Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 270, 2000 г.

Н. А. Широков

ПРИМЕР БЫСТРОУБЫВАЮЩЕЙ (p,A)-ЛАКУНАРНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f \not\equiv 0$ – аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ функция. Достаточно понятно, что отсутствие ограничений на коэффициенты Тейлора a_n позволяет найти функции, убывающие на радиусе $(0,1)$ быстрей любой заранее определенной положительной мажоранты $M(x)$. Наличие же каких-то ограничений на a_n – например, редкость, понимаемая в некотором смысле слова, тех номеров n, при которых (возможно) $a_n \neq 0$, накладывает на скорость убывания $f(x)$, $0 < x < 1$ (говоря точнее, на вид положительной мажоранты $M(x)$) ограничения. Подобное обстоятельство при рассмотрении аналогичной задачи (именно, задачи о допустимой скорости убывания на полуоси рядов Дирихле с редкими показателями экспонент) впервые было отмечено Л. Шварцем [1]. Затем Хиршман и Дженкинс [2] существенно усилили его результат. В работах автора [3; 4, гл. 3] было введено понятие (p,A)-лакунарных функций (или (p,A)-лакунарных степенных рядов), хорошо приспособленное к описанию шкалы аналитических в $\mathbb{D}$ функций с редкими коэффициентами Тейлора. Классы Хиршмана–Дженкинса могут быть перенесены и на аналитические в $\mathbb{D}$ функции (их теорема в подобном контексте применялась Дж. М. Андерсоном [5]). При таком перенесении условие (p,A)-лакунарности оказывается, с одной стороны, частным случаем условий Хиршмана–Дженкинса, но, с другой стороны, включает определенные требования регулярности, отсутствующие у упоминаемых авторов. Соответственно, и допустимая мажоранта для (p,A)-лакунарных функций оказывалась в [3; 4, гл. 3] лучшей, чем получаемая применением теоремы Хиршмана–Дженкинса.

Постоянная, от которой, главным образом, зависит поведение полученной в [3; 4, гл. 3] мажоранты, имеет разный вид при $1 < p < 2$ и при $2 \leqslant p < \infty$. В работах [3; 4, гл. 3] была установлена ее точность при $2 \leqslant p < \infty$. Целью настоящей статьи является установление ее точности и при $1 < p < 2$.

1. Формулировка теоремы

Пусть $1 < p < \infty$, $A > 0$. Функцию $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f \not\equiv 0$, аналитическую в $\mathbb{D}$, будем называть (p, A)-лакунарной, если $a_n = 0$ для всех $n \notin \Lambda$, причем для множества $\Lambda = \{n_m\}_{m=0}^{\infty}$ выполняется условие $n_m \geqslant Am^p$ при $m = 0, 1, \ldots$. Приведем часть теоремы 10 из [4], гл. 3:

Теорема A. *Пусть f – (p, A)-лакунарная функция, $1 < p < \infty$. Существует постоянная $B(p, A) > 0$ такая, что для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\varlimsup_{x \to 1-0} |f(x)| \exp[(B(p, A) + \varepsilon)(1 - x)^{-\frac{1}{p-1}}] = +\infty \tag{1}$$

При этом можно положить при $2 \leqslant p < \infty$

$$B(p, A) = B_1(p, A) = (p - 1) \left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \frac{1}{A^{\frac{1}{p-1}}} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2}$$

а для $1 < p < 2$ можно положить

$$B(p, A) = B_2(p, A) = B_1(p, A) \frac{\left(\cos \pi \frac{2-p}{2p}\right)^{\frac{p}{p-1}}}{\left(\cos \pi \frac{2-p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{3}$$

Равенство (3) процитировано из [3] или [4, гл. 3]. Если учесть, что $\cos \pi \frac{2-p}{2p} = \sin \frac{\pi}{p}$, то равенство (3) приобретет вид

$$B_2(p, A) = (p - 1) \left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \frac{1}{A^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{\left(\cos \pi \frac{2-p}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}}. \tag{4}$$

Отметим, что применение к (p, A)-лакунарной функции f теоремы Хиршмана–Дженкинса дает при всяком $\varepsilon > 0$ соотношение (1), в котором постоянная $B(p, A)$, определенная, соответственно, равенствами (2) или (3), должна быть заменена на постоянную $B^*(p, A)$, где

$$B^*(p, A) = \pi^{\frac{p}{p-1}} 2^{\frac{1}{p-1}} \frac{1}{A^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{\left(\sin \frac{\pi}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}}}. \tag{5}$$

Можно убедиться в том, что для постоянных $B(p,A)$ из (2), (3) и $B^*(p,A)$ из (5) при всех p, $1<p<\infty$, и $A>0$ выполняется неравенство $B(p,A)<B^*(p,A)$.

Во второй части теоремы 10 из [4], гл. 3 была установлена точность постоянной $B(p,A)=B_1(p,A)$ при $2\leqslant p<\infty$. В несколько ослабленной форме это утверждение состоит в следующем.

Теорема B. *Для всяких p, $2\leqslant p<\infty$, и $A>0$ существует (p,A)-лакунарная функция $f_0=f_{0,p,A}$, для которой при всяком $\varepsilon>0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to 1-0}|f_0(x)|\exp[(B_1(p,A)-\varepsilon)(1-x)^{-\frac{1}{p-1}}]=0, \tag{6}$$

в котором постоянная $B_1(p,A)$ определена в (2).

Вопрос о точности постоянной $B_2(p,A)$ для случая $1<p<2$ оставался открытым. В настоящей статье мы устанавливаем точность и постоянной $B_2(p,A)$. Имеет место следующая

Теорема. *Для любых p, $1<p<2$, и $A>0$ существует (p,A)-лакунарная функция $f_1=f_{1,p,A}$, для которой справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to 1-0}|f_1(x)|\exp[B_2(p,A)(1-x)^{-\frac{1}{p-1}}-C(p,A)(1-x)^{-\frac{1}{p-1}+1}]=0,$$

в котором постоянная $B_2(p,A)$ определена в (3) или (4), а постоянная $C(p,A)>0$ зависит только от p и A.

Замечание. Из построения (p,A)-лакунарной функции $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ при $1<p<2$ будет видно, что $a_n=0$, если $n\notin\Lambda$, и $|a_n|=\exp[c'n^{\frac{1}{p}}(1+o(1))]$, если $n\in\Lambda$, с некоторой постоянной $c'=c'(p,A)>0$. Это обстоятельство отличается от случая $2\leqslant p<\infty$, поскольку для упоминаемой в теореме B функции f_0 ее коэффициенты Тейлора стремятся к нулю.

Далее, функция f_1, удовлетворяющая заключению теоремы, будет, естественно, удовлетворять при всяком $\varepsilon>0$ соотношению (6) с постоянной $B_2(p,A)$, поэтому f_1 не будет принадлежать классу Неванлинны (в то время как функция f_0 из теоремы B может быть выбрана непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$).

2. Важная элементарная лемма

В дальнейшем изложении числа p, $1 < p < 2$, и $A > 0$ будут фиксированы. Для краткости пусть $\rho = \frac{1}{p}$. Выберем любое θ_0, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, и пусть $\lambda_0 = (1-\rho)\theta_0$. Положим

$$x = \frac{\sin\lambda_0}{\sin(\lambda_0 + \pi\rho)}. \tag{6'}$$

Отметим, что $0 < \lambda_0 < \frac{\pi}{2}$, $\lambda_0 + \pi\rho > \frac{\pi}{2}$, а также, что

$$\pi - (\lambda_0 + \pi\rho) = \pi(1-\rho) - (1-\rho)\theta_0 > (1-\rho)\frac{\pi}{2} > (1-\rho)\theta_0 = \lambda_0,$$

следовательно, для числа x, определенного в $(6')$, справедливы неравенства $0 < x < 1$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть число x определено в $(6')$. При $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ введем функцию $h(\theta)$:*

$$h(\theta) = \frac{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)}{(\cos\theta)^\rho}. \tag{7}$$

Тогда функция $h(\theta)$ имеет на $[0, \frac{\pi}{2})$ единственный минимум при $\theta = \theta_0$, при этом $h(\theta_0) > 0$.

Доказательство. Так как при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $0 < \rho < 1$ справедливо неравенство $\cos\rho\theta \geqslant \cos\rho(\pi-\theta)$, то $h(\theta) > 0$ при $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. Далее,

$$\frac{h'(\theta)}{h(\theta)} = (\log(\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)))' - \rho(\log\cos\theta)' =$$

$$= \frac{-\rho\sin\rho\theta - x\rho\sin\rho(\pi-\theta)}{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)} + \rho\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \tag{8}$$

и потому

$$h'(0) = \rho h(0)\frac{-x\sin\rho\pi}{1 - x\cos\rho\pi} < 0.$$

Следовательно, функция $h(\theta)$ убывает в некоторой окрестности точки 0. Далее, так как $0 < x < 1$, то

$$h(\theta) \geqslant \frac{\cos\rho\frac{\pi}{2}}{(\cos\theta)^\rho}(1-x) \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}{\longrightarrow} +\infty,$$

поэтому функция $h(\theta)$ имеет по крайней мере один минимум на $(0, \frac{\pi}{2})$, и этот минимум положителен.

Пусть $\widetilde{\theta} \in (0, \frac{\pi}{2})$ – какая-то из точек минимума функции $h(\theta)$. Тогда $-\frac{1}{\rho}\,\frac{h'(\widetilde{\theta})}{h(\widetilde{\theta})} = 0$, и (8) влечет

$$\frac{\sin\rho\widetilde{\theta} + x\sin\rho(\pi-\widetilde{\theta})}{\cos\rho\widetilde{\theta} - x\cos\rho(\pi-\widetilde{\theta})} - \frac{\sin\widetilde{\theta}}{\cos\widetilde{\theta}} = 0,$$

или

$$\sin\rho\widetilde{\theta}\cos\widetilde{\theta} + x\cos\widetilde{\theta}\sin\rho(\pi-\widetilde{\theta}) - \sin\widetilde{\theta}\cos\rho\widetilde{\theta} + x\sin\widetilde{\theta}\cos\rho(\pi-\widetilde{\theta}) = 0,$$

$$\sin(\rho-1)\widetilde{\theta} + x\sin[\rho(\pi-\widetilde{\theta}) + \widetilde{\theta}] = 0. \tag{9}$$

Положим $\widetilde{\lambda} = (1-\rho)\widetilde{\theta}$. Заметим, что

$$\rho(\pi-\widetilde{\theta}) + \widetilde{\theta} = \rho\pi + (1-\rho)\widetilde{\theta} = \rho\pi + \widetilde{\lambda}.$$

Вспоминая вид x из $(6')$, можем записать (9) так:

$$-\sin\widetilde{\lambda} + \frac{\sin\lambda_0}{\sin(\lambda_0+\rho\pi)}\sin(\widetilde{\lambda}+\rho\pi) = 0,$$

т.е.

$$\sin\lambda_0\sin(\rho\pi+\widetilde{\lambda}) - \sin\widetilde{\lambda}\sin(\lambda_0+\rho\pi) = 0,$$

$$\sin\lambda_0(\sin\rho\pi\cos\widetilde{\lambda} + \cos\rho\pi\sin\widetilde{\lambda}) - \sin\widetilde{\lambda}(\sin\rho\pi\cos\lambda_0 + \cos\rho\pi\sin\lambda_0) = 0$$

$$\sin\rho\pi(\sin\lambda_0\cos\widetilde{\lambda} - \sin\widetilde{\lambda}\cos\lambda_0) = 0,$$

в итоге

$$\sin(\lambda_0 - \widetilde{\lambda}) = 0. \tag{10}$$

В соотношении (10) имеем $0 < \lambda_0,\ \widetilde{\lambda} < \frac{\pi}{2}$, поэтому (10) влечет $\widetilde{\theta} = \theta_0$. Следовательно, функция h имеет на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$ единственную критическую точку θ_0, в которой, таким образом, и достигается минимум функции h, что и требовалось установить.

3. Целая функция $\Pi_\Lambda(z)$

Пусть $\infty > p > 1$, $A > 0$, $\lambda_n = \lambda_n(p, A) = [An^p] + 1$, $n \geqslant 0$, $\Lambda = \Lambda(p, A) = \{\lambda_n(p, A)\}_{n=0}^{\infty}$. Положим

$$\Pi_\Lambda(z) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right). \tag{11}$$

Для дальнейшего существенным является асимптотическое поведение функции Π_Λ. Пусть $\Gamma = \{z = x + iy : x \geqslant -\frac{1}{2}, |y| \leqslant 1\}$.

Лемма 2. *При* $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *справедливы соотношения*

$$\Pi_\Lambda(z) = \exp\left[\frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}\, e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + O(\log(r+2))\right], \tag{12}$$

$$|\Pi'_\Lambda(\lambda_n)| = \exp\left[c_p \frac{\lambda_n^\rho}{A^\rho} + O(\log(\lambda_n+2))\right], \tag{13}$$

где $\rho = 1/p$, $c_p = \pi \mathrm{ctg} \rho\pi$; *если* $z \in \Gamma$, *то выполнено*

$$|\Pi(z)| = \operatorname{dist}(z, \Lambda) \exp\left[c_p \frac{|z|^\rho}{A^\rho} + O(\log(|z|+2))\right]. \tag{14}$$

Доказательство равенств (12)–(14) совершенно аналогично доказательству равенства (5.3_1) в [6], стр. 94, и поэтому мы его опустим.

4. Обращение преобразования Лапласа в конкретной ситуации

Пусть $0 < A < A_1$, $1 < p < 2$, $\Lambda = \Lambda(p, A)$, $\Lambda_1 = \Lambda(p, A_1)$. Выберем $\nu = \nu(p, A)$ таким образом, что при $k > \nu$ справедливо соотношение $\lambda_{k+1}(p, A) > \lambda_k(p, A)$ – этот выбор возможен в силу $p > 1$. Далее, положим

$$\Lambda_0 = \Lambda \setminus \bigcup_{k=0}^{\nu} \{\lambda_k(p, A)\},$$

$$P(z) = \prod_{k=0}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k(p, A)}\right).$$

Для $n \geqslant 0$ определим коэффициенты a_n следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \notin \Lambda_0 \\ \frac{\Pi_{\Lambda_1}(-n)P(n)}{\Pi'_\Lambda(n)}, & n \in \Lambda_0. \end{cases} \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть коэффициенты* a_n *определены в* (15). *Тогда для любых* $s > 0$, $l > 0$ *справедливо равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i - l}^{\infty i - l} e^{-zs} \frac{\Pi_{\Lambda_1}(-z)P(z)}{\Pi_\Lambda(z)}. \tag{16}$$

В равенстве (16) *интегрирование ведется по прямой* $\{\mathrm{Re}\, z = -l\}$ *в направлении, указанном в формуле. Ясно, что* (16) *является формулой обращения преобразования Лапласа в конкретной ситуации.*

Доказательство. Пусть γ_k, $k = \nu(p,A)+1, \nu(p,A)+2, \dots$ – окружности $\{z : |z - \lambda_k(p,A)| = \frac{1}{3}\}$, ориентированные в положительном направлении, t_k^+ – естественно ориентированный отрезок $[\lambda_k(p,A) + \frac{1}{3}, \lambda_{k+1}(p,A) - \frac{1}{3}]$, $k \geqslant \nu(p,A)+1$, t_k^- – отрезок с теми же концами, что и t_k^+, и ориентированный противоположно. Тогда в силу того, что полюсами функции $\frac{e^{-zs}P(z)\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}$ являются точки множества Λ_0 и все эти полюсы простые, для любого $M \geqslant \nu(p,A)+1$ по формуле вычетов имеем равенства

$$\sum_{n=0}^{M} a_n e^{-ns} = \sum_{n=\nu(p,A)+1}^{M} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{e^{-zs}P(z)\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Biggl(\sum_{n=\nu(p,A)+1}^{M}\int\limits_{\gamma_n} \frac{e^{-zs}P(z)\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}\,dz + \sum_{n=\nu(p,A)+1}^{M-1}\Bigl(\int\limits_{t_n^+} + \int\limits_{t_n^-}\Bigr) idem\Biggr) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_M^+} \frac{e^{-zs}P(z)\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_M^-} \frac{e^{-zs}P(z)\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}\,dz \qquad (17)$$

в которых ориентированная кривая Γ_M^+ состоит из отрезка $[0, \lambda_{\nu(p,A)+1} - \frac{1}{3}]$, отрезков t_n^+, $\nu(p,A)+1 \leqslant n \leqslant M-1$, и полуокружностей γ_n, $\nu(p,A)+1 \leqslant n \leqslant M$, лежащих в нижней полуплоскости, а кривая Γ_M^- состоит из полуокружностей γ_n, лежащих в верхней полуплоскости, $\nu(p,A)+1 \leqslant n \leqslant M$, отрезков t_n^-, $\nu(p,A)+1 \leqslant n \leqslant M-1$, и отрезка $[\lambda_{\nu(p,A)+1} - \frac{1}{3}, 0]$. Пусть, далее, $R_M = \lambda_M(p,A) + \frac{1}{3}$, T_M – полуокружность $\{z : |z| = R_M, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$, проходимая по часовой стрелке, $T_M^+ = \{z : |z| = R_M, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0, \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$. Тогда, если $idem$ означает функцию из (17), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\Bigl(\int\limits_{\Gamma_M^+} + \int\limits_{\Gamma_M^-}\Bigr) idem = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R_M i}^{R_M i} idem + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_M} idem =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R_M i - l}^{R_M i - l} idem + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R_M i}^{-R_M i - l} idem + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R_M i - l}^{R_M i} idem + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_M} idem =$$

$$= I_M + J_M^- + J_M^+ + L_M. \tag{18}$$

Установим, что $J_M^{\pm}$, $L_M \to 0$ при $M \to \infty$.

Оценка L_M. Пусть $x = \frac{A^\rho}{A_1^\rho}$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$\delta = \cos\rho\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) - x\cos\rho\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) > 0.$$

В таком случае при $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right]$ имеем

$$\frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho(\pi-\theta) - \frac{\pi}{A_1^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho\theta =$$

$$= \frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}(\cos\rho(\pi-\theta) - x\cos\rho\theta) \geqslant \tag{19}$$

$$\geqslant \frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}\left(\cos\rho\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) - x\cos\rho\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right) \geqslant \frac{\pi\delta}{A^\rho\sin\rho\pi} = \sigma > 0.$$

Если $\varphi(z)$ – подинтегральная функция в (17), то, поскольку $\varphi(\bar z) = \overline{\varphi(z)}$, имеем

$$|L_M| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_M}|\varphi(z)|\,|dz| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{T_M^+}|\varphi(z)|\,|dz| = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}|\varphi(R_M e^{i\theta})|R_M\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(R_M e^{i\theta})|R_M\,d\theta = L_{M1} + L_{M2}. \tag{20}$$

Поскольку $|P(z)| \leqslant e^{Q_0\log(|z|+2)}$ с некоторой постоянной $Q_0 > 0$, а соотношения (12) и (14) леммы 2 влекут неравенства

$$\left|\frac{\Pi_{\Lambda_1}(-R_M e^{i\theta})}{\Pi_\Lambda(R_M e^{i\theta})}\right| \leqslant e^{Q_1 R_M^\rho + Q_1'\log(R_M+2)}$$

с некоторыми Q_1, $Q_1' > 0$, при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ для функции φ выполнено неравенство

$$|\varphi(R_M e^{i\theta})| \leqslant e^{-sR_M\cos\theta} e^{Q_1 R_M^\rho + Q_2\log(R_M+2)} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-sR_M\sin\varepsilon} e^{Q_1 R_M^\rho + Q_2\log(R_M+2)},$$

поэтому при $R_M > R(s,\varepsilon,\rho,Q_1,Q_2)$ имеем оценку

$$|\varphi(R_M e^{i\theta})| \leqslant e^{-\frac{s\sin\varepsilon}{2}R_M}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}-\varepsilon. \tag{21}$$

Если же $\frac{\pi}{2}-\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, то вновь применяя (12) и (14) и учитывая соотношение (19) и то, что $|e^{-sz}| \leqslant 1$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, для функции φ находим оценку

$$|\varphi(R_M e^{i\theta})| \leqslant$$

$$\exp\left[\left(\frac{\pi}{A_1^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho\theta - \frac{\pi}{A^\rho\sin\rho\pi}\cos(\pi-\theta)\right)R_M^\rho + Q_3\log(R_M+2)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp(-\sigma R_M^\rho + Q_3\log(R_M+2)), \quad \theta\in\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right]. \tag{22}$$

Из (20)–(22) находим, что $L_M \to 0$ при $M\to+\infty$.

Оценка $J_M^\pm$. Пусть ε выбрано в начале оценки L_M, полагаем, что R_M столь велико, что $\frac{l}{R_M} \leqslant \operatorname{tg}\varepsilon$. Применим (19) и учтем, что при $\operatorname{Re} z \geqslant -l$ выполнено $|e^{-sz}| \leqslant e^{sl}$, поэтому имеем оценку

$$|\varphi(z)| \leqslant$$

$$\leqslant e^{sl}\exp\left[\left(\frac{\pi}{A_1^\rho\sin\rho\pi}\cos\rho\theta - \frac{\pi}{A^\rho\sin\rho\pi}\cos(\pi-\theta)\right)|z|^\rho + Q_3\log(|z|+2)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp[-\sigma|z|^\rho + Q_3\log(|z|+2)]\cdot e^{sl}, \quad z\in J_M^\pm, \tag{23}$$

следовательно, $J_M^\pm \to 0$, $M\to+\infty$.

Теперь (17), (18) и оценки $J_M^\pm$, L_M влекут

$$\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-ns} = \lim_{M\to\infty}\sum_{n=0}^M a_n e^{-ns} = \lim_{M\to\infty} I_M = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i - l}^{\infty i - l}\varphi(z)dz.$$

Лемма 3 доказана.

5. Построение $f_{1,p,A}$

Положим $\theta_0 = \pi\frac{2-p}{2}$, $\lambda_0 = (1-\rho)\theta_0 = \pi\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{2-p}{2} = \pi\frac{(p-1)(2-p)}{2p}$. Выбор θ_0 и λ_0 дает равенство

$$\lambda_0 + \rho\pi = \pi\frac{1}{p}\left(\frac{3p-2-p^2}{2}+1\right) = \pi\frac{3-p}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi\frac{2-p}{2} = \frac{\pi}{2}+\theta_0,$$

значит, $\sin(\lambda_0+\rho\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)=\cos\theta_0$. Наконец, определим x:

$$x=\frac{\sin\lambda_0}{\sin(\lambda_0+\rho\pi)}=\frac{\sin\lambda_0}{\cos\theta_0} \tag{24}$$

и $A_1>0$ зададим соотношением

$$\left(\frac{A}{A_1}\right)^{\rho}=x, \tag{25}$$

где x взято из (24). Отметим, что лемма 1 и равенство (24) при $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ влекут следующие соотношения:

$$\frac{\cos\rho\theta-x\cos\rho(\pi-\theta)}{(\cos\theta)^{\rho}}\geqslant\frac{\cos\rho\theta_0-x\cos\rho(\pi-\theta_0)}{(\cos\theta_0)^{\rho}}=$$

$$=\frac{\cos\rho\theta_0-\frac{\sin\lambda_0}{\cos\theta_0}\cos\rho(\pi-\theta_0)}{(\cos\theta_0)^{\rho}}=$$

$$=\frac{\cos\rho\theta_0\sin(\lambda_0+\rho\pi)-\sin\lambda_0\cos\rho(\pi-\theta_0)}{(\cos\theta_0)^{1+\rho}}=$$

$$=\frac{\cos\rho\theta_0(\sin\lambda_0\cos\rho\pi+\cos\lambda_0\sin\rho\pi)-\sin\lambda_0(\cos\rho\pi\cos\rho\theta_0+\sin\rho\pi\sin\rho\theta_0)}{(\cos\theta_0)^{1+\rho}}=$$

$$=\frac{\sin\rho\pi(\cos\rho\theta_0\cos\lambda_0-\sin\rho\theta_0\sin\lambda_0)}{(\cos\theta_0)^{1+\rho}}=\frac{\sin\rho\pi\cos(\rho\theta_0+\lambda_0)}{(\cos\theta_0)^{1+\rho}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{p}\,\cos(\rho\theta_0+(1-\rho)\theta_0)}{(\cos\theta_0)^{1+\rho}}=\frac{\sin\frac{\pi}{p}}{(\cos\theta_0)^{\rho}}. \tag{26}$$

Введем число N, существенное для дальнейших оценок:

$$N=\frac{\pi}{\sin\rho\pi}\frac{1}{A^{\rho}}\frac{\sin\rho\pi}{(\cos\theta_0)^{\rho}}=\frac{\pi}{(\cos\theta_0)^{\rho}}\,\frac{1}{A^{\rho}}. \tag{27}$$

Теперь определим требуемую в теореме функцию $f_{1,p,A}$. Выберем число $\nu=\nu(p,A)$ так, как в начале п. 4, затем определим $\Lambda=\Lambda(p,A)$ так же, как перед соотношением (11), множество Λ_0 определено перед (15), число A_1 взято из (25), $\Lambda_1=\Lambda(p,A_1)$, коэффициенты a_n определены в (15). Положим

$$f_1(z)=f_{1,p,A}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{28}$$

Определение множества Λ_0 показывает, что f_1 – (p,A)-лакунарная фунция.

6. Доказательство теоремы: оценка $f_1(e^{-s})$

Фиксируем $s>0$. Применяя лемму 3, находим, что

$$|f_1(e^{-s})| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-l_0}^{-l_0+\infty i} |e^{-zs}| \left|\frac{\Pi_{\Lambda_1}(-z)}{\Pi_\Lambda(z)}\right| |P(z)||dz| =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{l_0 s} \int\limits_0^\infty \frac{|\Pi_{\Lambda_1}(l_0-iy)|}{|\Pi_\Lambda(-l_0+iy)|} |P(-l_0+iy)|dy. \tag{29}$$

Далее при оценке функции f_1 из (28) в соотношении (29) положим

$$l_0 = \left(\frac{\rho N}{s}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \tag{30}$$

(l_0 – это корень уравнения $\rho N l^{\rho-1} - s = 0$, N взято из (27)). Вновь выбирая N из (27), x из (24), определим ε_0 из равенства

$$(1-x)\frac{\pi}{\sin\pi\rho}\frac{1}{A^\rho}\,\frac{\cos\rho\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho} = 3N. \tag{31}$$

Далее, выбирая ε_0 из (31), l_0 из (30), определим число $T = l_0 \mathrm{ctg}\varepsilon_0$. Учтем, что справедлива оценка $|P(z)| \leqslant \exp[Q_4\log(|z|+2)]$, поэтому (29) и лемма 2 влекут неравенство

$$|f_1(e^{-s})| \leqslant \frac{1}{\pi} e^{sl_0+Q_5\log(l_0+2)} \times$$

$$\times \int\limits_0^T \exp\left\{\left[-\frac{\pi}{A^\rho\sin\rho\pi}\cos\rho\theta + \frac{\pi}{A_1^\rho\sin\rho\pi}\cos\rho(\pi-\theta)\right] r^\rho\right\} dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}e^{sl_0}\int\limits_T^\infty \exp\left[\left(-\frac{\pi}{A^\rho\sin\rho\pi}\cos\rho\theta + \frac{\pi}{A_1^\rho\sin\rho\pi}\cos\rho(\pi-\theta)\right) r^\rho\right] \times$$

$$\times |P(-l_0+iy)|dy = I_1 + I_2. \tag{32}$$

В соотношении (32) для краткости употреблены обозначения $\theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{l_0}$, $r = \sqrt{l_0^2+y^2}$. Оценим члены I_1 и I_2.

Оценка I_1. Примем во внимание, что $r = \frac{l_0}{\cos\theta}$ и затем учтем неравенства (26). Тогда мы получим следующие оценки:

$$I_1 = \frac{1}{\pi} e^{sl_0 + Q_5 \log(l_0+2)} \times$$

$$\times \int_0^T \exp\left[\left(-\frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho\theta + \frac{\pi}{A_1^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho(\pi-\theta)\right)\frac{l_0^\rho}{(\cos\theta)^\rho}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{sl_0 + Q_5 \log(l_0+2)} \int_0^T \exp\left[-\frac{\pi l_0^\rho}{A^\rho \sin\rho\pi}\left(\frac{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)}{(\cos\theta)^\rho}\right)\right]dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} e^{sl_0 + Q_5 \log(l_0+2)} \int_0^T \exp\left[-\frac{\pi l_0^\rho}{A^\rho \sin\rho\pi}\frac{\sin\rho\pi}{(\cos\theta_0)^\rho}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{sl_0 + Q_5 \log(l_0+2)} \exp(-Nl_0^\rho)\cdot T \leqslant \exp(sl_0 - Nl_0^\rho + Q_6 \log(l_0+2)), \quad (33)$$

обозначение N было введено в (27).

Выбор (30) величины l_0 и определение (4) числа $B_2(p, A)$ влекут равенство:

$$sl_0 - Nl_0^\rho = -(p-1)\left(\frac{N}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \frac{1}{s^{\frac{1}{p-1}}} = -B_2(p, A)\frac{1}{s^{\frac{1}{p-1}}}, \quad (34)$$

поэтому (33) дают

$$I_1 \leqslant \exp\left[-B_2(p, A)\frac{1}{s^{\frac{1}{p-1}}} + Q_7 \log\left(\frac{1}{s} + 2\right)\right]. \quad (35)$$

Оценка I_2. При $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < x < 1$, $0 < \rho < 1$ имеем неравенства

$$\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi - \theta) \geqslant (1-x)\cos\rho\frac{\pi}{2},$$

$$\cos^\rho\theta = \sin^\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^\rho \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^\rho,$$

и поэтому при $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{l_0}$, $r = \sqrt{l_0^2 + y^2}$ при $y \geqslant T$ имеем

$$\left(-\frac{\pi}{A^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho\theta + \frac{\pi}{A_1^\rho \sin\rho\pi}\cos\rho(\pi-\theta)\right) r^\rho =$$

$$= -\frac{\pi l_0^\rho}{A^\rho \sin\rho\pi}\frac{\cos\rho\theta - x\cos\rho(\pi-\theta)}{(\cos\theta)^\rho} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{A^\rho}(1-x)\frac{\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\sin\rho\pi}\,\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho}\,l_0^\rho - \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{A^\rho}(1-x)\frac{\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\sin\rho\pi}\,l_0^\rho\,\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho}\,\frac{\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho}{(\cos\theta)^\rho} =$$

$$= -2Nl_0^\rho - Nl_0^\rho\frac{\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho}{(\cos\theta)^\rho}. \qquad (36)$$

Далее, учтем, что оценку для $P(z)$ можно записать в виде:

$$|P(-l_0+iy)| \leqslant \exp\left[Q_4\log\left(\sqrt{l_0^2+y^2}\,+2\right)\right] =$$

$$= \exp\left[Q_4\log\left(\frac{l_0}{\cos\theta}+2\right)\right].$$

Сделав в интеграле I_2 замену $y = l_0\mathrm{tg}\theta$ и применив соотношения (34) и (36), получим:

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\pi}e^{sl_0 - 2Nl_0^\rho}\times$$

$$\times\int\limits_T^\infty \exp\left[-N\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho\left(\frac{l_0}{\cos\theta}\right)^\rho + Q_4\log\left(\frac{l_0}{\cos\theta}+2\right)\right]dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\exp[-B_2(p,A)s^{-\frac{1}{p-1}}]\exp[-N(\rho N)^{\frac{1}{1-\rho}}s^{-\frac{1}{p-1}}]\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-N\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho\left(\frac{l_0}{\cos\theta}\right)^\rho + Q_4\log\left(\frac{l_0}{\cos\theta}+2\right)\right]\frac{l_0}{\cos^2\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\exp[-B_2(p,A)s^{-\frac{1}{p-1}}]\exp[-N(\rho N)^{\frac{1}{1-\rho}}s^{-\frac{1}{p-1}}]l_0^{-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-N\left(\frac{2}{\pi}\varepsilon_0\right)^\rho\left(\frac{l_0}{\cos\theta}\right)^\rho + Q_4\log\left(\frac{l_0}{\cos\theta}+2\right)\right]\left(\frac{l_0}{\cos\theta}\right)^2 d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left[-B_2(p,A)s^{-\frac{1}{p-1}} + Q_8\log\left(\frac{1}{s}+2\right)\right]. \qquad (37)$$

В неравенствах (37) мы воспользовались выбором (30) величины l_0 и неравенством

$$\exp[-vt^\rho + Q\log(t+2)]\cdot t^2 \leqslant \mathrm{const}, \quad t \geqslant 0, \quad v,\rho > 0.$$

Собирая вместе соотношения (32), (35) и (37), находим, что

$$|f_1(e^{-s})| \leqslant \exp\left[-B_2(p,A)s^{-\frac{1}{p-1}} + Q\log\left(\frac{1}{s}+2\right)\right] \tag{38}$$

Заменяя в оценке (38) переменную s на $-\log x$, $0 < x < 1$, получаем требуемую в теореме оценку, что и требовалось. Теорема доказана.

Литература

1. L. Schwartz, *Etudes des sommes d'exponentielles réeles.* Paris, 1943.
2. I. I. Hirschman, J. A. Jenkins, *On lacunary Dirichlet series.* Proc. Amer. Math. Soc., **1**, No. 4 (1950), 512–517.
3. Н. А. Широков, *Некоторые свойства слаболакунарных степенных рядов.* Успехи мат. наук, **37**, No. 2 (1982), 249–250.
4. N. A. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary.* Lecture Notes in Math., **1312** (1988).
5. J. M. Anderson, *Bounded analytic functions with Hadamard gaps.* Mathematica, **23**, No. 2 (1976), 142–147.
6. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций.* Москва, "Наука", 1970.

Shirokov N. A. An example of a fast decaying (p, A)-lacunary function.

A function $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ analytic in the unit disc is said be (p, A)-lacunary if $n_k \geqslant Ak^p$, $1 < p < \infty$, $A > 0$ for all $k \geqslant 0$. For $1 < p < 2$, $A > 0$, a (p, A)-lacunary function $f_{1,p,A}(z)$ is constructed that decays as $x \to 1-0$ almost optimally.

Санкт-Петербургский
государственный
электротехнический университет

Поступило 5 января 2000 г.