Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

М. М. Фаддеев, Р. Г. Штеренберг

О ПОДОБИИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ САМОСОПРЯЖЕННЫМ

Говорят, что оператор L в некотором гильбертовом пространстве подобен оператору A, если существует ограниченный, ограниченно обратимый оператор X такой, что $L = X^{-1}AX$. В этой статье изучается вопрос о подобии некоторых дифференциальных операторов самосопряженным операторам. В работе [17] было показано, что операторы вида $f \mapsto -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ в пространстве функций, квадратично-суммируемых на вещественной прямой $\mathbb{R}$ с весом $| x |^\alpha$, $\alpha > -1$, подобны самосопряженным. Доказательство было основано на методах теории гильбертовых пространств с индефинитной метрикой, см., например, [5].

Мы рассматриваем здесь операторы, близкие к указанным операторам. В этой статье будут получены результаты о подобии самосопряженным операторам операторов L вида

$$(Lf)(x) = -\operatorname{sign} x \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + p(x)f(x). \tag{1}$$

В ближайшем будущем предполагается также опубликовать доказательство того, что операторы вида $(Lf)(x) = -\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^\alpha p(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ в пространстве с весом $|x|^\alpha$, $\alpha > -1$, подобны самосопряженным, если функция p достаточно гладкая, строго положительная, и функция $p - 1$ убывает достаточно быстро.

Интерес к операторам указанного вида обусловлен тем, что известные достаточные условия подобия в терминах характеристической функции (см. [14]; для диссипативных операторов обратимость характеристической функции является необходимым и достаточным условием для подобия [15]) не выполнены для этих операторов. Наше доказательство подобия будет опираться на следующий критерий подобия [9, 4].

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-15-96103, 97-01-01149.

Оператор L подобен некоторому самосопряженному оператору тогда и только тогда, когда его спектр лежит на вещественной оси, и имеют место соотношения:

$$\sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| (L-z)^{-1} u \|^2 \, d\xi \leqslant C \| u \|^2, \ z = \xi + i\varepsilon, \tag{2}$$

$$\sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \| (L^*-z)^{-1} u \|^2 \, d\xi \leqslant C \| u \|^2, \ z = \xi + i\varepsilon. \tag{3}$$

Операторы вида (1) при естественных ограничениях на потенциал p близки к самосопряженным. Сужения этих операторов на подпространство функций f таких, что $f(0) = f'(0) = 0$, являются симметрическими операторами. Таким образом, все эффекты, связанные с несамосопряженностью оператора L вида (1), возникают лишь в точке $x = 0$. Оценки (2), (3) для оператора L будут получаться с использованием аналогичных оценок для вспомогательных самосопряженных операторов, отличающихся от L лишь отсутствием множителя $\operatorname{sign} x$.

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть p – вещественный ограниченный потенциал с конечным вторым моментом:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2) \mid p(x) \mid dx < \infty, \tag{4}$$

L – оператор, задаваемый формулой (1), областью определения которого является пространство Соболева $W_2^2(\mathbb{R})$. Тогда для подобия оператора L самосопряженному оператору необходимо и достаточно, чтобы оператор L не имел невещественных собственных значений.

Авторы выражают глубокую благодарность С. Н. Набоко за большое внимание к работе и В. В. Капустину за полезные замечания и помощь в подготовке настоящей статьи.

1. Предварительные сведения. Здесь будут введены необходимые обозначения и приведены известные факты из теории оператора Шредингера с быстро убывающим потенциалом, большую часть которых можно найти в книге Аграновича и Марченко [1], а также в работах Блащака [2, 3].

Пусть L – оператор, задаваемый формулой (1), причем про вещественный потенциал p здесь будем предполагать, что конечен лишь его первый момент:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|p(x)|dx<\infty. \tag{5}$$

Для комплексного числа λ, $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, ϱ и $\tilde\varrho$ будут обозначать квадратные корни из λ, определяемые условиями $\operatorname{Im}\varrho>0$, $\operatorname{Re}\tilde\varrho>0$. Мы будем работать с функциями от переменной ϱ, $\operatorname{Im}\varrho>0$; в них $\tilde\varrho$ будет соответственно обозначать ϱ, если $\operatorname{Re}\varrho>0$, и $-\varrho$, если $\operatorname{Re}\varrho<0$.

Штрих всегда будет использоваться для обозначения производной по переменной x.

Известно [1, 7], что уравнение $-y''+py=\lambda y$ при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ имеет на правой полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $\psi=\psi(x,\varrho)$, представимое формулой

$$\psi(x,\varrho)=e^{i\varrho x}+\int_x^\infty K(x,t)e^{i\varrho t}dt. \tag{6}$$

Ядро K имеет непрерывные производные по x и t и удовлетворяет неравенствам

$$|\,K(x,t)\,|\leqslant\frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\Big(\frac{x+t}{2}\Big), \tag{7}$$

$$|\,K'_x(x,t)\,|,\ \left|\frac{dK}{dt}(x,t)\right|\leqslant\frac{1}{4}\left|p\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\right|+\frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\Big(\frac{x+t}{2}\Big)\sigma(x), \tag{8}$$

$$\sigma(x)=\int_x^\infty|\,p(\xi)\,|\,d\xi,\quad \sigma_1=\int_x^\infty\xi\,|\,p(\xi)\,|\,d\xi,\quad 0\leqslant x\leqslant t<\infty. \tag{9}$$

Аналогично, на левой полуоси $\mathbb{R}_-$ имеем

$$\varphi(x,\varrho)=e^{\tilde\varrho x}+\int_{-\infty}^x T(x,t)e^{\tilde\varrho t}dt,\quad \varphi''+p\varphi=\lambda\varphi; \tag{10}$$

$$\varphi_*(x,\varrho) = e^{-i\varrho x} + \int\limits_{-\infty}^{x} K(x,t)e^{-i\varrho t}dt, \quad -\varphi'' + p\varphi = \lambda\varphi. \tag{11}$$

Для ядер K и T на левой полуоси имеют место оценки, подобные (7) и (8).

Из (6)–(9) непосредственно вытекает, что функция ψ является аналитической по ϱ в области $\{\varrho : \operatorname{Im}\varrho > 0\}$, непрерывной вплоть до границы при каждом $x \geqslant 0$, и удовлетворяет асимптотикам при $|\,\varrho\,| \to \infty$:

$$\begin{aligned} \psi(x,\varrho) &= e^{i\varrho x}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big], \\ \psi'(x,\varrho) &= i\varrho e^{i\varrho x}\Big[1 + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{12}$$

равномерно по $x \geqslant 0$, и

$$\psi(x,\varrho) = e^{i\varrho x}[1 + o(1)], \quad \frac{d}{dx}\psi(x,\varrho) = e^{i\varrho x}[i\varrho + o(1)], \ x \to \infty \tag{13}$$

равномерно при $\operatorname{Im}\varrho \geqslant 0$.

Аналогичные соотношения справедливы и для функций φ, φ_*:

$$\begin{aligned} \varphi(x,\tilde\varrho) &= e^{\tilde\varrho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde\varrho}\right)\right], \\ \varphi'(x,\tilde\varrho) &= \tilde\varrho e^{\tilde\varrho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\tilde\varrho}\right)\right] \quad \text{при} \quad |\tilde\varrho| \to \infty; \\ \varphi_*(x,\varrho) &= e^{-i\varrho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right], \\ \varphi_*'(x,\varrho) &= -i\varrho e^{-i\varrho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right] \quad \text{при} \quad |\varrho| \to \infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Введем следующие функции:

$$W(\varrho) = \varphi(0,\varrho)\psi'(0,\varrho) - \varphi'(0,\varrho)\psi(0,\varrho); \tag{15}$$

$$W_*(\varrho) = \varphi_*(0,\varrho)\psi'(0,\varrho) - \varphi_*'(0,\varrho)\psi(0,\varrho); \tag{16}$$

$$B(\varrho) = \frac{1}{W_*(\varrho)}(\varphi_*(0,\varrho)\varphi'(0,\varrho) - \varphi_*'(0,\varrho)\varphi(0,\varrho)). \tag{17}$$

Из оценок (12), (14) при $x = 0$ получаем следующие утверждения (см., например, [2, 3]).

Функция $W(\varrho)$ аналитична в областях $\{\varrho : \operatorname{Im}\varrho > 0, \operatorname{Re}\varrho > 0\}$ и $\{\varrho : \operatorname{Im}\varrho > 0, \operatorname{Re}\varrho < 0\}$ и непрерывна вплоть до границ. Кроме того,

$$W(\varrho) = (i\varrho - \tilde{\varrho})\Big[1 + O\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\Big], \; |\,\varrho\,| \to \infty. \tag{18}$$

Функция $W_*(\varrho)$ аналитична в области $\{\varrho : \operatorname{Im}\varrho > 0\}$ и непрерывна вплоть до границы. Кроме того,

$$W_*(\varrho) = 2i\varrho\left[1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right], \quad |\varrho| \to \infty. \tag{19}$$

Число λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $W(\varrho) = 0$. Собственная функция при этом совпадает с $\frac{\varphi(x,\varrho)}{\varphi(0,\varrho)}$ на полуоси $\mathbb{R}_-$ и с $\frac{\psi(x,\varrho)}{\psi(0,\varrho)}$ на $\mathbb{R}_+$ (оба числа $\varphi(0,\varrho)$, $\psi(0,\varrho)$ отличны от нуля).

2. Интегральная оценка резольвенты. Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $W(\varrho) \neq 0$, то для произвольной функции $u \in L^2(\mathbb{R})$ резольвента оператора L имеет следующий вид:

$$\big[(L-\lambda)^{-1}u\big](x) =$$
$$-\frac{1}{W(\varrho)}\Big(\psi(x,\varrho)\int\limits_{-\infty}^{x} \operatorname{sign} y \cdot \varphi(y,\varrho)u(y)dy + \varphi(x,\varrho)\int\limits_{x}^{\infty} \operatorname{sign} y \cdot \psi(y,\varrho)u(y)dy\Big).$$

Резольвента вспомогательного самосопряженного оператора L_*,

$$L_* f = -f'' + pf,$$

записывается следующим образом:

$$\big[(L_*-\lambda)^{-1}u\big](x) =$$
$$= -\frac{1}{W_*(\varrho)}\left(\psi(x,\varrho)\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_*(y,\varrho)u(y)dy + \varphi_*(x,\varrho)\int\limits_{x}^{\infty} \psi(y,\varrho)u(y)dy\right).$$

Лемма 2. *Пусть в области* $\{\varrho : \operatorname{Im}\varrho > 0, \operatorname{Re}\varrho > 0\}$ *ограничены выражения* $\left|\frac{\varrho}{W(\varrho)}\right|$, $\min\left(\left|\frac{\varrho B(\varrho)}{W(\varrho)}\right|, \left|\frac{B(\varrho)W_*(\varrho)}{W(\varrho)}\right|\right)$. *Тогда для функции* $u \in L^2(\mathbb{R})$ *такой, что* $u(x) = 0$ *при* $x < 0$, *имеет место оценка* (2).

Доказательство. Для функции u такой, что $u(x)=0$ при $x<0$, резольвенты операторов L и L_* имеют вид

$$\big[(L-\lambda)^{-1}u\big](x) = -\frac{1}{W(\varrho)}\Big(\varphi(x,\varrho)\int\limits_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy\Big), \quad x\leqslant 0,$$

$$\big[(L-\lambda)^{-1}u\big](x)=\big[(L_*-\lambda)^{-1}u\big](x)-\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\psi(x,\varrho)\int\limits_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy,\ \ x\geqslant 0. \tag{20}$$

Резольвента самосопряженного оператора L_* обладает свойством (2), а потому для того, чтобы (2) было выполнено и для L, достаточно следующих оценок, где $\lambda=\varrho^2=\xi+i\varepsilon$:

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\right|^2\left|\int\limits_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy\right|^2\int\limits_0^\infty|\psi(x,\varrho)|^2dx\,d\xi\leqslant \mathrm{const}\cdot\|u\|^2, \tag{21}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|W(\varrho)|^2}\left|\int\limits_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy\right|^2\int\limits_{-\infty}^0|\varphi(x,\varrho)|^2dx\,d\xi\leqslant \mathrm{const}\cdot\|u\|^2. \tag{22}$$

Операторы $\frac{d}{dx^2}$, $-\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения W_2^2 и оператор $f\mapsto -\frac{d}{dx}\Big(\mathrm{sign}\,x\frac{df}{dx}\Big)$ с областью определения $\{f:\mathrm{sign}\,x\cdot f'\in W_2^1\}$ самосопряженные, и для них явно выписываются формулы резольвент. Так, для последнего из них образ функции u такой, что $u(x)=0$ при $x<0$, при действии резольвенты, есть функция $\frac{1}{i\varrho+\tilde\varrho}\big(e^{\tilde\varrho x}\int_0^\infty e^{i\varrho y}u(y)dy\big)$. Для этих вспомогательных операторов оценки (2), (3) переписываются следующим образом:

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{-2i\varrho}\int\limits_0^\infty e^{i\varrho y}u(y)dy\right|^2\int\limits_{-\infty}^0 \mid e^{-i\varrho x}\mid^2 dxd\xi\leqslant \mathrm{const}\parallel u\parallel^2, \tag{23}$$

$$\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{i\varrho+\tilde\varrho}\int\limits_0^\infty e^{i\varrho y}u(y)dy\right|^2\int\limits_{-\infty}^0 \mid e^{\tilde\varrho x}\mid^2 dxd\xi\leqslant \mathrm{const}\parallel u\parallel^2\,. \tag{24}$$

Теперь оценим выражения, входящие в (21), (22). В силу (6) имеем:

$$\int_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy = \int_0^\infty e^{i\varrho y}u(y) + \int_0^\infty e^{i\varrho y}v(y)dy,$$

где $v(y) = \int_0^y K(x,y)u(x)dx$, откуда

$$\left|\int_0^\infty \psi(y,\varrho)u(y)dy\right|^2 \leqslant 2\left(\left|\int_0^\infty e^{i\varrho y}u(y)dy\right|^2 + \left|\int_0^\infty e^{i\varrho y}v(y)dy\right|^2\right). \quad (25)$$

Из формул (7)–(9) следует, что интегральный оператор K с ядром $K(x,y)$ ограничен, а поэтому из соотношения $Ku=v$ следует, что

$$\|v\| \leqslant \|K\|\cdot\|u\|. \quad (26)$$

Так как $\tilde{\varrho}=\varrho$, из (12), (14) получаем

$$\int_0^\infty |\ \psi(x,\varrho)\ |^2\,dx \leqslant \mathrm{const}\int_0^\infty |\ e^{i\varrho x}\ |^2\,dx = \mathrm{const}\int_{-\infty}^0 |\ e^{-i\varrho x}\ |^2\,dx, \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^0 |\ \varphi(x,\varrho)\ |^2\,dx \leqslant \mathrm{const}\int_{-\infty}^0 |\ e^{\varrho x}\ |^2\,dx. \quad (28)$$

равномерно по λ. По предложению леммы $\frac{1}{|W(\varrho)|} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\varrho|}$; используем это неравенство и оценки (25), (28) для доказательства соотношения (22). Тогда левая часть формулы (22) перепишется как сумма левой части (24) и аналогичного выражения для v. Из (24) и такой же оценки для функции v получим, что левая часть (22) не превосходит $\mathrm{const}\cdot(\|u\|^2+\|v\|^2)$, что в силу (26) дает требуемую оценку $\mathrm{const}\cdot\|u\|^2$.

Нам осталось проверить неравенство (21). Для этого разобьем интеграл по ξ на сумму двух интегралов: первый – по множеству $\mathcal{E}$, на котором выполнена оценка $\left|\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\varrho|}$, и второй по его дополнению. По предположению леммы, при подходящем выборе констант можно добиться того, чтобы на дополнении множества $\mathcal{E}$ имело место неравенство $\left|\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|W_*(\varrho)|}$. Для оценки интеграла в (21) по множеству $\mathcal{E}$ можно рассуждать так же, как при доказательстве (22): оценить выражения, входящие в (21), по формулам (25)–(27), и воспользоваться уже известным соотношением (23). Из определений и асимптотик (12)–(19) функций B и W следует, что при $|\varrho| \to \infty$ имеется оценка $\left|\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\varrho|}$, а поэтому можно считать, что дополнение множества $\mathcal{E}$ – ограниченное множество, т.е. содержится в некотором множестве вида $\{\varrho : |\varrho| \leqslant A\}$. Положительные функции от ϱ, $\int_0^\infty |\psi(x,\varrho)|^2 dx$ и $\int_{-\infty}^0 |\varphi_*(x,\varrho)|^2 dx$, ограничены сверху и снизу положительными константами на компактном множестве $\{\varrho : |\varrho| \leqslant A\}$, а потому на дополнении множества $\mathcal{E}$ можно написать

$$\int_0^\infty |\psi(x,\varrho)|^2\, dx \leqslant \mathrm{const} \int_{-\infty}^0 |\varphi_*(x,\varrho)|^2\, dx.$$

Подставляя эту оценку и оценку $\left|\frac{B(\varrho)}{W(\varrho)}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|W_*(\varrho)|}$ в оцениваемое выражение в (21), получаем подинтегральное выражение, совпадающее с $\|((L_*-\lambda)^{-1}u)(x)\|^2$ согласно формуле (20). Теперь оценка (21) на дополнении множества $\mathcal{E}$ следует из формулы (2), примененной к самосопряженному оператору L_*.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Корни уравнения $W(\varrho) = 0$ определяют в областях $\{\varrho :\ \mathrm{Im}\,\varrho > 0, \mathrm{Re}\,\varrho > 0\}$, $\{\varrho :\ \mathrm{Im}\,\varrho > 0, \mathrm{Re}\,\varrho < 0\}$, собственные значения оператора L по формуле $\lambda = \varrho^2$; корни же, лежащие на границе означенных областей, определяют, согласно Шварцу [18], спектральные особенности рассматриваемых операторов. Отметим, что особая роль, принадлежащая спектральным особенностям, была впервые обнаружена в работе Наймарка [10]. Детальному исследованию операторов со спектральными особенностями посвящены работы Лянце [8] и Павлова [11–13].

Предположим, что второй момент потенциала p конечен (4). Из формул (6)–(9) следует, что все функции φ, ψ, φ_*, W, $W_*, \ldots$ имеют непрерывные производные вплоть до границы их области определения.

В окрестности точки $\varrho = 0$ величина $\frac{\varrho}{W_*(\varrho)}$ ограничена. Доказательство получается из известных оценок для самосопряженных операторов, см. [16]. Аналогичными рассуждениями доказывается, что при конечном первом моменте (5) на границе имеется

оценка
$$|W(\varrho)| \geqslant \mathrm{const}\,|\varrho|. \tag{29}$$

Приведем набросок доказательства для $\varrho > 0$.

Имеет место тождество
$$\det\begin{pmatrix} \psi(0,\varrho) & \psi(0,-\varrho) \\ \psi'(0,\varrho) & \psi'(0,-\varrho) \end{pmatrix} = -2i\varrho. \tag{30}$$

Воспользуемся следующим геометрическим фактом:
$$\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot\max\left\{\left|\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}\right|, \left|\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\right|\right\}, \tag{31}$$
если "нормы" $|a_1|^2+|a_2|^2$, $|b_1|^2+|b_2|^2$, $|c_1|^2+|c_2|^2$ не меньше некоторой исходной константы. Применяя этот факт, получаем:
$$2|\varrho| = \left|\det\begin{pmatrix} \psi(0,\varrho) & \psi(0,-\varrho) \\ \psi'(0,\varrho) & \psi'(0,-\varrho) \end{pmatrix}\right| \leqslant$$
$$\mathrm{const}\cdot\max\left\{\left|\det\begin{pmatrix} \psi(0,\varrho) & \varphi(0,\varrho) \\ \psi'(0,\varrho) & \varphi'(0,\varrho) \end{pmatrix}\right|, \left|\det\begin{pmatrix} \psi(0,-\varrho) & \varphi(0,\varrho) \\ \psi'(0,-\varrho) & \varphi'(0,\varrho) \end{pmatrix}\right|\right\}.$$

Используя тождество
$$\det\begin{pmatrix} \psi(0,\varrho) & \varphi(0,\varrho) \\ \psi'(0,\varrho) & \varphi'(0,\varrho) \end{pmatrix} = \overline{\det\begin{pmatrix} \psi(0,-\varrho) & \varphi(0,\varrho) \\ \psi'(0,-\varrho) & \varphi'(0,\varrho) \end{pmatrix}}$$
и вспоминая определение функции W (15), получаем нужное неравенство (29).

Однако неравенство (29) доказано лишь на границе; для распространения его на область $\{\varrho : \mathrm{Re}\,\varrho > 0, \mathrm{Im}\,\varrho > 0\}$ потребуем условие конечности второго момента (4). Из (29) очевидно следует, что на границе функция W может обращаться в ноль лишь при $\varrho = 0$; если $W(0) = 0$, то $W'(0) \neq 0$.

Если у оператора L нет невещественных собственных значений, то $W(\varrho) \neq 0$ при $\mathrm{Im}\,\varrho > 0$, $\mathrm{Re}\,\varrho > 0$.

Покажем, что для L выполнены условия леммы 2. Функция $\frac{B(\varrho)W_\star(\varrho)}{W(\varrho)}$ ограничена вне произвольной окрестности точки $\varrho = 0$. Это следует из асимптотик при $|\varrho| \to \infty$ (см. (12)–(19)) и ограниченности функции $\frac{\varrho}{W(\varrho)}$. Покажем, что в окрестности нуля ограничена функция $\frac{\varrho B(\varrho)}{W(\varrho)}$. Действительно, из (31) следует, что

$$\left|\det\begin{pmatrix}\varphi(0,\varrho) & \varphi_*(0,\varrho)\\ \varphi'(0,\varrho) & \varphi_*'(0,\varrho)\end{pmatrix}\right| \leqslant$$
$$\mathrm{const}\cdot\max\left\{\left|\det\begin{pmatrix}\varphi(0,\varrho) & \psi(0,\varrho)\\ \varphi'(0,\varrho) & \psi'(0,\varrho)\end{pmatrix}\right|,\ \left|\det\begin{pmatrix}\varphi_*(0,\varrho) & \psi(0,\varrho)\\ \varphi_*'(0,\varrho) & \psi'(0,\varrho)\end{pmatrix}\right|\right\},$$

то есть $|B(\varrho)W_*(\varrho)| \leqslant \mathrm{const}\cdot\max(|W(\varrho)|,|W_*(\varrho)|)$. Отсюда получаем:

$$\left|\frac{\varrho B(\varrho)}{W(\varrho)}\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot|\varrho|\cdot\frac{\max(|W(\varrho)|,|W_*(\varrho)|)}{|W(\varrho)|\cdot|W_*(\varrho)|} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot\max\left(\left|\frac{\varrho}{W(\varrho)}\right|,\left|\frac{\varrho}{W_*(\varrho)}\right|\right) \leqslant \mathrm{const},$$

поскольку в окрестности нуля функции $\frac{\varrho}{W(\varrho)}$ и $\frac{\varrho}{W_*(\varrho)}$ ограничены.

Мы доказали выполнение соотношения (2) в области $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ для функций u с носителем на правой полуоси. Все остальные случаи (соотношение (3); область $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda < 0\}$; функции u с носителем на левой полуоси) доказываются аналогично, что доказывает теорему.

Замечание. Результат теоремы 1 обобщается (с тем же доказательством) на случай комплексного потенциала p с конечным вторым моментом, если дополнительно потребовать, чтобы функция W не обращалась в ноль на границе области аналитичности, и вспомогательные операторы $f \mapsto \pm f'' + pf$ были подобны самосопряженным. Некоторые достаточные условия, при которых это подобие имеет место, можно найти в статьях [2, 3, 6].

4. О количестве собственных значений. В настоящем пункте мы изучим вопрос о собственных значениях оператора L и свяжем их с собственными значениями задач Дирихле и Неймана для операторов $L_\pm^D$, $L_\pm^N$:

$$L_\pm^D f = \mp\frac{d^2 f}{dx^2} + pf,\ \pm x \geqslant 0,\ \ D(L_\pm^D) = \{u : u \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm),\ u(0) = 0\},$$

$$L_\pm^N f = \mp\frac{d^2 f}{dx^2} + pf,\ \pm x \geqslant 0,\ \ D(L_\pm^N) = \{u : u \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm),\ u'(0) = 0\}.$$

Известно [10], что собственные значения данных операторов просты и расположены на полуосях, дополнительных к тем, на которых эти операторы определены; кроме того, если конечен второй момент потенциала p, то собственных значений конечное число, и $\lambda = 0$ собственным значением не является. Обозначим через $N(L^D_\pm)$, $N(L^N_\pm)$ число собственных значений соответствующих операторов, и $N_0 \equiv N(L^D_+) + N(L^N_+) + N(L^D_-) + N(L^N_-)$. Пусть также $\max \mid \lambda^{D,N}_\pm \mid$ – наибольшие по модулю собственные значения операторов $L^{D,N}_\pm$.

Имеют место неравенства $N(L^D_\pm) \leqslant N(L^N_\pm) \leqslant N(L^D_\pm) + 1$, и при подходе по вещественной оси к нулю из бесконечности собственные значения операторов задач Дирихле и Неймана чередуются и не совпадают; при этом $\max \mid \lambda^N_\pm \mid > \max \mid \lambda^D_\pm \mid$. Это следует из того, что операторы, соответствующие задачам Дирихле и Неймана, являются расширениями одного и того же симметрического оператора с индексами дефекта (1,1). Подробнее о теории расширений симметрических операторов см. [19].

Таким образом, у нас может быть реализовано четыре случая:

1) случай DD: операторы L^D_+, L^N_+ и L^D_-, L^N_- имеют (попарно) одинаковое число собственных значений.

2) случай NN: операторы $L^N_\pm$ имеют на одно собственное значение больше, чем операторы $L^D_\pm$.

3) случай ND: оператор L^N_+ имеет на одно собственное значение больше, чем оператор L^D_+; число собственных значений операторов L^N_- и L^D_- одинаково.

4) случай DN противоположен по смыслу случаю ND:

$$N(L^N_+) = N(L^D_+), \quad N(L^N_-) = N(L^D_-) + 1.$$

Теорема 3. *Пусть p – вещественный потенциал с конечным вторым моментом (4).*

1) *Если* $\psi'(0,0)\varphi(0,0) \neq 0$ *и* $\frac{\psi(0,0)\varphi'(0,0)}{\psi'(0,0)\varphi(0,0)} < 1$, *то*

$$N(L_{DD}) = N_0;\ N(L_{NN}) = N_0;\ N(L_{DN}) = N_0 - 1;\ N(L_{ND}) = N_0 + 1$$

2) *Если* $\psi(0,0)\varphi'(0,0) \neq 0$ *и* $\frac{\psi'(0,0)\varphi(0,0)}{\psi(0,0)\varphi'(0,0)} < 1$, *то*

$$N(L_{DD}) = N_0;\ N(L_{NN}) = N_0;\ N(L_{DN}) = N_0 + 1;\ N(L_{ND}) = N_0 - 1$$

3) *Если* $\psi(0,0)\varphi'(0,0) = \psi'(0,0)\varphi(0,0) \neq 0$, *то*

$$N(L_{DD}) = N_0;\ N(L_{NN}) = N_0;\ N(L_{DN}) = N_0 - 1;\ N(L_{ND}) = N_0 - 1$$

4) *Если* $\psi(0,0)\varphi'(0,0) = \psi'(0,0)\varphi(0,0) = 0$, *то*

$$N(L_{DD}) = N_0; \; N(L_{NN}) = N_0,$$

операторы же L_{DN} *и* L_{ND} *в этом случае не существуют.*

Доказательство. Докажем утверждение 1) настоящей теоремы. Для этого сосчитаем индекс функции $f \equiv \frac{W}{\psi'\varphi}$ на контуре, состоящем из дуги окружности большого радиуса в первой четверти комплексной плоскости ϱ и отрезков вещественной и мнимой осей, соединяющих дугу с точкой ноль. При этом нули функции $\psi'(0,\varrho)\varphi(0,\varrho)$ следует обходить малыми полуокружностями внутрь первой четверти. Радиус же выбирается настолько большим, что $\mid f-(1+i) \mid < 1$ на дуге (см. (12), (18)).

Заметим, что функции $\varphi(0,\varrho)$ и $\psi(0,\varrho)$ вещественны на $\mathbb{R}_+$ и $i\mathbb{R}_+$ соответственно.

Кроме того, из (30) следует, что $\psi(0,\varrho)\overline{\psi'}(0,\varrho) - \psi'(0,\varrho)\overline{\psi}(0,\varrho) = -2i\varrho$ для $\varrho \geqslant 0$, и, следовательно, $\psi'(0,\varrho) \neq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Аналогично, $\varphi(0,\varrho) \neq 0$ на $i\mathbb{R}_+$. Далее,

$$\operatorname{Im} f(\varrho) = \frac{\varrho\varphi'(0,\varrho)}{\varphi(0,\varrho) \mid \psi'(0,\varrho) \mid^2}, \quad \varrho \in \mathbb{R}_+$$

$$\operatorname{Im} f(\varrho) = \frac{i\varrho\psi(0,\varrho)}{\psi'(0,\varrho) \mid \varphi(0,\varrho) \mid^2}, \quad \varrho \in i\mathbb{R}_+$$

Теперь заметим, что при прохождении нулей функции $\psi\psi'\varphi\varphi'$ мнимая часть функции f меняет знак, при этом $f(\varrho)$ каждый раз сохраняет направление обхода вокруг нуля. В точке $\varrho = 0$ функция f может менять или не менять знак своей мнимой части (по условию теоремы $f(0) \neq 0$), что определяется непрерывностью функции f. Дальнейшие очевидные рассуждения показывают справедливость первого утверждения теоремы с заменой в равенствах суммарной алгебраической кратности собственных значений на суммарную кратность корней функции W. Однако, последние совпадают, что легко следует (см. [20]) из конечности ранга проектора Рисса и единственности собственного вектора для каждого собственного значения.

Доказательство утверждения 2) аналогично.

Чтобы доказать утверждение 3), воспользуемся оценкой $\mathrm{const}\,|\varrho| \leqslant |W(\varrho) - W(0)| \leqslant \mathrm{const} \mid \varrho \mid$ в окрестности нуля, которая следует из непрерывности производной функции W. Проведем рассуждения, использованные при доказательстве утверждения 1), для функции $\frac{W(\varrho)}{\varrho\psi'(0,\varrho)\varphi(0,\varrho)}$. При этом на оси $i\mathbb{R}_+$ нужно будет следить за знаком не мнимой, как раньше, а вещественной части изучаемой функции.

Перейдем, наконец, к утверждению 4).

Если $\psi'(0,0)\varphi(0,0) = \psi(0,0)\varphi'(0,0) = 0$, то из единственности решения задачи Коши следует, что либо $\psi(0,0)\varphi(0,0) \neq 0$, либо $\psi'(0,0)\varphi'(0,0) \neq 0$. Пусть выполнена первая альтернатива. Тогда, как уже отмечалось, $|\operatorname{Im} f(\varrho)| = \left|\frac{\psi(0,\varrho)\varrho}{\psi'(0,\varrho)\varphi^2(0,\varrho)}\right|$, $\varrho \in i\mathbb{R}_+$. Функция $\psi'(0,\varrho)$ непреывно дифференцируема по ϱ; поэтому $\mathrm{const}\,|\varrho| \leqslant |\psi'(0,\varrho) - \psi'(0,0)| \leqslant \mathrm{const}\,|\varrho|$. Поскольку $\psi'(0,0) = 0$, имеем $0 < |\operatorname{Im} f(0)| < \infty$, и требуемое утверждение может быть получено так же, как было доказано утверждение 1).

Если выполнена вторая альтернатива, то следует произвести аналогичные построения для $\varrho \in \mathbb{R}_+$. Последнее утверждение пункта 4) вытекает из непрерывности функции f.

Следствие 4. *Если p – вещественный ограниченный потенциал с конечным вторым моментом, то для подобия оператора L самосопряженному достаточно, чтобы операторы $L_\pm^D$ и $L_\pm^N$ не имели собственных значений. В частности, подобен самосопряженному оператор L, $(Lf)(x) = \operatorname{sign} x(-\frac{d^2f(x)}{dx^2} + p(x)f(x))$, где p – неотрицательный ограниченный потенциал с конечным вторым моментом.*

Литература

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, *Обратная задача теории рассеяния.* Харьков, 1960.
2. В. В. Блащак, *О разложении по главным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на всей оси.* Докл. АН УРСР, вып. 4 (1965), 416–419.
3. В. В. Блащак, *О дифференциальном операторе второго порядка на всей оси со спектральными особенностями.* Докл. АН УРСР, вып. 1 (1966), 38–41.
4. Van Casteren J., *Operators similar to unitary or selfadjoint ones.* Pacific J. Math., **104** (1983), 241–255.
5. H. Langer, *Spectral function of definitizable operators in Krein spaces.* Functional Analysis, Proceedings, Dubrovnik, 1981. Lecture Notes in Math., **948** (1982), Berlin: Springer-Verlag, 1–46.
6. Б. Я. Левин, *Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка.* Докл. АН СССР, **106**, вып. 2 (1956), 187–190.

7. Б. М. Левитан, *Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения.* М.: Физматгиз, 1962.
8. В. Э. Лянце, *О несамосопряженном дифференциальном операторе второго порядка на полуоси.* Докл. АН СССР, **154**, вып. 5 (1964), 1030–1033.
9. С. Н. Набоко, *Об условиях подобия унитарным и самосопряженным операторам.* Функциональный анализ и его приложения, **18**, вып. 1 (1984), 16–27.
10. М. А. Наймарк, *Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси.* Тр. Моск. матем. о-ва, вып. 3 (1954), 181–270.
11. Б. С. Павлов, *О несамосопряженном операторе* $-y'' + p(x)y$ *на полуоси.* Докл. АН СССР, **141**, вып. 4 (1961), 807–810.
12. Б. С. Павлов, *К спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов.* Докл. АН СССР, **146**, вып. 2 (1962), 1267–1270.
13. Б. С. Павлов, *О несамосопряженном операторе Шредингера.* Спектральная теория и волновые процессы. Изд-во ЛГУ (1966), 102–132.
14. Л. А. Сахнович, *Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром.* Изв. АН СССР, сер. матем., **33**, вып. 1 (1969), 52–64.
15. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фойаш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* М., 1970.
16. Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния.* Успехи Мат. Наук, **14**, вып. 4 (1954), 51–119.
17. A. Fleige, B. Najman, *Nonsingularity of critical points of some differential and difference operators.* Operators Theories: Advances and Applications, **106** (1998), 147–155.
18. J. T. Schwartz, *Some nonselfadjoint operators.* Comm. for pure and appl. Math., **13** (1960), 609–639.
19. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд-во ЛГУ, 1980.
20. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* М., Наука (1965), 448 с.

Faddeev M. M. and Shterenberg R. G. On the similarity of some singular differential operators to selfadjoint ones.

The singular differential operator $Lf(x) = -\operatorname{sign} x \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + p(x)f(x)$ is studied. It is proved that if the second moment of p is finite and L has no nonreal eigenvalues, then L is similar to a selfadjoint operator. The proof is based upon an integral resolvent criterion for the similarity applied to a wide class of functions $p(x)$.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 2 июня 2000 г.