то из (3.16) *вытекают равенства*

$$\Delta_q(\alpha, A, W) = \Delta_q(\chi_0), \quad \delta_q(\alpha, A, W) = \delta_q(\chi_0).$$

Литература

1. В. А. Слоущ, *Дискретный спектр в лакунах спектра самосопряженного оператора при неограниченных возмущениях.* Зап. науч. семин. ПОМИ, **247** (1997), 237–241.
2. В. А. Слоущ, *Дискретный спектр, возникающий в спектральных лакунах при сильных знакоопределенных возмущениях.* Труды Санкт-Петербургского математического общества, **6** (1998), 213–241.
3. В. А. Слоущ, *Дискретный спектр дифференциальных операторов в спектральных лакунах при неотрицательных возмущениях высокого порядка.* Настоящий том.
4. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations.* Adv. Partial Differential Equations, 2, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp.334–352.

5. M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

Slousch V. A. The discrete spectrum asymptotics with large coupling constant in the case of strong nonnegative perturbations.

Let A be a selfadjoint operator, (α, β) the inner gap in the spectrum of the operator A; let $B(t) = A + tW^*W$, where the operator $W(A - iI)^{-1}$ is not necessarily bounded. Conditions are obtained that guarantee that the spectrum of $B(t)$ in (α, β) be discrete. Let $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\lambda \in (\alpha, \beta)$, $\tau > 0$ be the number of eigenvalues of the operator $B(t)$ having passed the point $\lambda \in (\alpha, \beta)$ as t increases from 0 to τ. The asymptotics $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\tau \to +\infty$, is obtained in terms of the spectral asymptotics of a certain selfadjoint compact operator.

Санкт-Петербургский
государственный университет
vova@VS3648.spb.edu

Поступило 30 июля 2000 г.