Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

В. А. Слоущ

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛАКУНАХ ПРИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

1. Введение

Рассматривается дискретный спектр, возникающий в лакунах спектра полуограниченного снизу дифференциального оператора (ДО) при возмущении оператором более высокого порядка. Такие возмущения не подчинены исходному ДО. Оказывается, однако, что отсутствие подчиненности в определенной мере может быть компенсировано неотрицательностью возмущения. В основе настоящего сообщения лежат результаты абстрактного характера из работ автора [1–3].

1.1. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается самосопряженный эллиптический ДО второго порядка A. Предполагается, что спектр A полуограничен снизу и имеет внутреннюю лакуну (α, β). Возмущение задается выражением вида W^*W, где W – ДО. Возмущенный оператор $B(t) = A + tW^*W$, $t > 0$, содержит "константу связи" t. Точное определение $B(t)$ дается через квадратичную форму. Для $\lambda \in (\alpha, \beta)$ через $N(\lambda, A, W, \tau)$ обозначается число собственных значений оператора $B(t)$, прошедших через точку λ при увеличении t от 0 до τ. Кроме того, изучается величина

$$N(\alpha, A, W, \tau) = \lim_{\lambda \to \alpha + 0} N(\lambda, A, W, \tau). \tag{1.1}$$

Основные результаты работы содержатся в двух группах теорем: 2.1, 2.2, 2.4 и 3.1, 3.2. Для первой группы предполагается, что

$$W^*W = (-\Delta)^m \varphi(x)(-\Delta)^m, \quad \varphi(x) \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

При $m \geqslant 1$ порядок ДО (1.2), очевидно, выше второго. Теорема 2.1 дает условия дискретности спектра $B(t)$ в лакуне (α, β)

при всех $t > 0$. В теореме 2.2 приведены оценки величины $N(\lambda, A, W, \tau)$. В теореме 2.4 для периодического оператора A получены условия конечности спектра $B(t)$ в лакуне (α, β) и оценки сверху величины (1.1). В теоремах 3.1, 3.2 вместо (1.2) рассматривается несколько иное возмущение W^*W, лучше согласованное с (периодическим) оператором A. Помимо аналогов теорем первой группы здесь удается получить асимптотику при $\tau \to \infty$ величины $N(\lambda, A, W, \tau)$ при $\alpha \leqslant \lambda < \beta$.

Как уже упоминалось, ниже используются абстрактные утверждения работ [1–3]. При получении условия конечности спектра оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) использован подход, развитый в [4], хотя случай возмущения высокого порядка технически более сложен. Вывод теоремы 3.1 основан на результатах статей [3] и [5].

Настоящее сообщение не содержит доказательств. Они будут приведены в другом месте. Автор благодарит профессора М. Ш. Бирмана, под руководством которого выполнена эта работа.

1.2. Обозначения. Для самосопряженного оператора T и борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$ через $E_T(\delta)$ обозначается спектральный проектор оператора T, а через $\pi_T(\delta)$ – размерность подпространства $E_T(\delta)\mathcal{H}$. Спектр оператора T обозначается через $\sigma(T)$; существенный спектр – $\sigma_e(T)$. Если оператор T самосопряжен и полуограничен снизу, то его точная нижняя грань обозначается m_T.

Ниже H^1 – класс Соболева. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$ обозначено $< \cdot, \cdot >$.

Пусть (X, ϱ) – сепарабельное пространство с σ-конечной мерой ϱ. Наряду с обычными классами $L_p(X, \varrho)$ нам потребуются "слабые" классы $L_{p,\infty}$. Именно, для измеримой функции $f : X \to \mathbb{C}$ рассмотрим функцию распределения $\mu_f(t) = \varrho\{x \in X \ : \ |f(x)| > t\}$, $t > 0$. Класс функций $L_{p,\infty}(X, \varrho)$, $p > 0$, выделяется условием конечности *квазинормы*

$$|f|_p := \sup_{t>0} (t \mu_f^{1/p}(t)) < +\infty.$$

В $L_{p,\infty}(X, \varrho)$ выделяется сепарабельное подпространство

$$L^0_{p,\infty}(X, \varrho) := \{f \in L_{p,\infty}(X, \varrho) \ : \ \mu_f(t) = o(t^{-p}), \quad t \to 0, \quad t \to \infty\}.$$

Отметим непрерывное вложение $L_p(X,\varrho) \subset L^0_{p,\infty}(X,\varrho)$. Если (X,ϱ) – счетное множество со считающей мерой ($\varrho(e) = \#e$, $e \subset X$), то класс $L_{p,\infty}(X,\varrho)$ обозначают через $l_{p,\infty}(X)$. Например, множество $l_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$ состоит из последовательностей $v = \{v_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^d$, для которых

$$|v|_p := \sup_{t>0}(t\mu_v^{1/p}(t)) < +\infty,$$

где $\mu_v(t) = \#\{n \in \mathbb{Z}^d \ : \ |v_n| > t\}$, $t > 0$. Класс $l^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$ выделяется условием

$$\mu_v(t) = o(t^{-p}), \quad t \to 0.$$

Далее, пусть $\mathbb{Q}^d := [0,1)^d$ – единичный куб в $\mathbb{R}^d$. Положим $\mathbb{Q}^d_n := \mathbb{Q}^d + n$, $n \in \mathbb{Z}^d$. С каждой функцией $f \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ свяжем числовую последовательность

$$v(f) = \{v_n(f)\}, \quad n \in \mathbb{Z}^d, \quad \text{где} \quad v_n = \left(\int\limits_{\mathbb{Q}^d_n} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Обозначим через $G_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$, $p > 0$, класс функций, выделенных условием $v(f) \in l_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$. Будет использоваться обозначение $|||f|||_p := |v(f)|_p$. Класс $G^0_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ выделяется условием $v(f) \in l^0_{p,\infty}(\mathbb{Z}^d)$.

2. Случай возмущения (1.2)

2.1. Дифференциальные операторы. Ниже $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$ – основное гильбертово пространство. Пусть $g(x)$, $p(x)$ – измеримы; $g(x)$ – вещественная симметричная $(d \times d)$-матрица-функция; p – вещественная функция. Пусть выполнены условия

$$c_0|\xi|^2 \leqslant < g(x)\xi, \xi > \leqslant C_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{C}^d, \quad C_0, c_0 > 0, \tag{2.1}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |p(y)|^\sigma dy < +\infty, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \sigma = 1, & d = 1, \\ \sigma > d/2, & d \geqslant 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

В дальнейшем на функции $g(x)$ и $p(x)$ будут наложены дополнительные ограничения.

Введем полуторалинейную форму

$$a[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (< g(x)\nabla u, \nabla v > + p(x)u\bar{v})dx, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Если выполнены условия (2.1) и (2.2), то форма a плотно определена, полуограничена снизу и замкнута в $\mathcal{H}$. Далее, A – самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, порожденный формой a. Оператору A соответствует формальное дифференциальное выражение $A = -\operatorname{div} g(x)\operatorname{grad} + p(x)$. Добавляя, если нужно, к $p(x)$ постоянную, будем в дальнейшем считать, что $m_A > 0$.

Пусть теперь функция φ удовлетворяет следующему условию.

Условие 1. Функция φ ограничена и неотрицательна. Кроме того, найдется такое семейство измеримых множеств $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$, что

$$\varphi\,|_{\Omega_n} \geqslant \varepsilon_n > 0\ ,\quad \operatorname{mes}(\Omega_n \setminus \operatorname{int}\Omega_n) = 0\ ,\quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{R}^d = \{x \in \mathbb{R}^d :\ \varphi(x) = 0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n .$$

Приведем примеры функций φ, удовлетворяющих условию 1.

1) Если $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \geqslant 0$, то функция φ удовлетворяет условию 1.
2) Пусть $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, и для каждого шара $K \subset \mathbb{R}^d$ найдется такое число $\zeta_K > 0$, что $\varphi\,|_K \geqslant \zeta_K$. Тогда функция φ удовлетворяет условию 1.
3) Пусть φ удовлетворяет условию 1. Пусть Ω – измеримое множество в $\mathbb{R}^d$ такое, что $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \operatorname{int}\Omega) = 0$, и χ_Ω – характеристическая функция множества Ω. Тогда функция $\varphi\chi_\Omega$ также удовлетворяет условию 1.

Зададим оператор W_0 формулой

$$W_0 u = \sqrt{\varphi}\,(-\Delta)^m u, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Если выполнено условие 1, то оператор W_0 допускает замыкание, которое мы будем обозначать через W. Далее, введем форму

$$b_0(t)[u, v] = a[u, v] + t(W_0 u, W_0 v), \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad t > 0.$$

Форма $b_0(t)$, $t > 0$, допускает замыкание (которое мы обозначим через $b(t)$) одновременно с оператором W_0. Возмущенный оператор $B(t)$, $t > 0$, определяется как самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, соответствующий форме $b(t)$, $t > 0$. Формально он может быть записан в виде

$$B(t) = -\operatorname{div} g(x)\operatorname{grad} + p(x) + t(-\Delta)^m \varphi(x)(-\Delta)^m, \quad t > 0.$$

2.2. Сохранение существенного спектра. Предположим, что функции $g(x)$ и $p(x)$ дополнительно удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2. Матрица-функция $g(x)$ равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^d$.

Условие 3. Найдется последовательность вещественных функций $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких что

$$\partial^\alpha p_n \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} |p_n(y) - p(y)|^\sigma dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \begin{cases} \sigma = 1, & d = 1, \\ \sigma > d/2, & d \geqslant 2. \end{cases}$$

Замечание. Если $g(x)$ – периодическая $(d \times d)$-матрица-функция с решеткой периодов Γ, то условие 2 равносильно условию $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Если p – периодический потенциал с решеткой периодов Γ, то условие 3 равносильно условию

$$p \in L_1(F_\Gamma), \quad \text{при} \quad d = 1; \quad p \in L_\sigma(F_\Gamma), \quad \sigma > d/2, \quad \text{при} \quad d \geqslant 2,$$

где F_Γ – ячейка решетки Γ.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1 – 3, *а также* (2.1). *Пусть, кроме того,* $\varphi(x) \to 0$, $|x| \to \infty$ *по мере Лебега. Тогда* $\sigma_e(A) = \sigma_e(B(t))$, $t > 0$. *При этом, если* (α, β) *– лакуна в* $\sigma(A)$, *то дискретный спектр оператора* $B(t)$, $t > 0$, *в* (α, β) *не накапливается к точке* β.

Замечание. Все теоремы настоящего параграфа верны и при $m = 0$. Однако этот случай подробно изучался при гораздо менее жестких условиях (см., например, [4, 5]).

2.3. Оценки числа $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\tau > 0$, $\lambda \in (\alpha, \beta)$. Пусть выполнено одно из включений

$$\varphi \in L_{q,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad q > 1; \tag{2.4a}$$

$$\varphi \in G_{q,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad q \in (0, 1]. \tag{2.4b}$$

Заменим условия 2 и 3 более жесткими. Именно, наложим на функции $g(x)$ и $p(x)$ условия

$$\partial^\varkappa g(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad |\varkappa| \leqslant \mathcal{N}_1; \tag{2.5}$$

$$\partial^{\varkappa} p(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \quad |\varkappa| \leqslant \mathcal{N}_2, \tag{2.6}$$

где числа $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ достаточно велики (они зависят от m, d, а также q из (2.4)). Как и выше, (α, β) – лакуна в $\sigma(A)$.

Теорема 2.2. *Пусть функция φ удовлетворяет условию 1, и выполнено одно из условий* (2.4a) *или* (2.4b). *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.5) *и* (2.6). *Тогда*

$$\#\{t \in (0, \tau] : \ \lambda \in \sigma(B(t))\} < +\infty, \quad \lambda \in (\alpha, \beta), \quad \tau > 0,$$

и для величины $N(\lambda, A, W, \tau)$ верны следующие оценки

A) *Если выполнено* (2.4a), *то*

$$N(\lambda, A, W, \tau) \leqslant C_1 |\varphi|_q^q \tau^q, \quad \tau > 0, \quad \lambda \in (\alpha, \beta).$$

Если при этом $\mu_\varphi(t) = o(t^{-q})$, $t \to 0$, то

$$N(\lambda, A, W, \tau) = o(\tau^q), \quad \tau \to +\infty, \quad \lambda \in (\alpha, \beta).$$

B) *Пусть выполнено* (2.4b). *Тогда*

$$N(\lambda, A, W, \tau) \leqslant C_2 |||\varphi|||_q^q \tau^q, \quad \tau > 0, \quad \lambda \in (\alpha, \beta).$$

Если $\varphi \in G^0_{q,\infty}(\mathbb{R}^d)$, то

$$N(\lambda, A, W, \tau) = o(\tau^q), \quad \tau \to +\infty, \quad \lambda \in (\alpha, \beta).$$

Поскольку из неравенства

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant C(1 + |x|^2)^{-\gamma/2}, \quad \gamma > 0, \tag{2.7}$$

вытекает (2.4) при $q = d/\gamma$, получаем

Следствие 2.3. *Если функция φ удовлетворяет условию 1 и выполнены* (2.1), (2.5)–(2.7), *то верна оценка*

$$N(\lambda, A, W, \tau) \leqslant C_0 \tau^{d/\gamma}, \quad \tau > 0.$$

2.4. Спектральное разложение оператора A с периодическими коэффициентами. *Всюду ниже оператор A предполагается периодическим.* Не уменьшая общности, будем считать, что решетка периодов Γ есть $\mathbb{Z}^d$:

$$g(x+n) = g(x), \quad p(x+n) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{Z}^d. \tag{2.8}$$

Далее, кроме оценки (2.1) пусть выполнено условие $p \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Напомним описание спектрального разложения оператора A. Пусть $\mathbb{Q}^d$ – ячейка решётки $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{T}^d$ – ячейка двойственной решётки $(2\pi\mathbb{Z})^d$. В $L_2(\mathbb{Q}^d)$ рассматривается семейство самосопряжённых операторов $A(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, порождённых формами

$$a_k[u,u] := \int\limits_{\mathbb{Q}^d} (< g\nabla u, \nabla u > + p(x)|u|^2)dx, \quad u \in d[a_k],$$

где область определения $d[a_k]$ состоит из тех функций $u \in H^1(\mathbb{Q}^d)$, для которых произведение $e^{-ikx}u(x)$ периодически продолжимо до функций класса $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Операторы $A(k)$ имеют дискретный спектр. Пусть $E_s(k)$ – последовательные собственные значения $A(k)$; $\psi_s(x,k)$ – соответствующие ортонормированные собственные функции, $s \in \mathbb{N}$. Функции $E_s(k)$ обычно называют зонными функциями, а $\psi_s(x,k)$ – блоховскими решениями. Спектр $\sigma(A)$ есть объединение отрезков (зон), которые являются образами отображений $\mathbb{T}^d \ni k \mapsto E_s(k) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$. Зоны могут перекрываться. Далее пусть Φ_s – оператор, определяемый равенством

$$(\Phi_s u)(k) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_s(x,k)} u(x)dx, \;\; s \in \mathbb{N}.$$

Отображение $\Phi_s : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{T}^d)$ – частично изометрическое отображение “на”. Операторы $P_s := \Phi_s^*\Phi_s$, $s \in \mathbb{N}$, являются ортопроекторами в $L_2(\mathbb{R}^d)$; они попарно ортогональны и $\sum_{s\in\mathbb{N}} P_s = I$. Наконец, $A = \sum_{s\in\mathbb{N}} \Phi_s^* E_s \Phi_s$. Операторы P_s перестановочны с A.

Спектр оператора A может содержать лакуны. Пусть $m_A < \alpha < \beta$, и для некоторого номера $l \geqslant 2$

$$\alpha = \max_k E_{l-1}(k), \quad k \in \mathbb{T}^d, \tag{2.9}$$

$$\beta = \min_k E_l(k), \quad k \in \mathbb{T}^d. \tag{2.10}$$

В этом случае (α, β) – лакуна в $\sigma(A)$, и $E_A[m_A, \alpha] = \sum_{s=1}^{l-1} P_s$.

Нам потребуется определение *регулярности* левого края лакуны (см., например, [4]).

Будем говорить, что левый край лакуны (α, β) регулярен, если $\max_k E_{l-2}(k) < \alpha$, $k \in \mathbb{T}^d$, и равенство (2.9) достигается в конечном числе точек $k_j \in \mathbb{T}^d$, $j = 1, ..., M$, каждая из которых есть невырожденная точка максимума для E_{l-1}, т.е.

$$\alpha - E_{l-1}(k) = q_j(k - k_j) + O(|k - k_j|^3), \quad k \to k_j, \quad j = 1, ..., M,$$

где q_j – положительно определенная квадратичная форма.

2.5. Конечность спектра оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) и оценка величины $N(\alpha, A, W, t)$, $t > 0$, в периодическом случае. Здесь предполагается, что выполнены условия (2.1), (2.5), (2.6), (2.8), и для некоторого $l \geqslant 2$ выполнены (2.9), (2.10). Функция $N(\cdot, A, W, t)$ не возрастает на интервале (α, β). Следовательно, соотношением (1.1) корректно определена величина $N(\alpha, A, W, t)$. Предел в (1.1) может быть как конечным, так и бесконечным. Приведем условия конечности спектра оператора $B(t)$, $t > 0$, в лакуне (α, β) и оценку величины (1.1). При этом ограничимся случаем $d \geqslant 3$.

Теорема 2.4. *Пусть $d \geqslant 3$, выполнены условия* (2.1), (2.5), (2.6), (2.8), *и левый край лакуны (α, β) регулярен. Пусть φ удовлетворяет условию* 1 *и выполнено включение $\varphi \in L_{d/2}(\mathbb{R}^d)$. Тогда при любом $t > 0$ спектр оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) конечен, и справедлива оценка*

$$N(\alpha, A, W, t) = o(t^{d/2}), \quad t \to \infty. \tag{2.11}$$

Откажемся теперь от требований $d \geqslant 3$ и регулярности левого края лакуны. Предположим, что

$$\varphi \in L_{q,\infty}(\mathbb{R}^d), \quad (\alpha - E_s(\cdot))^{-1} \in L_q(\mathbb{T}^d), \quad s = 1, ..., l-1, \quad q > 1. \tag{2.12}$$

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.5), (2.6), (2.8), (2.12), *и функция φ удовлетворяет условию* 1. *Тогда при любом $t > 0$ спектр оператора $B(t)$ в лакуне (α, β) конечен, и справедлива оценка*

$$N(\alpha, A, W, t) \leqslant C|\varphi|_q^q t^q.$$

Если левый край лакуны регулярен, то

$$(\alpha - E_s(\cdot))^{-1} \in L_p(\mathbb{T}^d), \quad s = 1, ..., l-1, \quad \forall p < d/2.$$

Таким образом, из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *Пусть* $d \geqslant 3$, *выполнены условия* (2.1), (2.5), (2.6), (2.8), *и левый край лакуны* (α, β) *регулярен. Пусть* φ *удовлетворяет условиям* 1 *и* (2.4a), $1 < q < d/2$. *Тогда при любом* $t > 0$ *спектр оператора* $B(t)$ *в лакуне* (α, β) *конечен, и верно неравенство*

$$N(\alpha, A, W, t) \leqslant C|\varphi|_q^q t^q.$$

3. Случай "согласованного" возмущения

Как и прежде, A – периодический оператор; наряду с (2.8) сохранены условия (2.1), (2.5), (2.6). Однако для возмущения не удается сохранить выражение (1.2), и оно заменяется оператором более специального вида. Ниже используется обозначение $< x >= (1 + |x|^2)^{1/2}$.

Пусть h и r – измеримые (по Лебегу) функции; $h(x)$ – вещественная симметричная $(d \times d)$-матрица; $r(x)$ – вещественная функция. Положим

$$T(x) := h(x) - < x >^{-\gamma} g(x); \quad S(x) := r(x) - < x >^{-\gamma} p(x), \quad \gamma > 0,$$

и подчиним h и r следующим условиям "согласованности":

$$\partial^{\varkappa} T(x) = o(< x >^{-\gamma}), \quad \partial^{\varkappa} S(x) = o(< x >^{-\gamma}), \quad |x| \to \infty, \quad |\varkappa| \leqslant \mathcal{N}_3, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{N}_3$ достаточно велико.

Вместо (2.3) определим теперь оператор W_0 равенством

$$W_0 u := (-\operatorname{div} h(x) \operatorname{grad} + r(x))^m u, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Оператор W_0 симметричен; его замыкание обозначим через W. Как в п. 2.1, через соответствующую квадратичную форму определяется семейство возмущенных операторов $B(t) = A + tW^*W$, $t > 0$. Далее предположим, что спектр оператора A имеет внутреннюю лакуну (α, β), удовлетворяющую условиям (2.9) и (2.10). Положим

$$\Delta_q(\lambda, A, W) := \limsup_{t\to+\infty} t^{-q} N(\lambda, A, W, t), \quad \lambda \in [\alpha, \beta);$$
$$\delta_q(\lambda, A, W) := \liminf_{t\to+\infty} t^{-q} N(\lambda, A, W, t), \quad \lambda \in [\alpha, \beta), \quad q := d/(2m\gamma).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.1), (2.5), (2.6), (2.8) *и* (3.1). *Тогда спектр оператора* $B(t)$ *в лакуне* (α, β) *дискретен и не накапливается к правому краю при любом* $t > 0$. *Если при этом* $q = d/(2m\gamma) > 1$, *то справедлива асимптотика*

$$\Delta_q(\lambda, A, W) = \delta_q(\lambda, A, W) =$$
$$= (2\pi)^{-d} d^{-1} \omega_{d-1} \sum_{j=1}^{l-1} \int_{\mathbb{T}^d} E_j^{d/\gamma}(k)(\lambda - E_j(k))^{-q} dk, \quad \lambda \in (\alpha, \beta), \tag{3.2}$$

где ω_{d-1} – *площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^d$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, $q > 1$ *и верно включение*

$$(\alpha - E_j(\cdot))^{-1} \in L_q(\mathbb{T}^d), \quad j = 1, ..., l-1.$$

Тогда асимптотика (3.2) *имеет место и в точке* $\lambda = \alpha$.

Следствие 3.3. *Пусть* $d \geqslant 3$, *выполнены условия теоремы* 3.1, *левый край лакуны* (α, β) *регулярен, и* $q \in (1, d/2)$. *Тогда асимптотика* (3.2) *справедлива и для точки* $\lambda = \alpha$.

Литература

1. В. А. Слоущ, *Дискретный спектр в лакунах спектра самосопряженного оператора при неограниченных возмущениях.* Зап. науч. семин. ПОМИ, **247** (1997), 237–241.
2. В. А. Слоущ, *Дискретный спектр, возникающий в спектральных лакунах при сильных знакоопределенных возмущениях.* Труды Санкт-Петербургского математического общества, **6** (1998), 213–241.
3. В. А. Слоущ, *Асимптотика дискретного спектра по большой константе связи при сильных неотрицательных возмущениях.* Настоящий том.
4. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations.* Adv. Partial Differential Equations, 2, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp.334–352.

5. M. Sh. Birman, *Discrete spectrum of the periodic Schrödinger operator for non-negative perturbations.* Mathematical results in quantum mechanics (Blossin, 1993), 3–7 Operator theory Advances and Applications, Vol. 70 Birkhauser, Basel, 1994.

Slousch V. A. The discrete spectrum of differential operators in the spectral gaps in the case of nonnegative perturbations of higher order.

Let A be a selfadjoint, elliptic second order differential operator, let (α, β) be the inner gap in the spectrum of A; let $B(t) = A + tW^*W$, where W is a differential operator of higher order. Conditions are obtained that guarantee that the spectrum of the operator $B(t)$ in the gap (α, β) be discrete, or do not accumulate to the right edge of the spectral gap, or be finite. The quantity $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\lambda \in (\alpha, \beta)$, $\tau > 0$ (the number of eigenvalues of the operator $B(t)$ having passed the point $\lambda \in (\alpha, \beta)$ as t increases from 0 to τ) is considered. Estimates for $N(\lambda, A, W, \tau)$ are obtained. For the perturbation W^*W of special from, the asymptotics of $N(\lambda, A, W, \tau)$, $\tau \to +\infty$, is given.

Санкт-Петербургский
государственный университет
vova@VS3648.spb.edu

Поступило 30 июля 2000 г.