Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

Л. А. Бокуть, П. С. Колесников

БАЗИСЫ ГРЁБНЕРА–ШИРШОВА: ОТ ЗАРОЖДЕНИЯ ДО НАШИХ ДНЕЙ

1. Введение

А. И. Ширшов в 1962 году [80] и Б. Бухбергер в 1965 году [110] ввели одни и те же, по существу, идеи для лиевых многочленов (Ширшов) и коммутативных многочленов (Бухбергер). Это, во-первых, понятие *композиции* двух многочленов (Ширшов) или S-*многочлена* (Бухбергер) и понятие множества многочленов, "*полного*" относительно взятия композиций или S-многочленов (позднее Бухбергер [111] назвал эти множества базисами Грёбнера; Л. А. Бокуть [16] назвал эти множества "замкнутыми относительно композиции"; в последнее время эти множества для алгебр Ли и ассоциативных алгебр стали называть "базисами Грёбнера–Ширшова", см. [95, 99, 101–105, 123, 155, 173]; широко используются также термины "некоммутативные базисы Грёбнера" или "стандартные базисы"). Во-вторых, *алгоритмы пополнения* Ширшова и Бухбергера, присоединение к множеству S всех нетривиальных после приведения относительно S (исключения старших слов многочленов S) композиций (S-многочленов), до тех пор, пока не получится полное множество; Ширшов ввел специальное обозначение для результата пополнения множества S – множество S^*. В третьих, *лемма Ширшова о композиции* и *теорема Бухбергера*. Эти последние утверждения говорят, что если S – полное относительно композиции (взятия S-многочленов) множество, и $f \in Id(S)$, то старшее слово $\overline{f} = u\overline{s}v$ для некоторого $s \in S$. Разница в интерпретации заключалась в том, что Бухбергер брал последнее свойство за определение "базиса Гребнера", в то время как Ширшов формулировал свою лемму для любого S^*. Правда, у него было еще условие "устойчивости" S^*, но оно в лемме о композиции не нужно и не использовалось, а нужно для существования алгоритма для решения проблемы равенства в фактор-алгебре. В 1972 году Л. А. Бокуть [16] сформулировал лемму Ширшова о композиции в современном виде.

Работа Ширшова [80] долгое время оставалась практически неизвестной за рубежом. Между прочим, похожая судьба была у другой работы А. И. Ширшова [77], пока Ш. Амицур и Н. Джекобсон (см. [132]), а также К. Прочези [163] не ввели ее в научный обиход. В настоящее время работа [77] получила всеобщее признание как новый метод в комбинаторике слов [148] и как одна из идей, приведших Е. И. Зельманова к решению ослабленой проблемы Бернсайда [30, 31] и А. Р. Кемера к решению проблемы Шпехта [32, 33].

Цель этого обзора – рассказать, что было сделано в рассматриваемой области (базисы Грёбнера–Ширшова), начиная с упомянутой выше работы Ширшова [80]. Мы более-менее подробно обозреваем то, что было сделано до 1978 года, тем более, что в то время было всего два-три автора, которые этим занимались (включая Ширшова и одного из авторов этого обзора). Всю ответственность за эту часть обзора и высказанные здесь комментарии несет на себе старший из авторов (Л. А. Бокуть).

Далее, мы коротко затрагиваем результаты, полученные после 1978 года (года появления работы Дж. Бергмана [93]), в том числе работы, начиная, с 1996 года, которые используют терминологию "базисов Грёбнера–Ширшова". Наконец, более-менее подробно обозревается новая область применения указанной техники – конформные алгебры. Последние стали развиваться сравнительно недавно под влиянием работ [90, 108, 120, 134]. Здесь отмечены результаты, полученные аспирантом Е. И. Зельманова – М. Ройтманом [166, 167], лемма о композиции [96] и коммутативные конформные алгебры [35].

2. Основные идеи работы Ширшова [80], как они изложены в явном виде в работе Бокутя [16]

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – упорядоченное множество, $x_i > x_j$, если $i > j$, $k\langle X\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над полем k. Пусть, далее, $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$ – свободная алгебра Ли, порожденная в $k\langle X\rangle$ множеством X относительно лиевого умножения $[xy] = xy - yx$. Базисными мономами (словами) алгебры $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$ являются правильные в смысле Ширшова слова $[u]$ [78]. Сейчас они называются словами Линдона–Ширшова и даже словами Линдона; независимо от Ширшова они были введены в работе [113]. Начнем с определения правильного ассоциативного слова. Слово u называется правильным, если $u = vw > wv$ в лексикографическом смысле для любых $v \neq 1, w \neq 1$. Аналогичное определение (с заменой "больше" на "меньше") было дано Линдоном несколько ранее [149, 150]. Под названием "слова Линдона" они изучаются в комбинаторике слов (см., например, [148]). Используется также термин "ассоциативные слова Линдона–Ширшова" (см., например, [101]). На каждом правильном ассоциативном слове u можно расставить скобки, пользуясь следующим правилом:

$$[u] = [[v][w]],$$

где w – самый длинный правильный конец слова u, тогда v – некоторое правильное начало u. Слова Линдона–Ширшова упорядочим следующим образом:

$$[u] > [v] \Leftrightarrow u > v$$

в упорядоченности $\deg - \mathrm{lex}$ (сначала по степени, а потом лексикографически). Пусть $\overline{f}$ – старшее ассоциативное слово многочлена f. Это обозначение введено в работе [16]. Если f – лиев многочлен, то $\overline{f}$ – правильное слово и

$$f = \alpha[\overline{f}] + \sum_i \alpha_i [u_i],$$

где u_i – правильные слова, меньшие $\overline{f}$. Многочлен f называется унитарным, если $\alpha = 1$.

Композиция $(f, g)_w$ двух лиевых многочленов f, g относительно (правильного) слова w, такого, что $w = \overline{f}v = u\overline{g}$, $\deg \overline{f} + \deg \overline{g} > \deg w$, определяется так:

$$(f, g)_w = [fv] - [ug],$$

где $[fv]$, $[ug]$ – некоторая специальная расстановка скобок на fv и ug соответственно (см. ниже). В современной терминологии, для образования лиевой композиции f и g, мы должны сначала взять ассоциативную композицию $fv - ug$, а затем расставить скобки "специальным" образом. Основное свойство композиции заключается в следующем:

$$\overline{(f, g)_w} < w.$$

В работе [80] от читателя предполагается свободное владение понятием исключения старшего слова (ИСС) одного лиевого многочлена в другом (“приведение” одного многочлена по модулю другого), введенным ранее в работе [78]. Именно, пусть f, g – два унитарных лиевых многочлена, таких, что $\overline{f} = u\overline{g}v$. Тогда преобразование

$$f \to f - [ugv],$$

где $[ugv]$ – упомянутая выше специальная расстановка скобок на $[ugv]$, называется ИСС g в f (или приведением f по модулю g).

Дадим определение специальной расстановки скобок.

Определение-Лемма [78]. *Пусть $u = avb$ – правильное слово с выделенным правильным подсловом v. Тогда в слове Линдона–Ширшова $[u]$ одна пара скобок имеет вид $[vc]$:*

$$[u] = [a[vc]d],$$

где $b = cd$, слово c может быть пустым. Представим c в виде

$$c = c_1 \dots c_k,$$

где c_i – правильные слова и $c_1 \leq \dots \leq c_k$. Такое представление существует и единственно (ср. [148]). Заменим $[vc]$ на слово $[\dots[[v][c_1]]\dots[c_k]]$. Полученное слово

$$[u]_{a,v} = [u]_v$$

и есть специальная расстановка скобок на u относительно v. Тогда имеем

$$\overline{[u]_v} = u.$$

В работе [16] многочлен $f-[ugv]$, такой, что $\overline{f} = u\overline{g}v = w$, также назван композицией и обозначен $(f,g)_w$. Опять имеем основное свойство композиции:

$$\overline{(f,g)_w} < w.$$

Множество S лиевых многочленов называется *замкнутым относительно композиции* (*базисом Грёбнера–Ширшова* по современной терминологии), если любая композиция $(f,g)_w$ многочленов f, $g \in S$ преобразуется в 0 с помощью ИСС многочленов S. В работе [16] последнее условие несколько ослаблено. Требуется, чтобы

$$(f,g)_w = \sum_i \alpha_i [a_i s_i b_i], \tag{1}$$

где $s_i \in S$, $\overline{[a_i s_i b_i]} = a_i \overline{s_i} b_i < w$. Однако из леммы Ширшова о композиции следует, что если S замкнуто в смысле (1), то оно замкнуто и в смысле ИСС (обратное очевидно). Правда, при этом нужно использовать вариант леммы Ширшова из работы [16], относящийся к замкнутости в смысле (1).

Таким образом, следующая лемма Ширшова о композициях справедлива при любом понимании замкнутости S.

Лемма о композиции ([80], в явном виде сформулировано в [16]). *Пусть $S \subset \mathrm{Lie}\langle X\rangle$ множество унитарных лиевых многочленов, замкнутое относительно композиции (т.е. базис Грёбнера–Ширшова). Если $f \in Id(S)$, то $\overline{f} = a\overline{s}b$ для некоторого $s \in S$.*

Следствие ([80], в явном виде сформулировано в [16]). *Пусть S – базис Грёбнера–Ширшова в $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$. Тогда S-приведенные слова Линдона–Ширшова (т.е. слова $[u]$, для которых $u \neq a\overline{s}b$ для любого $s \in S$) образуют линейный базис фактор-алгебры $\mathrm{Lie}\langle X\rangle/Id(S) = \mathrm{Lie}\langle X|S\rangle$, т.е. алгебры Ли с определяющими соотношениями S.*

Верно и обратное утверждение: Если S-приведенные слова Линдона–Ширшова образуют линейный базис $\mathrm{Lie}\langle X|S\rangle$, то S замкнуто относительно композиции (в обоих смыслах). Для ассоциативных алгебр это утверждение содержится в Diamond лемме [93], а для алгебр Ли отмечено в работе [101].

3. Базисы свободных алгебр Ли. Слова Линдона–Ширшова

История базисов свободных алгебр Ли, в частности, базиса Линдона–Ширшова, заслуживает того, чтобы рассказать о ней отдельно. Впервые базис свободной алгебры Ли был найден М. Холлом в 1950 г. [127]. Базисные слова Холла от линейно упорядоченного множества X определяются индуктивно:

(1) Базисные слова $x_i \in X$ длины 1 определены и упорядочены,

(2) Если определены и упорядочены базисные слова длины $\leq n$, то (неассоциативное) слово (u) называется базисным, если $(u) = ((v)(w))$, где (v), (w) – базисные слова, $(v) > (w)$, причем если $(v) = ((v_1)(v_2))$, то $(v_2) \leqslant (w)$. Упорядочим базисные слова длины $\leq n$, считая, что слова длины n больше всех слов меньшей длины.

Надо сказать, что по словам А. И. Ширшова эта база была им открыта независимо и это был его первый научный результат во время обучения в аспирантуре МГУ под руководством А. Г. Куроша (в 1950–1953 гг). Затем они с Курошем убедились, что этот результат опубликован и, руководствуясь строгими правилами научной этики, они не стали претендовать на независимость. А. И. Ширшов никогда публично не заявлял об этом и только много лет спустя в разговоре с одним из авторов этих строк (Л. А. Бокутем) рассказал эту историю. Чуть позже Ширшов получил два важных результата о свободных алгебрах Ли, которые вошли в его кандидатскую диссертацию [75]: теорему о свободе подалгебр свободных алгебр Ли [76] (результат, называемый теперь теоремой Ширшова–Витта (см. [165]; Витт опубликовал его в 1956 году [172]) и теорему о широкой серии баз свободных алгебр Ли. Именно, он отказался от упорядоченности базисных слов по длине и вместо этого потребовал более слабое условие: если $(u) = ((v)(w))$, то $(u) > (w)$. В остальном индуктивное определение базисных слов остается таким же, как у М. Холла. Свою серию баз А. И. Ширшов опубликовал через 10 лет в работе [79]. К тому времени, пользуясь методом Ширшова, Л. А. Бокуть нашел базы свободных алгебр Ли, которые после факторизации дают базы свободных разрешимых алгебр Ли и, более общо, свободных полинильпотентных алгебр Ли, соответствующих тождеству $(\dots(L^{n_1})^{n_2}\dots)^{n_k} = 0$, где $n_j \geq 2$, $1 \leq j \leq k$, $k \geq 1$. Случай свободных разрешимых алгебр Ли соответствует последовательности $(2,\dots,2)$. По словам А. И. Ширшова это “заставило” его опубликовать свою серию баз, а затем были опубликованы и базы Бокутя [6]. Через несколько лет последний результат был переоткрыт Рейтенауэром [164] (см. также [165]). Серия баз Ширшова была переоткрыта в [171] и вошла в книгу [165] под названием базы Холла. В работе [101] они были названы базами Холла–Ширшова.

База из слов Линдона–Ширшова является частным случаем баз Холла–Ширшова, если в качестве упорядоченности взять лексикографическую упорядоченность, при которой начало слова больше всего слова:

$$[u] > [v] \Leftrightarrow u > v$$

лексикографически.

Ассоциативные слова Линдона–Ширшова в настоящее время играют важную роль в комбинаторике слов (см., например, [148]).

Недавно метод, который был использован Ширшовым в [79] для доказательства линейной независимости базисных слов, был использован в работе [98] для нахождения базы свободной ассоциативной конформной алгебры. Другое доказательство, использующее лемму о композиции – Diamond-лемму, имеется в работе М. Ройтмана [166].

4. Алгебры Ли с одним соотношением. Свободные произведения алгебр Ли

Первые применения, которые сделал А. И. Ширшов [80], касались алгебр Ли с одним соотношением $\mathrm{Lie}\langle X|s=0\rangle$. Замечательное свойство правильных ассоциативных слов заключается в том, что никакое начало правильного слова не совпадает с его концом. Отсюда следует, что не существует композиции лиевого многочлена с самим собой. Поэтому одноэлементные множества свободных алгебр Ли замкнуты относительно композиции и к ним можно применить лемму о композиции. В результате алгоритм ИСС дает разрешимость проблемы равенства в любой алгебре Ли с одним соотношением.

Небольшие изменения в предудущих рассуждениях приводят к теореме о свободе для алгебр Ли: Если $s(x_1,\ldots,x_n)$ в записи через слова Линдона–Ширшова содержит букву x_n, то $x_1,\ldots,x_{n-1}$ порождают в $\mathrm{Lie}\langle X|s=0\rangle$ свободную подалгебру. Деиствительно, за счет изменения функции степени ($\deg x_n \gg 1$, $\deg x_i = 1$, $1\le i\le n-1$) всегда можно считать, что старшее слово s относительно порядка $\deg-\mathrm{lex}$ содержит x_n. Теперь теорема о свободе вытекает из следствия леммы о композиции.

В работе [81] метод композиции применяется для нахождения базиса свободного произведения алгебр Ли. Пусть A, B – алгебры Ли с базисами $\{a_i\}_{i\in I}$, $\{b_j\}_{j\in J}$ соответственно. Базисом свободного произведения $A*B$ являются все так называемые особые слова Линдона–Ширшова в алфавите $\{a_i\}\cup\{b_j\}$. Слово Линдона–Ширшова $[u]$ называется особым, если u не содержит подслов a_ia_j, $i>j$, $i,j\in I$ и b_ib_j, $i>j$, $i,j\in J$. Это сразу следует из представления

$$A*B = \langle \{a_i\}\cup\{b_j\} \mid [a_ia_j]-\sum \alpha_{ij}^k a_k = 0\ (i>j,\, i,j\in I),$$

$$[b_ib_j]-\sum \beta_{ij}^k b_k = 0\ (i>j,\, i,j\in J)\rangle.$$

Система соотношений $A * B$ замкнута относительно композиции. Поэтому утверждение о линейном базисе $A*B$ вытекает из следствия леммы о композиции.

В этой же работе [81] А. И. Ширшов построил контрпример к гипотезе Куроша–Витта о строении подалгебр свободного произведения алгебр Ли. Именно, им были построены алгебры Ли A, B, и подалгебра $C \subset A * B$, такие, что C не имеет вид $F * (C \cap A) * (C \cap B)$, где F – свободная алгебра Ли. Именно так, по теореме Куроша [40], устроены подалгебры свободного произведения неассоциативных алгебр A, B. Так же устроены подалгебры свободного коммутативного (антикоммутативного) произведения таких же алгебр [21].

В дальнейшем подалгебры свободных произведений алгебр Ли изучал Г. П. Кукин [37, 39], см. также [100]. В частности, декартова подалгебра свободного произведения алгебр Ли (ядро гомоморфизма на прямую сумму) является свободной алгеброй Ли [37]. Этот же результат независимо получил Д. Эйделькинд (не опубликовано), ученик А. Л. Шмелькина.

5. Алгебраически замкнутые алгебры Ли

В работах Л. А. Бокутя [4, 5], метод композиции использован для доказательства вложимости произвольной алгебры Ли в алгебраически замкнутую алгебру Ли. Пусть L – алгебра Ли над k с базой $\{a_i\}_{i\in I}$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ – счетное множество переменных, $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$ – свободная алгебра Ли над k, порожденная X. Пусть, далее, $L * \mathrm{Lie}\langle X\rangle$ – свободное лиево произведение алгебр L и $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$. Как следует из леммы о композиции, базой $L * \mathrm{Lie}\langle X\rangle$ являются все слова Линдона–Ширшова $[u]$, такие, что u не содержит подслов $a_i a_j$, $i > j$. Выражение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где $f \in L * \mathrm{Lie}\langle X\rangle$, $f \notin L$, называется лиевым алгебраическим уравнением над L. Алгебра L называется алгебраически замкнутой, если любое лиево алгебраическое уравнение над L имеет решение в L.

Для доказательства вложимости L в алгебраически замкнутую алгебру Ли, достаточно сделать один шаг. А именно, достаточно установить, что L является подалгеброй следующей алгебры Ли L_f:

$$L_f = \mathrm{Lie}\langle \{a_i\} \cup X \mid [a_i a_j] - \sum \alpha_{ij}^k a_k = 0 \ (i > j),\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \rangle$$

(считаем $a_i > a_j$ при $i > j$, и всегда $x_i > a_j$). Для этого достаточно найти систему соотношений алгебры L_f, замкнутую относительно композиции. Пусть

$$\overline{f} = u x_i a_{i_1} \ldots a_{i_k},$$

где $i_1 \leq \cdots \leq i_k$, $k \geq 0$. Если $k = 0$, то определяющие соотношения L_f замкнуты относительно композиции. Пусть $k > 0$. Тогда к соотношениям L_f нужно добавить соотношения вида

$$[\ldots [f a_{j_1}] \ldots a_{j_s}] = 0,$$

где $s \geq 0$, $j_1, \ldots, j_s < i_k$. Старшее ассоциативное слово этого соотношения имеет вид

$$\overline{[\ldots [f a_{j_1}] \ldots a_{j_s}]} = u x_i \langle a_{i_1} \ldots a_{i_k} a_{j_1} \ldots a_{j_s} \rangle,$$

где скобки $\langle\ \rangle$ означают, что буквы внутри этих скобок нужно расположить в порядке неубывания (последняя буква всегда равна a_{i_k}).

В связи с этой работой Л. А. Бокуть [94] поставил два вопроса: Существуют ли алгебраически замкнутые группы (в случе групп уравнением над G называется выражение $f \in G * Gr\langle X \rangle$, где f не сопряжено никакому элементу G)? Существуют ли алгебраически замкнутые ассоциативные алгебры? Первый вопрос рассматривался С. Бродским [20], который доказал следующую теорему о вложении: Любая локально индикабельная группа (в которой любая конечнопорожденная подгруппа гомоморфно отображется на бесконечную циклическую группу) вложима в алгебраически замкнутую группу. Второй вопрос был решен также положительно Л. Г. Макар-Лимановым [151]. Свою работу Л. Г. Макар-Лиманов докладывал в Новосибирске на семинаре Л. А. Бокутя в 1977 году. Но лишь недавно одному из участников этого семинара, П. С. Колесникову, соавтору этого обзора, удалось окончательно разобраться во всех деталях этой работы. Именно, в работе [34] построен другой пример алгебраически замкнутого тела и одновременно прояснены все места работы [151], которые оставались неясными (см. [34]).

Из существования алгебраически замкнутых тел следует, как заметил Л. Г. Макар-Лиманов [151], теорема о свободе для ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль. Именно, пусть f – элемент свободной ассоциативной алгебры $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, содержащий x_n;

$$s(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \big(f\big) \cap k\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle.$$

Тогда из теоремы [151] следует, что $s = 0$.

Действительно, предположим, что

$$s(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in (f) \cap k\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle.$$

Тогда для алгебраически замкнутого тела A над алгебраическим замыканием k из того, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, следует

$$s(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0 \ (a_1, \ldots, a_n \in A).$$

Пусть $s \not\equiv 0$. Запишем $f = f_1 + f_0$, где $f_1 \in (x_n)$, $f_0 \in k\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$. Тогда $(sf)(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv 0$, следовательно, существуют $a_1, \ldots, a_n \in A$ такие, что $(sf)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Выражение $T_1(x) = f_1(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ зависит от x, поскольку $T_1(0) = 0$, а $T_1(a_n) \neq 0$. Значит, левая часть уравнения $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x) = 0$ зависит от x, поэтому, в силу алгебраической замкнутости, существует $b \in A$ такое, что $f(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) = 0$. Это значит, что $s(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$, но $(sf_1)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ – противоречие.

В работе [18] Л. А. Бокуть вернулся к вложениям в алгебраически замкнутые алгебры Ли и доказал новые теоремы в духе отмеченных в п. 8 работ [17] и [18].

6. Проблема равенства для алгебр Ли

Основная проблема, которая волновала А. И. Ширшова в его работе [80], была проблема равенства для конечно определенных алгебр Ли. Во введении он упоминает результат П. С. Новикова [53] о неразрешимости проблемы равенства для групп и пишет, что “к сожалению, проблему равенства для алгебр Ли решить не удалось”. Проблема равенства для алгебр Ли была решена Л. А. Бокутем в уже упоминавшейся работе [16] как следствие теоремы о вложении некоторых рекурсивно определенных алгебр Ли в конечно определенные алгебры Ли. Именно, в работе было доказано, что для любого рекурсивно перечислимого множества M натуральных чисел алгебра Ли типа

$$L_M = \mathrm{Lie}\langle a, b, s | [ab^n s] = 0, n \in M\rangle,$$

где $[ab^n s] = [[\dots[ab]\dots b]s]$, вложима в конечно определенную алгебру Ли. При этом использовалась теорема Матиясевича [45] о диофантовом представлении любого рекурсивно перечислимого множества M. В частности, поскольку проблема равенства в L_M неразрешима для нерекурсивного M ($n \in M \Leftrightarrow [ab^n s] = 0$ в L_M, это следует из леммы о композиции), она неразрешима и в соответствующей конечно определенной алгебре Ли.

Более простой пример конечно определенной алгебры Ли с неразрешимой проблемой равенства нашел Г. П. Кукин [38]. Пусть

$$\Phi = \langle X = \{x_1, \dots, x_n\} \mid A_i = B_i,\ 1 \le i \le k\rangle$$

– конечно определенная полугруппа с неразрешимой проблемой равенства, где слова A_i, B_i не пустые. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. Рассмотрим алгебру Ли

$$L_\Phi = \mathrm{Lie}\langle X \cup Y \cup \{a\} \mid [aA_i] = [aB_i]\ (1 \le i \le k),$$
$$[x_i y_j] = 0,\ [ax_i] = [ay_i]\ (1 \le i, j \le n)\rangle.$$

Тогда

$$A = B(\Phi) \Leftrightarrow [aA] = [aB](L_\Phi),$$

где A, B – слова в алфавите X. Следовательно, проблема равенства неразрешима в L_Φ.

В теории групп хорошо известна

Теорема Хигмана ([130]). *Любая рекурсивно определенная группа вложима в конечно определенную группу.*

В связи с этим результатом и доказанной в [16] теоремой о вложении, Л. А. Бокуть в той же работе поставил два вопроса:

1) Вложима ли произвольная рекурсивно определенная алгебра Ли (над "хорошим" полем, например Q или конечным) в конечно определенную алгебру Ли?

2) Тот же вопрос для ассоциативных алгебр.

Второй вопрос был решен В. Я. Беляевым [3] (учеником М. А. Тайцлина). Первый вопрос считался решенным почти 20 лет, пока в обзоре О. Г. Харлампович и М. В. Сапира [139] не была указана ошибка в соответствующей работе. Таким образом, первый вопрос остается открытой проблемой.

В дальнейшем О. Г. Харлампович [69] построила пример конечно определенной алгебры Ли с неразрешимой проблемой равенства, которая одновременно является разрешимой ($L^{(3)} = 0$).

7. Работа В. Н. Герасимова [22]

Ассоциативным алгебрам с одним определяющим соотношением посвящена работа участника семинара Бокутя В. Н. Герасимова [22].

Пусть $F = k\langle X\rangle$ – свободная ассоциативная алгебра над k, порожденная X, f – однородный многочлен из F. Через F_n, $n \geq 0$, будем обозначать пространство однородных степени n многочленов из F, $F_0 = k$. Следующая теорема имеет простую формулировку, но очень сложное доказательство.

Теорема Герасимова [22]. *Система подпространств* $\{F_n f F_m,\ n, m \geq 0\}$ *порождает дистрибутивную структуру подпространств* F *(относительно пересечения и суммы подпространств).*

Из этой теоремы более-менее просто выводятся два основных следствия.

Следствие 1 [22]. *Пусть* $g \in F$, f *– старшая однородная часть* g. *Предположим, что* f *не имеет общего собственного правого и левого множителя:*

$$f = f_1 f_2 = f_3 f_1 \Rightarrow f_1 \in k.$$

Тогда проблема равенства в алгебре $\mathrm{Ass}\langle X | g = 0\rangle$ *алгоритмически разрешима.*

К сожалению, этот результат не дает ничего нового для полугрупп. Для полугрупп с одним определяющим соотношением проблема равенства остается открытой. С. И. Адян [1] доказал, что проблема равенства разрешима для любой полугруппы с соотношением $A = 1$. Лучшим пока остается результат Адяна и Оганесяна [2] о разрешимости проблемы равенства для полугрупп с *несократимым* соотношением $A = B$, т.е. когда A и B не имеют общей начальной или конечной буквы.

Следствие 2 (теорема Бекелина [88]). *Ряд Гильберта $\sum d_n t^n$ ассоциативной алгебры A с одним однородным определяющим соотношением, где $d_n = \dim A_n$, A_n – n-я однородная часть A, рационален.*

Известно, что в общем случае ряд Гильберта не рационален (см. [65]). Это был ответ на проблему Говорова–Кострикина–Шафаревича.

8. Лемма о композизии и Diamond лемма

Лемма Ширшова о композиции [80], в явном виде [16], касалась алгебр Ли. Однако, эта же самая лемма верна и для ассоциативных алгебр, нужно только "снять" скобки во всех рассуждениях, т.е. существенно упростить все определения и доказательства. Это было известно самому А. И. Ширшову с самого начала. Например, в разговоре с Л. А. Бокутем во время Всесоюзного алгебраического коллоквиума, Киев, 1963, он отметил, что для ассоциативных алгебр все рассуждения его работы [80] остаются справедливыми. Тем не менее, лемма о композиции для ассоциативных алгебр была сформулирована только в 1976 году в работе Л. А. Бокутя [17]. Это было сделано в связи с необходимостью иметь дело со сложными определяющими соотношениями ассоциативных алгебр. Эти соотношения возникли при доказательстве теорем о вложении произвольных ассоциативных алгебр в простые ассоциативные алгебры, являющиеся суммами 3-х или 4-х произвольных (или достаточно общих, например, нильпотентных) алгебр. Доказанные в работе теоремы являются линейными аналогами теорем о вложении Ф. Холла [128] для групп.

В той же работе [17] имеется ссылка на препринт появившейся позднее работы Дж. Бергмана [93], где доказана Diamond лемма. В [17] отмечено, что лемма о композизии и Diamond лемма, по существу, равносильны, и отличаются только языком. Напомним, что Diamond лемма может быть сфомулирована коротко на языке переписывающих систем следующим образом (см. [166]): *Пусть S – множество унитарных многочленов. Тогда переписывающая система $R(S)$ (исключение старших слов многочленов S) удовлетворяет условию слияния (или конфлюэнтности, см. п. 9) тогда и только тогда, когда $R(S)$-терминальные (т.е. S-приведенные) сло-*

ва образуют линейный базис алгебры с определяющими соотношениями S.

Эта лемма была сформулирована и доказана для некоммутативных многочленов. На самом деле здесь S может быть множеством коммутативных, некоммутативных или лиевых многочленов.

Работа [93] имела счастливую научную судьбу. Она была опубликована "в нужное время, в нужном месте" и использовалась многократно. В каком-то смысле Diamond лемма "заслонила" собой лемму Ширшова о композиции (кстати, в работе [93] лемма Ширшова не упоминается, хотя ее современная формулировка имелась к тому времени в работе [16], которая цитируется в [93]).

Но Diamond лемма не может заменить алгоритм Бухбергера и базисы Грёбнера в коммутативном случае. Точно так же она не может заменить алгоритм Ширшова и базисы Грёбнера–Ширшова в остальных случаях.

Недавно в препринте [97] было предложено следствие из леммы о композиции (в усиленном варианте) называть одновременно *Леммой о композиции – Diamond леммой* (Composition-Diamond лемма, или CD-лемма, для краткости). Причем CD-лемма, как и лемма о композиции – теорема Бухбергера справедлива для любого из классов алгебр: коммутативных, ассоциативных, лиевых и конфомных (в несколько ослабленном виде, см. ниже). Итак, вот ее фомулировка (ср. с [166, 167]).

CD-лемма. *Пусть S – множество унитарных "многочленов" (коммутативных, некоммутативных, лиевых, конформных). Если S – базис Грёбнера–Ширшова, то S-приведенные базисные слова образуют линейный базис соответствующей алгебры с определяющими соотношениями S. Для "классических" (не конформных) многочленов верно и обратное.*

9. Переписывающие системы и базисы Грёбнера–Ширшова для групп

В работах Л. А. Бокутя [7–11, 13, 14, 19] построены эффективные переписывающие системы для групп. Дадим определения, следуя почти дословно автореферату [15]. Пусть $G = Gr\langle X|\Phi\rangle$ – некоторое копредставление группы. Пусть $S = ST[X \cup X^{-1}|\Psi]$ – некоторая односторонняя ассоциативная (полу-Туевская) система, где $\Psi = \{u_i \to v_i,\ i \in I\}$ – система односторонних преобразований. Таким образом, элементарные преобразования в S имеют вид $uu_iv \to uv_iv$, $i \in I$. Определим $u \to^* v$, если $u \to \cdots \to v$ в S. Слово u называется *каноническим* (*терминальным*) если ни одно преобразование из Ψ, кроме тождественного, не применимо к u. Система S называется *переписывающей системой* для G, если выполняются условия:

1) Если $u \to^* v$ в S, то $u = v$ в G.

2) Если $u = v$ в G, то существует слово w, такое, что $u \to^* w$, $v \to^* w$ в S (условие Черча–Россера, или слияния, или конфлюэнтности).

3) *Для* любого $u \in S$ существует каноническое слово $C(u)$, такое, что $u \to^* C(u)$ в S.

Из этих условии следует, что $u = v$ в G тогда и только тогда, когда $C(u) \equiv C(v)$ (графическое равенство слов).

Заметим, что в ряде случаев приходится ослаблять 2):

$2'$) Если $u = v$ в G, то существуют эквивалентные слова w_1 и w_2 (относительно некоторой эквивалентности $\equiv_\alpha$, такой, что $u \equiv_\alpha v \Rightarrow u = v$ в G), что $u \to^* w_1$, $v \to^* w_2$.

В этом случае $u = v$ в G тогда и только тогда, когда $C(u) \equiv_\alpha C(v)$.

В работах Л. А. Бокутя введено понятие группы со стандартным базисом, для которой существует "стандартная" переписывающая система со свойствами 1–3 (здесь слово "базис" имеет смысл, близкий к "линейному базису" в групповой алгебре). Кроме того, для групп частных мультипликативных полугрупп некоторых колец определены группы с относительным стандартным базисом, для которых существует стандартная переписывающая система с условиями 1, $2'$), 3). Получены следующие результаты:

а) Группы Буна $G(T,q)$ [106] обладают относительно рекурсивными переписывающими системами, относительно специальной проблемы равенства для исходной полугруппы T. С помощью этого нетрудно доказывается, что проблема равенства в $G(T,q)$ может иметь любую тьюринговую степень неразрешимости (трудности) [7, 8]. Ранее этот результат другими методами был получен А. А. Фридманом [67, 68], К. Р. Л. Кляфамом [114], У. Буном [107].

б) Группы Новикова $\mathfrak{A}_{p_1,p_2}$ [54] имеют рекурсивные переписывающие системы [9].

Отсюда следует, что проблема равенства в этих группах разрешима (А. А. Фридман [66]).

в) С использованием б), доказано, что проблема сопряженности для групп Новикова $\mathfrak{A}_{p_1,p_2}$ может иметь произвольную тьюрингову степень сложности [12]. Независимо существование конечно определенных групп с этим свойством было доказано Д. Коллинзом [115].

г) Пусть

$$Q_4 = Smg\langle\{a_i, b_i, s_i, s_i, t_i(1 \le i \le 4), v_o, v_1\}|a_i s_i = s_i v_0,$$

$$b_i s_{i+1} = s_i v_1, b_i t_{i+1} = a_i t_i (1 \le i \le 4), t_5 = t_1, s_5 = s_1\rangle$$

– конечно определенная полугруппа. Пусть $GF(2)$ – поле из двух элементов, $GF(2)(Q_4)$ – полугрупповая алгебра, $\overline{GF(2)(Q_4)}$ – ее замыкание до алгебры формальных рядов (это область целостности), $S = \overline{GF(2)(Q_4)}^*$ – мультипликативная полугруппа ненулевых элементов, $G = G(S)$ – группа частных (т.е. группа с теми же образующими и определяющими соотношениями, что и полугруппа S).

Теорема ([10, 13, 14, 19]. *Группа G обладает относительно стандартной переписывающей системой с условиями 1, 2', 3. Здесь $u \equiv_\alpha v$ означает, что из u можно перейти в v с помощью преобразований*

$$(1 + pA)p \leftrightarrow p(1 + Ap), \quad (1 + Ap)p^{-1} \leftrightarrow p^{-1}(1 + pA),$$

где p – необратимый ряд из $\overline{GF(2)(Q_4)}$, A – произвольный ряд. Далее, если u – положительное слово группы G (т.е. слово в S), то $C(U)$ получается из u с помощью полугрупповых преобразований в S. В частности, полугруппа S вложима в группу G.

Следствие. *Полугрупповая алгебра $GF(2)(Q(4))$ обладает следующими свойствами:*

- *ее мультипликативная полугруппа вложима в группу,*
- *сама алгебра не вложима в тело (так как в обертывающем теле $(v_0^{-1}v_1)^4 = 1$, т.е. $v_0 = v_1$, что невозможно).*

Эта проблема возникла у А. И. Мальцева еще до войны (ср. [44], стр. 4) в связи с его примером кольца без делителей нуля, не вложимого в тело (решение проблемы Ван-дер-Вардена [152]).

Другие примеры, решавшие проблему Мальцева были построены одновременно (анонсировано на Московском математическом конгрессе, 1966) А. А. Кляйном [104] и А. Баутелом [109]. Последние примеры не являются полугрупповыми. Алгебра $GF(2)(Q_4)$ остается до сих пор единственным примером полугрупповой алгебры со свойствами Мальцева.

Недавно в дипломной работе Д. Пуга [57] было показано, что переписывающая система для группы Буна [7, 8], точнее, соотношения этой системы, является ничем иным, как базисом Грёбнера–Ширшова этой группы (т.е. ее групповой алгебры). Это дает основание предположить, что и во всех остальных случаях в цитированных работах Л. А. Бокутя для групп построены базисы Грёбнера–Ширшова этих групп.

Переписывающими системами для квазигрупп занимались Т. Эванс [118, 119], М. М. Глухов [23–25], Л. В. Шабунин [71–73] (см. также [74]).

10. Лемма о композизии, Диамонд лемма, некоммутативные базисы Грёбнера, стандартные базисы в 1978–2000 годах

Мы не ставим своей целью сколько-нибудь полно охватить все исследования после 1978 года. Отметим лишь некоторые.

В. Н. Уфнаровский начал использовать технику леммы Ширшова о композиции во время учебы в аспирантуре МГУ под руководством А. И. Кострикина. Он применял эту технику для изучения роста ассоциативных алгебр, классификации ассоциативных алгебр с двумя квадратичными соотношениями, для решения проблемы Говорова–Кострикина–Шафаревича ([58–64]). Им был написан обзор, который широко известен среди специалистов [65].

Д. Аник (D. Anick) изучал с использованием Diamond леммы ряды Гильберта, гомологии, глобальную размерность ассоциативных алгебр, ввел комплекс, который получил название комплекса Аника и изучается до сих пор ([83–86]).

В. Н. Латышев рассматривал стандартные базисы в универсальных обертывающих алгебрах, написал первое на русском языке систематическое изложение стандартных базисов, изучал свойства алгебр с конечными стандартными базисами [41, 42, 122, 144, 145] (см. также [91]).

Т. Мора независимо пришел к идее некоммутативных базисов Грёбнера и изучал их свойства ([125, 158–160]).

А. А. Михалев доказал лемму о композиции для цветных (супер) алгебр Ли и p-алгебр Ли, их универсальных обертывающих ([46–49], [52, 87, 153, 155, 156, 173]), а также использовал ее для получения результатов о стандартных базисах идеалов суперкоммутативных многочленов [157]. В работе [51] техника композиций в свободной неассоциативной алгебре используется для построения линейного базиса свободной левосимметричной супералгебры.

Д. Айзенбад, И. Пеева и Б. Штурмфельс [117], провели исследование коммутативных базисов Грёбнера с точки зрения некоммутативных базисов Грёбнера. В работе [147] техника базисов Грёбнера применена для изучения триангуляций специального типа графов. Также там отмечены возможности применения этой техники в комбинаторной оптимизации и некоторых других вопросах теории графов.

В книге Н. Коблица [141] изложена криптологическая схема типа PKC (Public Key Cryptosystem), основанная на базисах Грёбнера. Идея заключается в том, что держится в секрете некоторый базис Грёбнера S из $k[X]$ и публикуется множество S-приведенных слов M (или его часть, если M бесконечно или очень большое). Это M считается множеством сообщений. Предположим, что Боб хочет послать Алисе сообщение $m \in M$ по открытому каналу. Он смотрит ее *открытый ключ* – множество полиномов $A = \{q_1, \ldots, q_s\}$ из идеала, порожденного S, и кодирует m случайным образом в виде $s = m + \sum t_i q_i$. Алиса, получая s и зная S, легко восстанавливарет m с помощью алгоритма ИСС многочленов S. Третья сторона (Катерина) не знает S и ей трудно восстановить m (трудность для Катерины заключается в вычислении базиса Грёбнера идеала, порожденного множеством A).

Е. С. Голод связал идею базисов Грёбнера и некоммутативных базисов Грёбнера с гомологиями комплексов Козюля и Шафаревича соответственно. Этим найдена глубокая связь базисов с гомологической алгеброй и гомологической теорией коммутативных и некоммутативных алгебр ([26–29, 124]).

11. Базисы Грёбнера–Ширшова в последние годы (1996–2000)

В это время появилось несколько работ, в которых используется термин “базис Грёбнера–Ширшова”.

В работах [101–103] найдены базисы Грёбнера–Ширшова простых алгебр Ли типа A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

В работе [104] найдены базисы Грёбнера–Ширшова квантовых универсальных обертывающих типа A_n.

В работе [105] доказано, что множество лиевых многочленов S является базисом Грёбнера–Ширшова в лиевом смысле, если и только если S есть базис Грёбнера–Ширшова в ассоциативном смысле.

В работе [99] найдены базисы Грёбнера–Ширшова простых конечномерных супералгебр Ли и доказано предыдущее утверждение [105] для супералгебр Ли.

В работах [136–138] доказана лемма о композиции для модулей над ассоциативными алгебрами и построена теория базисов Грёбнера–Ширшова таких модулей. Найдены базисы Грёбнера–Ширшова неприводимых представлений простых алгебр Ли типа A_n.

В работах [123], [173] выписаны программы для вычисления базисов Грёбнера–Ширшова лиевых и ассоциативных алгебр соответственно.

В работах Е. Н. Порошенко [54, 55, 162] найдены базисы Грёбнера–Ширшова аффинных алгебр Каца–Муди типов $A_n^{(1)}$ и $B_n^{(1)}$.

12. Конформные алгебры

12.1. Определения

Понятие конформных алгебр произошло из теории вертексных алгебр, которая, в свою очередь, возникла в середине 80-х годов из математической физики (релятивистской квантовой теории поля и теории струн). Впервые понятие вертексной алгебры появилось (неформально) в работе [90], формальное определение было дано Борчердсом в [108].

Формальное определение конформной алгебры было дано В. Кацем [134].

Определение.

Конформной алгеброй называется система $(C; (\underline{\mathbf{n}}), n \in Z_+; D)$, где C – векторное пространство над полем K характеристики ноль, $(\underline{\mathbf{n}})$, $n \in Z_+ = \{0, 1, \ldots\}$, – счетный набор билинейных операций, D – линейный оператор над C, если выполняются следующие аксиомы:

(C1) для любых x, $y \in C$ существует $N \in Z_+ : x(\underline{\mathbf{n}})y = 0$ при $n \geqslant N$;

(C2) $D(x(\underline{\mathbf{n}})y) = Dx(\underline{\mathbf{n}})y + x(\underline{\mathbf{n}})Dy$;

(C3) $Dx(\underline{\mathbf{n}})y = -nx(\underline{\mathbf{n-1}})y$.

Аксиома (C1) называется свойством *локальности*, определяется функция локальности $N : C \times C \to Z_+$, $N(x, y)$ – это такое число, что $x(\underline{\mathbf{n}})y = 0$ при $n \geqslant N(x, y)$, $x(\underline{\mathbf{n}})y \neq 0$ при $n = N(x, y) - 1$.

Операцию D ввиду (C2) называют *дифференцированием*.

Гомоморфизмы конформных алгебр – линейные отображения, сохраняющие операции D и $(\underline{\mathbf{n}})$ для всех $n \in Z_+$.

Идеалом конформной алгебры называется подпространство $I \subseteq C$ такое, что $DI \subseteq I$, $C(\underline{\mathbf{n}})I \subseteq I$, $I(\underline{\mathbf{n}})C \subseteq I$ для любых $n \in Z_+$.

Например, пусть A – некоторая "классическая" алгебра над полем K (не обязательно ассоциативная) и $A[[z, z^{-1}]]$ – пространство формальных степенных рядов над A от переменной z. На этом пространстве можно указать следующие операции (круговые произведения):

$$x, y \in A[[z, z^{-1}]], \quad (x(\underline{\mathbf{n}})y)(z) = \mathrm{Res}_{w=0} x(w)y(z)(z-w)^n.$$

Если

$$x(w) = \sum_{m \in Z} x_m w^{-m-1}, \quad y(z) = \sum_{m \in Z} y_m z^{-m-1},$$

то

$$(x(\underline{\mathbf{n}})y)_m = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} x_{n-t} y_{m+t}.$$

Будем также обозначать через ∂_z обычное дифференцирование по переменной z.

Пара рядов (x, y) называется локальной степени $N \in Z_+$, если

$$x(w)y(z)(z-w)^N = 0.$$

Минимальное такое N обозначается через $N(x, y)$. Если пары (x, y) и (y, x) локальны, то ряды x и y называются взаимно локальными.

Если $S \subset A[[z, z^{-1}]]$ – подмножество, состоящее из попарно взаимно локальных рядов, замкнутое относительно $(\underline{\mathbf{n}})$ $(n \in Z_+)$ и ∂_z, то $(S; (\underline{\mathbf{n}}), n \in Z_+; \partial_z)$ – конформная алгебра.

Если A – ассоциативная алгебра или алгебра Ли, то всякое семейство попарно взаимно локальных рядов порождает в $A[[z, z^{-1}]]$ конформную алгебру. Это следует из следующего утверждения (см., например, [134]).

Лемма Донга. *Пусть A – ассоциативная или лиева алгебра, $x, y, z \in A[[z, z^{-1}]]$ попарно взаимно локальны. Тогда для любого $n \in Z_+$ ряды $x(\underline{\mathbf{n}})y$, z взаимно локальны. Причем в случае алгебры Ли*

$$N(x(\underline{\mathbf{n}})y, z) = N(z, x(\underline{\mathbf{n}})y) \leqslant$$
$$\leqslant N(x, y) + N(y, z) + N(z, x) - n - 1,$$

а в случае ассоциативной алгебры

$$N(x(\underline{\mathbf{n}})y, z) \leqslant N(y, z),$$
$$N(z, x(\underline{\mathbf{n}})y) \leqslant N(z, x) + N(x, y) - n - 1.$$

На самом деле, как показал Борчердс, для всякой конформной алгебры C можно построить такую алгебру A, что $C \simeq S \subset A[[z, z^{-1}]]$. Причем среди таких алгебр существует единственная с точностью до изоморфного вложения универсальная алгебра, называемая алгеброй коэффициентов данной конформной алгебры (см., например, [166]).

Алгебры коэффициентов служат важным инструментом исследования конформных алгебр. В частности, принадлежность конформной алгебры C тому или иному конформному многообразию можно определить в соответствии с принадлежностью $\mathrm{Coeff}\, C$ “классическому” многообразию ([133]).

Конформная алгебра C называется ассоциативной (лиевой), если ее алгебра коэффициентов $\mathrm{Coeff}\, C$ ассоциативна (лиева).

Ассоциативность алгебры коэффициентов эквивалентна следующим конформным равенствам [133]:

$$(x(\underline{\mathbf{n}})y)(\underline{\mathbf{m}})z = \sum_{t \geqslant 0} (-1)^t \binom{n}{t} x(\underline{\mathbf{n-t}})(y(\underline{\mathbf{m+t}})z),$$

$$x, y, z \in C, \quad n, m \in Z_+.$$

Аналогично, ассоциативная конформная алгебра C называется коммутативной, если Coeff C коммутативна. Это эквивалентно тому, что для любых x, $y \in C$

$$x \boxed{n}\, y \stackrel{\text{def}}{=} x(\underline{\mathbf{n}})y - \sum_{s\geqslant 0}(-1)^{n+s}D^{(s)}(y(\underline{\mathbf{n+s}})x) = 0.$$

Здесь и далее обозначения типа $D^{(s)}$, $x^{(s)}$ обозначают $D^{(s)}/s!$, $x^s/s!$.

Аксиома антикоммутативности имеет вид

$$x(\underline{\mathbf{n}})y + \sum_{s\geqslant 0}(-1)^{n+s}D^{(s)}(y(\underline{\mathbf{n+s}})x) = 0,$$

а тождество Якоби –

$$(x(\underline{\mathbf{n}})y)(\underline{\mathbf{m}})z =$$

$$= \sum_{s\geqslant 0}(-1)^s\binom{n}{s}(x(\underline{\mathbf{n-s}})(y(\underline{\mathbf{m+s}})z) - y(\underline{\mathbf{m+s}})(x(\underline{\mathbf{n-s}})z)).$$

Антикоммутативная конформная алгебра с тождествами Якоби называется конформной алгеброй Ли.

Часто бывает удобно пользоваться следующей формальной интерпретацией конформных операций [82]. Определим билинейное отображение

$$(\cdot_\lambda\cdot) : C \times C \to K[D,\lambda] \otimes_{K[D]} C,$$

где λ – формальная коммутирующая переменная, по следующему правилу:

$$(x_\lambda y) = \sum_{n=0}^{N(x,y)-1} \lambda^{(n)}(x(\underline{\mathbf{n}})y).$$

В терминах этих λ-*умножений* аксиомы конформной алгебры (C1)–(C3) имеют вид [134]

(C1′) $(x_\lambda y) \in K[D,\lambda] \otimes_{K[D]} C$;

(C2′) $D(x_\lambda y) = (Dx_\lambda y) + (x_\lambda Dy)$;

(C3′) $(Dx_\lambda y) = -\lambda(x_\lambda y)$

для любых $x,\ y \in C$.

Условие ассоциативности примет следующую форму:

$$x_\lambda(y_\mu z) = (x_\lambda y)_{\lambda+\mu} z,$$

аксиома коммутативности –

$$[x_\lambda y] \stackrel{\text{def}}{=} x_\lambda y - y_{-D-\lambda} x = 0$$

для любых $x,\ y,\ z \in C$.

Тождество Якоби примет вид

$$(x_\lambda(y_\mu z)) = ((x_\lambda y)_{\lambda+\mu} z) + (y_\mu(x_\lambda z)),$$

а условие антикоммутативности –

$$x_\lambda y + y_{-D-\lambda} x = 0.$$

В терминах формальных рядов λ-умножение интерпретируется как преобразование Фурье произведения двух формальных рядов:

$$(x_\lambda y)(z) = \mathrm{Res}_{w=0} e^{\lambda(z-w)} x(z) y(w).$$

В классической теории в качестве алгебры A выступает алгебра Ли $gl(V)$ операторов над некоторым векторным пространством V.

Вертексной алгеброй называется подпространство $S \subset gl(V)[[z, z^{-1}]]$ с линейным отображением $D = \partial_z$, выделенным рядом $\mathbb{1} = \mathrm{id}_V z^0 \in S$, замкнутое относительно операций $(\underline{\mathbf{n}})$, определенных уже для всех $n \in Z$ по формуле

$$(x(\underline{\mathbf{n}})y)_m = \sum_{s\leqslant n} (-1)^{s+n} \binom{n}{n-s} x_s y_{m+n-s} - \sum_{s\geqslant 0} (-1)^{s+n} \binom{n}{s} y_{m+n-s} x_s,$$

если любые два ряда из S взаимно локальны. Замкнутость относительно D здесь получается автоматически из соотношения $x(\underline{-\mathbf{2}})\mathbb{1} = Dx$.

12.2. Свободные конформные и вертексные алгебры.

Классические примеры конформных алгебр – алгебры петель (loop algebras), алгебра Вирасоро и алгебра Вейля – рассматривались в ряде работ ([82, 133]), они играют важную роль в структурной теории конформных алгебр конечного типа.

В работе Борчердса [108] было отмечено существование свободных вертексных алгебр (см. также [166]). Это послужило толчком для М. Ройтмана [166] рассматривать свободные конформные алгебры. Их существование не следует из общих теорем универсальной алгебры, так как эти классы не образуют многообразия (аксиома локальности не является тождеством). В работах [166, 167] доказано существование свободных лиевых (ассоциативных, ассоциативно-коммутативных) конформных алгебр и найдены базисы соответствующих алгебр коэффициентов. Так, алгебра коэффициентов свободной конформной алгебры Ли $\mathrm{Lie}\, C(B,N)$ представляет собой алгебру Ли

$$F_N(B) = \mathrm{Lie}\langle \{a_n, a \in B, n \in Z\} \mid R\rangle,$$

где R – следующая система соотношений:

$$[b_n a_m] = \sum_{s=1}^{N} (-1)^s \binom{N}{s} [b_{n-s} a_{m+s}]$$

при $n-m > N$ или $n-m = N$ и $b > a$; а при $n-m=N$, $b=a$, N – нечетном:

$$[a_{m+N} a_m] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{(N-1)/2} (-1)^s \binom{N}{s} [b_{m-s} a_{m+s}].$$

Порождающие упорядочены следующим образом:

$$a_n > b_m \Leftrightarrow n > m \quad \text{или} \quad n = m, a > b.$$

Как показано в этой работе, система определяющих соотношений R замкнута относительно композиции (является базисом Грёбнера–Ширшова). Поэтому из CD-леммы следует, что базисом алгебры $F_N(B)$ являются слова Линдона–Ширшова от порождающих, ассоциативные носители которых не содержат подслов

$$b_n a_m, \ n-m > N \quad \text{или} \quad n-m = N, b > a; \qquad a_{m+N} a_m, \ N \ \text{ нечетное.}$$

Базис алгебры коэффициентов свободной ассоциативной конформной алгебры $\mathrm{Ass}\, C(B,N) = C(B,N)$, найденный в [166], позволяет найти базу собственно свободной ассоциативной конформной алгебры. Это также было сделано независимо от результатов Ройтмана в работе [98]. Именно, *нормальные* конформные слова

$$a_1 (\underline{\mathbf{n_1}})(a_2 (\underline{\mathbf{n_2}}) \ldots (\underline{\mathbf{n_{k-1}}})(a_k (\underline{\mathbf{n_k}}) D^s a_{k+1}) \ldots), \qquad (*)$$

$$a_i \in B,\ 0 \leqslant n_i < N(a_i, a_{i+1}),\ s \geqslant 0,$$

образуют базис свободной ассоциативной конформной алгебры.

К сожалению, пока неизвестно аналогичное представление для базиса свободной лиевой или ассоциативно-коммутативной конформной алгебры. В последнем направлении имеются работы [167], в которой найден базис алгебры коэффициентов свободной ассоциативно-коммутативной конформной алгебры, и [35], в которой найден базис пространства D-свободных многочленов этой алгебры (см. ниже).

12.3. Лемма о композиции.

Лемма Ширшова о композиции (Composition-Diamond лемма) получила свое продолжение для ассоциативных конформных алгебр $C(B,N)$ с постоянной функцией локальности N в работе [97]. Специфика конформных алгебр приводит к появлению новых типов композиций, не имеющих аналога в теории обычных алгебр.

Обозначим через T формальную конформную полугруппу с нулем, состоящую из "ассоциативных" (т.е. без скобок) нормальных слов $u = a_1(\underline{\mathbf{n_1}})\dots(\underline{\mathbf{n_{k-1}}})a_k(\underline{\mathbf{n_k}})D^s a_{k+1}$, где $a_i \in B$, $n_i < N$, $s \geqslant 0$, $k+1 = |u|$ (длина u). Произведение $u(\underline{\mathbf{n}})v$ слов T индуцируется правилами:

$$D^i a(\underline{\mathbf{n}})b = a(\underline{\mathbf{n-i}})b, \quad a(\underline{\mathbf{n}})b = 0, \quad \text{если} \quad n < 0,$$

$$a(\underline{\mathbf{n}})D^i b = 0, \quad \text{если} \quad n \geqslant N \quad \text{для всех} \quad a, b \in B.$$

Мономы u сравниваются сначала по длине, а затем лексикографически как последовательности $(a_1, n_1, \dots, a_k, n_k, n_{k+1}, s)$ в соответствии с заданным линейным порядком на B.

Как отмечалось, конформные мономы $[u]$, где $[\cdot]$ означает правонормированную расстановку скобок, составляют базис свободной ассоциативной конформной алгебры $C(B,N)$.

Для $f \in C(B,N)$ обозначим через $\overline{f}$ старшее ассоциативное слово f, т.е.

$$f = \alpha[\overline{f}] + \sum \alpha_i [u_i],$$

где $\alpha \neq 0$, $\overline{f}, u_i \in T$, $u_i < \overline{f}$. Многочлен f называется унитарным, если $\alpha = 1$.

Пусть f, g – унитарные многочлены из $C(B,N)$.

Определение. 1) *Если* g – D*-свободный полином и* $w = \overline{f} = u(\underline{\mathbf{n}})\overline{g}(\underline{\mathbf{m}})v$ *для некоторых* $u, v \in T$, *и* D*-свободно, тогда конформный полином*

$$(f,g)_w = f - [u(\underline{\mathbf{n}})g(\underline{\mathbf{m}})v],$$

где $[\cdot]$ *означает (как и выше) правонормированную расстановку скобок, называется композицией включения.*

2) *Если* $w = \overline{f} = u(\underline{\mathbf{n}})\overline{g}D^i$ *для некоторого* $u \in T$, *и* D*-свободно, то*

$$(f,g)_w = f - [u(\underline{\mathbf{n}})D^i g],$$

называется композицией правого включения.

Преобразование

$$f \mapsto (f,g)_w,$$

где $(f,g)_w$ – *композиция (правого) включения, называется исключением старшего слова (ИСС)* g *в* f.

3) *Если* f – D*-свободно и* $w = \overline{f}(\underline{\mathbf{m}})v = u(\underline{\mathbf{n}})\overline{g}$ *для некоторых* $u, v \in T$, u – D*-свободно, и* $|\overline{f}| + |\overline{g}| > |w|$, *то конформный полином*

$$(f,g)_w = [f(\underline{\mathbf{m}})v] - [u(\underline{\mathbf{n}})g],$$

называется композицией пересечения.

4) *Если* $w = \overline{f}D^i = u(\underline{\mathbf{n}})\overline{g}$ *для некоторого* $u \in T$, u – D*-свободно, тогда*

$$(f,g)_w = D^i f - [u(\underline{\mathbf{n}})g],$$

– *композиция правого пересечения.*

5) *Если* $a \in B$ *и* $n \geq N$, *то* $a(\underline{\mathbf{n}})f$ *называется композицией левого умножения.*

6) *Если* f *не* D*-свободно,* $a \in B$ *и* $n \geq 0$, *то* $f(\underline{\mathbf{n}})a$ – *композиция правого умножения.*

Композиции типов 1–4 имеют аналоги в теории обычных алгебр, и для них показано [96], что $\overline{(f,g)_w} < w$; композиции типов 5, 6 обусловливают конформную специфику.

Пусть S – множество унитарных многочленов в $C(B,N)$. Композиция $(f,g)_w$ (типа 1–4) называется *тривиальной по модулю* S ($(f,g)_w \equiv 0 \bmod S)$), если

$$(f,g)_w = \sum_{i\in I} \alpha_i [u_i(\underline{\mathbf{n_i}})s_i(\underline{\mathbf{m_i}})v_i] + \sum_{j\in J} \alpha_j [u_j(\underline{\mathbf{n_j}})D^{l_j}s_j], \qquad (**)$$

где

$$I \cap J = \emptyset, \quad s_i, s_j \in S, \quad [u_i(\underline{\mathbf{n_i}})s_i(\underline{\mathbf{m_i}})v_i]$$

и $[u_j(\underline{\mathbf{n_j}})D^{l_j}s_j]$ – нормальные S-слова (т.е. $s_i, s_j \in S$, s_i $(i \in I)$ являются D-свободными, $u_i, v_i, u_j \in T$, u_i, u_j D-свободны, $0 \leq n_i, m_i, n_j < N$) и

$$u_i(\underline{\mathbf{n_i}})\overline{s}_i(\underline{\mathbf{m_i}})v_i < w, \quad u_j(\underline{\mathbf{n_j}})\overline{s}_j D^{l_j} < w$$

для всех $i \in I$, $j \in J$. Также, если f и g D-свободны, то J пусто.

Далее, композиции последних двух типов $h = a(\underline{\mathbf{n}})f$ или $g(\underline{\mathbf{m}})a$, где $a \in B$, $n \geq N$ и $m \geq 0$, называется *тривиальной по модулю* S ($h \equiv 0 \operatorname{mod} S$), если h может быть представлено в виде (**) с

$$|u_i(\underline{\mathbf{n_i}})\overline{s}_i(\underline{\mathbf{m_i}})v_i| \leq |\overline{h}|, \quad |u_j(\underline{\mathbf{n_j}})\overline{s}_j D^{l_j}| \leq |\overline{h}|$$

при $i, j \in J$. Множество J пусто, если $h = g(\underline{\mathbf{m}})a$ или $h = a(\underline{\mathbf{n}})f$ при D-свободном f.

Множество S называется базисом Грёбнера–Ширшова, если любая композиция элементов из S тривиальна по модулю S.

Теорема (CD-лемма). *Пусть S – базис Грёбнера–Ширшова в свободной ассоциативной конформной алгебре $C(B, N)$. Тогда S-приведенные слова образуют базис конформной алгебры $C(B, N|S)$ с определяющими соотношениями S. Нормальное слово $[u]$ называется S-приведенным, если $u \neq v(\underline{\mathbf{n}})\overline{s}(\underline{\mathbf{m}})w$, $s \in S$, s не содержит D и $s \neq v(\underline{\mathbf{n}})\overline{s}D^i$, $s \in S$. Здесь u, v, w – нормальные ассоциативные слова, $\overline{s}D^i$ означает, что D^i применено к последней букве $\overline{s}$.*

Приведем примеры базисов Грёбнера–Ширшова ассоциативных конформных алгебр.

Пример 1. $C_1 = C(a, N = 3|[a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{1}})a] = 0)$. В работе [96] показано, что базис Грёбнера–Ширшова алгебры C_1 имеет вид

$$f = [a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{1}})a] = 0,$$

$$g = [a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{2}})a] = 0,$$

$$h_n = [a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{0}})(a(\underline{\mathbf{1}})^n a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{2}})a]+$$

$$+2[(a(\underline{\mathbf{1}})^{n+2}a(\underline{\mathbf{2}})a(\underline{\mathbf{2}})a] = 0, \quad n \geq 0,$$

где $(a(\underline{\mathbf{k}})^n$ означает n-кратное повторение соответствующего фрагмента (в полугруппе T). Здесь $g = a(\underline{\mathbf{3}})f$ (композиция левого умножения), $h_n = (\ldots(f,f)_{w_0}\ldots f)_{w_{n+1}}$ (композиции пересечения). Отметим, что поскольку определяющие соотношения C_1 D-свободны, при построении базиса Грёбнера–Ширшова нам не нужны композиции правого пересечения и правого умножения (как и правого включения).

Пример 2. $C_2 = C(a, N = 2 | a(\underline{\mathbf{1}})Da - a(\underline{\mathbf{1}})a = 0)$. Базис Грёбнера–Ширшова этой алгебры состоит из соотношений

$$a(\underline{\mathbf{1}})Da = a(\underline{\mathbf{1}})a, \quad [a(\underline{\mathbf{0}})a(\underline{\mathbf{1}})a] = 0, \quad [a(\underline{\mathbf{0}})a(\underline{\mathbf{0}})a] = 0,$$

$$[a(\underline{\mathbf{1}})a(\underline{\mathbf{0}})a] = 0, \quad [a(\underline{\mathbf{1}})a(\underline{\mathbf{1}})a] = 0.$$

В соответствии с леммой о композиции, линейный базис алгебры C_2 состоит из слов

$$D^i a, \quad a(\underline{\mathbf{1}})a, \quad a(\underline{\mathbf{0}})D^i a$$

при $i \geq 1$.

12.4. Универсальные обертывающие конформные алгебры.

Здесь мы рассмотрим связь между ассоциативными и лиевыми конформными алгебрами, подобную связи между присоединенными алгебрами Ли обычных ассоциативных алгебр и универсальными обертывающими.

Пусть A – ассоциативная конформная алгебра с λ-операцией $(x_\lambda y)$. Подобно тому, как обычная ассоциативная алгебра с операцией $[x, y] = xy - yx$ становится алгеброй Ли, так и алгебра A с операцией

$$[x_\lambda y] = (x_\lambda y) - (y_{-D-\lambda} x)$$

превращается в конформную алгебру Ли $A^{(-)}$, см. [82].

М. Ройтман [168] показал, что не для всякой конформной алгебры Ли L найдется ассоциативная конформная алгебра A такая, что L вкладывается в $A^{(-)}$. Иными словами, не все конформные алгебры Ли *специальны*. Именно, в [168] показано, что свободная конформная алгебра Ли не специальна.

Тем не менее, для всякой конформной алгебры Ли можно определить универсальную обертывающую ассоциативную конформную алгебру с заранее заданной локальностью порождающих [169, 97].

Пусть L – конформная алгебра Ли, являющаяся свободным $k[D]$-модулем с базой $B = \{a_i \mid i \in I\}$ и ограниченной локальностью $N(a_i, a_j) \leq N$, $i, j \in I$. Пусть таблица умножения алгебры L в базисе B имеет вид

$$a_i \boxed{n}\, a_j = \sum \alpha_{ij}^k a_k, \quad \alpha_{ij}^k \in k[D],$$
$$i \geq j, \quad i, j \in I, \quad n < N.$$

Тогда универсальная обертывающая конформная алгебра $U_N(L)$ по отношению к порождающим B и функции локальности N есть следующая ассоциативная конформная алгебра:

$$U_N(L) = C\Big(B, N | a_i(\underline{\mathbf{n}})a_j - \{a_j(\underline{\mathbf{n}})a_i\} - a_i \boxed{n}\, a_j = 0,$$
$$i \geq j, \quad i, j \in I, \quad n < N\Big).$$

Здесь $\{a_j(\underline{\mathbf{n}})a_i\}$ – правая часть конформного тождества коммутативности.

Существует естественный лиев гомоморфизм конформных алгебр $\delta : L \to U(L)^{(-)}$, определенный через $a_i \mapsto a_i$ для всех $a_i \in B$. Гомоморфизм δ имеет следующее универсальное свойство. Пусть $\varepsilon : L \to A^{(-)}$ – лиев конформный гомоморфизм алгебры L в ассоциативную конформную алгебру A (т.е. $\varepsilon(Da^i) = D\varepsilon(a_i)$, $\varepsilon(a_i \boxed{n}\, a_j) = \varepsilon(a_i) \boxed{n}\, \varepsilon(a_j)$, $\varepsilon(a_i)(\underline{\mathbf{m}})\varepsilon(a_j) = 0$, для всех $a_i, a_j \in B$, $m \geq N$). Тогда существует единственный гомоморфизм ассоциативных конформных алгебр $\varphi : U(L) \to A$ такой, что $\varphi\delta = \varepsilon$.

Имеет место следующий результат.

Теорема (1/2-PBW теорема для конформных алгебр Ли) ([97, 70]). *Пусть*

$$L = \langle \{a_i\}_{i\in I}, N | a_i \boxed{n}\, a_j = \sum \alpha_{ij}^k a_k,\ i \geq j,\ i, j \in I,\ n < N \rangle$$

– конформная алгебра Ли с базисом $\{a_i\}_{i\in I}$ над $k[D]$ и с локальностью N. Пусть

$$U_N(L) = C(\{a_i\}_{i\in I}, N | s_{ij}^n = a_i(\underline{\mathbf{n}})a_j - \{a_j(\underline{\mathbf{n}})a_i\} - a_i \boxed{n}\, a_j = 0,$$
$$i \geq j,\ i, j \in I,\ n < N).$$

– универсальная обертывающая конформная алгебра для L. Обозначим $S = \{s_{ij}^n \mid i, j \in I,\ 0 \leq n < N\}$. Тогда всякий полином

$$s_{ij}^n(\underline{\mathbf{m}})a_k - a_i(\underline{\mathbf{n}})s_{jk}^m,$$

где $i > j > k$, $n < N$, $m < N$, *тривиален по модулю* S.

Приведем примеры универсальных обертывающих некоторых важных конформных алгебр Ли.

Пример 1. Для алгебры Вирасоро

$$\mathrm{Vir} = \mathrm{Lie}\, C(v;\ N = 2 | v \boxed{0}\, v = Dv,\ v \boxed{1}\, v = 2v)$$

базис Грёбнера–Ширшова универсальной обертывающей $U_2(\mathrm{Vir})$ состоит из одного соотношения: $S = \{v(\underline{\mathbf{1}})v - v\}$. Очевидно, что единственная композиция пересечения многочлена $f = v(\underline{\mathbf{1}})v - v$ с самим собой тривиальна. По лемме о композиции, базис $U_2(\mathrm{Vir})$ составляют слова

$$[u] = [v(\underline{\mathbf{0}}) \dots v(\underline{\mathbf{0}}) D^i v], \quad i \geq 0.$$

Пример 2. Пусть g – "классическая" алгебра Ли. Конформная алгебра петель (токов) над этой алгеброй есть

$$L(g) = \mathrm{Lie}\, C(\{a_i\}_{i \in I}, N = 1 | a_i \boxed{0}\, a_j = [a_i a_j],\ i > j,\ i, j \in I).$$

Базис Грёбнера–Ширшова универсальной обертывающей $U_1(L(g))$ состоит из тех же самых порождающих соотношений, записанных в терминах ассоциативного конформного умножения (используем, что $N(a_i, a_j) = 1$ и в ассоциативном смысле):

$$S = \{a_i(\underline{\mathbf{0}})a_j - a_j(\underline{\mathbf{0}})a_i = [a_i a_j]\}.$$

Слова, приведенные относительно этой системы соотношений, имеют вид

$$[a_{i_1}(\underline{\mathbf{0}})a_{i_2} \dots a_{i_k}(\underline{\mathbf{0}}) D^i a_{i_{k+1}}],$$

где $i_1 \leq \dots \leq i_{k+1}$, $i \geq 0$, $k \geq 0$. По лемме о композиции эти слова образуют линейный базис $U_1(L(g))$.

Пример 3. Полупрямое произведение $L = L(g) \ltimes \mathrm{Vir}$ представляет собой конформную алгебру Ли

$$L = \mathrm{Lie}\, C(\{a_i\}_{i \in I} \cup \{v\}, N | a_i \boxed{0}\, a_j = [a_i a_j],$$

$$v \boxed{0}\, v = Dv,\ v \boxed{1}\, v = 2v,$$

$$v \boxed{0}\, a_i = Da_i,\ v \boxed{1}\, a_i = a_i,\ i > j,\ i, j \in I),$$

где функция локальности N имеет значения на порождающих $N(a_i,a_j)=1$, $N(v,v)=2$, $N(a_i,v)=N(v,a_i)=2$. Универсальная обертывающая $U_N(L)$ для этой алгебры порождается множеством $\{a_i\}_{i\in I}\cup\{v\}$ с определяющими соотношениями

$$a_i(\underline{\mathbf{0}})a_j - a_j(\underline{\mathbf{0}})a_i - [a_ia_j] = 0\ (i>j), v(\underline{\mathbf{0}})a_i - \{a_i(\underline{\mathbf{0}})v\} - Da_i = 0,$$

$$v(\underline{\mathbf{1}})v = v, v(\underline{\mathbf{1}})a_i - \{a_i(\underline{\mathbf{1}})v\} - a_i = 0, \quad i,j\in I$$

(считаем $v>a_i$ для всех $i\in I$). Здесь

$$\{x(\underline{\mathbf{n}})y\} = \sum_{t\geqslant 0}(-1)^{n+t}D^{(t)}(y(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{t}})x)$$

– правая часть тождества коммутативности.

Взяв $N=2$ в качестве значения локальности всех порождающих и добавив соотношения $a_i(\underline{\mathbf{1}})a_j=0$, $i,j\in I$, мы получим ассоциативную конформную алгебру $U_2(L)$ – в точности ту же самую, что $U_N(L)$. Имеем следующее множество определяющих соотношений $U_2(L)$:

$$s_{ij}^1 = a_i(\underline{\mathbf{0}})a_j - a_j(\underline{\mathbf{0}})a_i - [a_ia_j] = 0\ (i>j), \quad s_{ij}^2 = a_i(\underline{\mathbf{1}})a_j = 0,$$

$$t_i^1 = v(\underline{\mathbf{0}})a_i + a_i(\underline{\mathbf{1}})Dv - 2a_i(\underline{\mathbf{0}})v - Da_i = 0, \quad u = v(\underline{\mathbf{1}})v - v = 0,$$

$$t_i^2 = v(\underline{\mathbf{1}})a_i + a_i(\underline{\mathbf{1}})v - a_i,$$

где $i,j\in I$.

Чтобы замкнуть это множество относительно композиции, достаточно добавить следующие композиции правого умножения (получающиеся в результате умножения t_i^1 на $(\underline{\mathbf{0}})v$ и $(\underline{\mathbf{0}})a_j$, $i\le j$):

$$t_i^3 = [v(\underline{\mathbf{0}})a_i(\underline{\mathbf{0}})v] - [a_i(\underline{\mathbf{0}})v(\underline{\mathbf{0}})v] = 0,$$

$$t_i^4 = [v(\underline{\mathbf{0}})a_i(\underline{\mathbf{1}})v] - [a_i(\underline{\mathbf{1}})v(\underline{\mathbf{0}})v] + a_i(\underline{\mathbf{0}})v = 0,$$

$$s_{ij}^3 = [v(\underline{\mathbf{0}})a_j(\underline{\mathbf{0}})a_i] - [a_j(\underline{\mathbf{0}})v(\underline{\mathbf{0}})a_i] = 0 \quad (i\ge j,\ i,j\in I).$$

(В последнем соотношении i и j переставлены местами.)

Замкнутость множества

$$S = \{s_{ij}^k, t_i^l, u \mid 1\le k\le 3,\ 1\le l\le 4,\ i,j\in I\}$$

относительно композиции проверяется непосредственно. Таким образом, S – базис Грёбнера–Ширшова алгебры $U_2(L)$.

В соответствии с леммой о композиции, S-приведенные нормальные слова образуют линейный базис алгебры $U_2(L)$, эти слова имеют следующий вид:

$$[a_{i_1}(\underline{\mathbf{0}})\dots a_{i_k}(\underline{\mathbf{0}})D^i a_{i_{k+1}}], \quad [v(\underline{\mathbf{0}})\dots v(\underline{\mathbf{0}})D^i],$$

$$[a_{i_1}(\underline{\mathbf{0}})\dots a_{i_k}(\underline{\mathbf{0}})a_{i_{k+1}}(\underline{\mathbf{0}})v(\underline{\mathbf{0}})\dots(\underline{\mathbf{0}})v(\underline{\mathbf{0}})D^i v],$$

$$[a_{i_1}(\underline{\mathbf{0}})\dots a_{i_k}(\underline{\mathbf{0}})a_{i_{k+1}}(\underline{\mathbf{1}})D^i v],$$

$$[a_{i_1}(\underline{\mathbf{0}})\dots a_{i_k}(\underline{\mathbf{0}})a_{i_{k+1}}(\underline{\mathbf{1}})v(\underline{\mathbf{0}})\dots(\underline{\mathbf{0}})v(\underline{\mathbf{0}})D^i v],$$

где $i_1 \leq \dots \leq i_{k+1}$, $i \geq 0$.

12.5. Коммутативные конформные алгебры.

Изучение (ассоциативно-) коммутативных конформных алгебр представляет интерес ввиду возможности развития конформной алгебраической геометрии (эта идея высказана в устной беседе В. Кацем).

Основным объектом в этой связи являтся свободная коммутативная конформная алгебра $\mathrm{Com}\,C(B,N) = C[B,N]$, порожденная множеством B с локальностью N. Такая алгебра построена в [167], там же найден базис алгебры коэффициентов $\mathrm{Coeff}\,C[B,N]$. В частности, при нечетном $N = const$ алгебра $\mathrm{Coeff}\,C[B,N]$ является подалгеброй в конечнопорожденной алгебре лорановых многочленов над основным полем.

Однако базис само́й свободной коммутативной конформной алгебры в виде, аналогичном $(*)$, неизвестен. Можно показать [35], что *нормальные* слова вида

$$a_1(\underline{\mathbf{n_1}})(a_2(\underline{\mathbf{n_2}})(\dots(\underline{\mathbf{n_{k-1}}})(a_k(\underline{\mathbf{n_k}})D^s a_{k+1})\dots)),$$

$$0 \leqslant n_1 \leqslant \dots \leqslant n_k < N, a_i \in B,$$

$$n_i \leqslant (N-1)/2, \quad n_i = n_{i+1} \Rightarrow a_i \leqslant a_{i+1}, \quad i = 1,\dots,k-1,$$

$$n_k = N-1 \Rightarrow a_k \leqslant a_{k+1},$$

$$n_k \geqslant (N+1)/2,\ n_{k-1} = (N-1)/2 \Rightarrow a_{k-1} \leqslant a_k,\ a_{k-1} \leqslant a_{k+1}$$

образуют систему линейных порождающих в алгебре $C[B,N]$ (при $N = const$, нечетном). Используя результаты [167], легко понять, что в однопорожденной алгебре $C[\{a\},N]$ нормальные *D-свободные* (т.е. при $s=0$) слова линейно независимы, они образуют базис пространства D-свободных элементов такой алгебры.

Одним из важных свойств "классических" конечнопорожденных алгебр является свойство нетеровости (теорема Гильберта о базисе). Оказывается, что для конформных алгебр это тоже верно.

Теорема ([35]). *Конечнопорожденная коммутативная конформная алгебра удовлетворяет условию максимальности для идеалов.*

Литература

1. С. И. Адян, *Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для полугрупп и групп.* — Тр. мат. ин-та им. Стеклова, 1966, 85.
2. С. И. Адян, Г. У. Оганесян, *К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., 42 (1978), 219–225.
3. В. Я. Беляев, *Подкольца конечно определенных ассоциативных колец.* — Алгебра и логика. 17 (1978), 627–638.
4. Л. А. Бокуть, *Вложение алгебр Ли в алгебраически замкнутые алгебры Ли.* — Алгебра и логика. 1 (1962) 47–53.
5. Л. А. Бокуть, *Вложение алгебр в алгебраически замкнутые алгебры.* — Докл. Акад. Наук СССР 154 (1962), 963–964.
6. Л. А. Бокуть, *Базис свободных полинильпотентных алгебр Ли.* — Алгебра и логика, 2 (1963), 13–19.
7. Л. А. Бокуть, *Об одном свойстве групп Буна, I.* — Алгебра и логика. 5 (1966), 5–23.
8. Л. А. Бокуть, *Об одном свойстве групп Буна, II.* — Алгебра и логика. 6 (1967), 15–24.
9. Л. А. Бокуть, *О группах Новикова.* — Алгебра и логика. 6 (1967), 25–38.
10. Л. А. Бокуть, *О вложении колец в тела.* — Докл. Акад. Наук СССР. 175, №4 (1967) 755–758.
11. Л. А. Бокуть, *Группы с относительным стандартным базисом.* — Сиб. мат. журн. 9 (1968) 4, 755–758.
12. Л. А. Бокуть, *Степени неразрешимости проблемы сопряженности для конечно-определенных групп.* — Алгебра и логика. 7 (1968), №5–6.
13. Л. А. Бокуть, *Группы частных мультипликативных полугрупп некоторых колец, I, II, III.* — Сиб. мат. журн. 10, №2, (1969) 246–286; там же, 10 (1969), №4, 744–799; там же, 10 (1969), №4, 800–819.
14. Л. А. Бокуть, *О проблеме Мальцева.* — Сиб. мат. журн. 10 (1969), №5. 965–1005.
15. Л. А. Бокуть, *Некоторые вопросы теории групп и колец.* — Автореферат докт. дисс., ИМ СО АН СССР, 1969.
16. Л. А. Бокуть, *Неразрешимость проблемы равенства и подалгебры конечно определенных алгебр Ли.* — Изв. Акад. Наук СССР. Сер. мат. 36 (1972), №6. 1173–1219.
17. Л. А. Бокуть, *Вложения в простые ассоциативные алгебры.* — Алгебра и логика. 15 (1976), №2, 117–142.

18. Л. А. Бокуть, *Об алгебраически замкнутых и простых алгебрах Ли.* — Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 148 (1978), 30–42.
19. Л. А. Бокуть, *Замечание о группе Борисова–Буна.* — Сиб. мат. журн. 26 (1985), № 5. 43–46.
20. С. Д. Бродский, *Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением.* — Сиб. мат. журн. 25 (1984), № 2, 84–103.
21. А. Т. Гайнов, *Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр.* — Сиб. мат. журн. 3 (1962) № 6, 805–833.
22. В. Н. Герасимов, *Дистрибутивные решетки подпространств и проблема равенства для алгебр с одним соотношением.* — Алгебра и логика. 15 (1976), № 4, 384–435.
23. М. М. Глухов, *О свободных произведениях и алгоритмических проблемах в R-многообразиях универсальных алгебр.* Докл. Акад. Наук СССР. 193 (1970), № 2. 514–517.
24. М. М. Глухов, *R-многообразия квазигрупп и луп.* — В кн.: В сб.: Вопросы теории квазигрупп и луп. Кишинев, 1970, 37–47.
25. М. М. Глухов, *Свободные разложения и алгоритмические проблемы в R-многообразиях универсальных алгебр.* Мат. сб. 85 (1971), вып. 3. 307–338.
26. Е. С. Голод, *Стандартные базисы и гомология. II.* — Тр. мат. ин-та РАН. 208 (1995), 106–110.
27. Е. С. Голод, *Алгебра гомологий комплекса Шафаревича свободной алгебры.* — Фунд. и прикл. мат. 5 (1999), № 1.
28. Е. С. Голод, *Гомологии комплекса Шафаревича и некоммутативные полные пересечения.* — Фунд. и прикл. мат. 5 (1999), № 1.
29. Е. С. Голод, *Комплекс Шафаревича и его применения.* — Автореферат докторской диссертации. МГУ, Москва, 1999.
30. Е. И. Зельманов, *Решение ослабленой проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. 54 (1990) № 1, 42–59.
31. Е. И. Зельманов, *Решение ослабленой проблемы Бернсайда для 2-групп.* — Мат. сб. 182 (1991) № 4, 568–592.
32. А. Р. Кемер, *Свойство конечной базируемости тождеств ассоциативных алгебр.* — Алгебра и логика, 26 (1987), Н 5, 597–641.
33. А. Р. Кемер, *Решение проблемы конечной базируемости для тождеств ассоциативных алгебр.* — Докл. АН СССР. 30 (1989) № 6, 68–74.
34. П. С. Колесников, *Алгебраически замкнутое тело Макар-Лиманова.* Алгебра и Логика, 2000 (в печати).
35. П. С. Колесников, *О коммутативных конформных алгебрах. (Магистерская диссертация).* — Новосибирский государственный университет, 2000.
36. П. С. Колесников, *Базис свободной ассоциативной коммутативной конформной алгебры.* — Четвертый Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ 2000). Тезисы докладов. Ч. IV, с. 108.
37. Г. П. Кукин, *О декартовой подалгебре свободной лиевой суммы алгебр Ли.* — Алгебра и логика. 9 (1970), № 6, 701–713.

38. Г. П. Кукин, *О проблеме равенства для алгебр Ли.* — Сиб. мат. журн. 18 (1977), № 5, 1194–1197.
39. Г. П. Кукин, *Подалгебры конечно определенных лиевых алгебр.* — Алгебра и логика. 18 (1978), № 3, 311–327.
40. А. Г. Курош, *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр.* — Мат. сб. 20 (1947), вып. 2, 239–262.
41. В. Н. Латышев, *Об алгоритме тождества в лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах.* — Вестн. Киев. Унив. Мат., мех. 27 (1985), стр. 67.
42. В. Н. Латышев, *Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы.* Изд. МГУ, М. (1988).
43. В. Н. Латышев, Е. В. Панкратьев, А. В. Михалев, *Построение канонического симплификатора в модулях над кольцом полиномов.* — Вестник Киевского ун-та. Математика и механика, вып. 27. Киев: Высшая школа 1985, 65–67.
44. А. И. Мальцев, *Избранные труды. Т. 1.* Наука, М. (1976).
45. Ю. В. Матиясевич, *Диофантовость перечислимых множеств.* Докл. Акад. Наук СССР. 191 (1970), вып. 2. 279–282.
46. А. А. Михалев, *Подалгебры свободных цветных суперaлгебр Ли.* — Мат. заметки 37 (1985), № 5, 653–661.
47. А. А. Михалев, *Подалгебры свободных p-суперaлгебр Ли.* — Мат. заметки 43 (1988), № 2, 178–191.
48. А. А. Михалев, *Лемма о композиции и проблема равенства для цветных суперaлгебр Ли.* — Вестник МГУ. Сер. I Математика, Механика. 44 (1989), № 5. 88–91.
49. А. А. Михалев, *Техника композиции А. И. Ширшова в суперaлгебрах Ли (некоммутативные базисы Грёбнера).* Труды семинара им. И. Г. Петровского 18 (1995), 277–289.
50. А. В. Михалев, Е. В. Панкратьев, *Вычисления в дифференциальной и разностной алгебре.* Изд-во МГУ, М. (1989).
51. А. А. Михалев, Е. А. Васильева, *Свободные левосимметричные суперaлгебры.* — Фунд. и прикл. мат., **2**, No 2, (1996) 623–626.
52. А. А. Михалев, А. А. Золотых, *Комплекс алгоритмов для вычислений в суперaлгебрах Ли.* — Программирование. (1997), № 1. 12–23.
53. П. С. Новиков, *Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в группах.* — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 44 (1955).
54. Е. Н. Порошенко, *Базисы Грёбнера–Ширшова алгебр Каца–Муди. (Магистерская диссертация).* — Новосибирский государственный университет (1999).
55. Е. Н. Порошенко, *Базисы Грёбнера–Ширшова алгебр Каца–Муди $B_n^{(1)}$.* — Тр. XXXVIII Междунар. студ. конф. (МНСК-2000), Новосибирск, 2000.
56. Е. Н. Порошенко, *Базисы Грёбнера–Ширшова алгебр Каца–Муди $B_n^{(1)}$.* — Четвертый Сибирский Конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ 2000). Тезисы докладов. Ч. IV, с. 113.
57. Д. М. Пуга, *Базисы Грёбнера–Ширшова групп Буна.* Квалификационная работа на соискание степени бакалавра, Новосибирск, НГУ. 1998.

58. В. А. Уфнаровский, *О росте алгебр.* — Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1978, № 4. 59–65.
59. В. А. Уфнаровский, *О рядах Пуанкаре градуированных алгебр.* — Мат. заметки. 27 (1980), № 1. 21–32.
60. В. А. Уфнаровский, *Критерий роста графов и алгебр, заданных словами.* — Мат. заметки. 31 (1982), № 3. 465–472.
61. В. А. Уфнаровский, *Алгебры, заданные двумя квадратичными соотношениями. Исслед. по теории колец, алгебр и модулей.* — Мат. исслед., Кишинев, 1984. No. 78, 148–172.
62. В. А. Уфнаровский, *Теорема о независимости и ее следствия.* — Мат. сб. 128 (1985), № 1. 124–132.
63. В. А. Уфнаровский, *О конечно-определенности гамильтоновых алгебр Строго регулярные алгебры и топологии.* — Мат. исслед., Кишинев, 1987. 103–112.
64. В. А. Уфнаровский, *Об использовании графов для вычисления базиса, роста и ряда Гильберта ассоциативных алгебр.* — Мат. сб. 180 (1989), № 11. 1548–1560.
65. В. А. Уфнаровский, *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре.* — Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, Т. 57, Москва, 1990.
66. А. А. Фридман, *Взаимоотношение между проблемой тождества и проблемой сопряженности для конечно определенных групп.* — Тр. Моск. Матем. об-ва. 9 (1960), 329–356.
67. А. А. Фридман, *Степени неразрешимости проблемы тождества для конечно определенных групп.* — Докл. АН СССР. 147 (1962) 4, 805–808.
68. А. А. Фридман, *Степени неразрешимости проблемы тождества для конечно определенных групп.*. Наука,М. (1967).
69. О. Г. Харлампович, *Конечно определенные разрешимые группы и алгебры Ли с неразрешимой проблемой равенства.* — Мат. заметки. 46 (1989) 3, 80–92.
70. Д. Л. Чубаров, *Применение леммы о композиции для построения универсальных обертывающих конформных алгебр Ли. (Магистерская диссертация).* Новосибирский государственный университет, 2000.
71. Л. В. Шабунин, *Разрешимость элементарной теории конечно определенной квазигруппы.* — Мат. заметки. 47 (1990), № 4. 138–146.
72. Л. В. Шабунин, *Разрешимость теорий конечно определенных квазигрупп из R-многообразий квазигрупп.* — Сиб. мат. журн. 32 (1991), № 3. 201–211.
73. Л. В. Шабунин, *Об элементарной эквивалентности свободных квазигрупп.* — Фунд. и прикл. мат. **5**, (1999), No 3 885–901.
74. Л. В. Шабунин, *Свободные и конечно определенные алгебры многообразий квазигрупп и многообразий Кантора.* — Автореферат докт. дисс., ИМ СО РАН (2000).
75. А. И. Ширшов, *Некоторые вопросы теории неассоциативных колец и алгебр.* — Автореферат канд. дисс., Москва, МГУ (1953).
76. А. И. Ширшов, *Подалгебры свободных лиевых алгебр.* — Мат. сб. 33(75) (1953) № 2, 441–452.

77. А. И. Ширшов, *О кольцах с тождественными соотношениями.* — Мат. сб. 43 (1957), № 2, 277–283.
78. А. И. Ширшов, *О свободных кольцах Ли.* — Мат. Сб. 45(87) (1958), 113–122.
79. А. И. Ширшов, *О базисах свободных алгебр Ли.* — Алгебра и логика. 1 (1962), 14–19.
80. А. И. Ширшов, *Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли.* — Сиб. мат. журн. 3 (1962), 292–296.
81. А. И. Ширшов, *Об одной гипотезе в теории алгебр Ли.* — Сиб. мат. журн. 3 (1962), 297–301.
82. A. d'Andrea, V. G. Kac, *Structure theory of finite conformal algebras.* —Sel. Math., new ser. 1998. V. 4. P. 377–418.
83. D. J. Anick, *Noncommutative graded algebras and their Hilbert series.* — J. Algebra 78 (1982), no. 1, 120–140.
84. D. Anick, C. Löfwall, *Hilbert series of finitely presented algebras. Algebra, algebraic topology and their interactions.* — (Stockholm, 1983), 32–55, Lecture Notes in Math., 1183, Springer, Berlin-New York, 1986.
85. D. I. Anick, *On the cohomology of associative algebras.* — Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 641–659.
86. D. J. Anick, *Recent progress in Hilbert and Poincare series.* — Algebraic topology-rational homotopy (Louvain-la-Neuve, 1986), 1–25, Lecture Notes in Math., 1318, Springer, Berlin-New York, 1988.
87. Yu. A. Bakhturin, A. A. Mikhalev, V. M. Petrogradsky, M. V. Zaicev, *Infinite-dimensional Lie superalgebras.* — De Gruyter Expositions in Mathematics, 7. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.
88. J. Backelin, *La serie de Poincare–Betti d'une algebre graduee de type fini a une relation est rationelle.* — C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 287 (1978), 843–846.
89. K. I. Beidar, W. S. Martindale, A. V. Mikhalev, *Rings with generalized identities.* Pure and Applied Mathematics, 196. NY: Marcel Dekker, 1996.
90. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory.* — Nuclear Phys. 241 (1984), 333–380.
91. A. Ya. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latyshev, *Monomial algebras.* — J. Math. Sci., New York 87 (1997), N 3, 3463–3575.
92. A. Belov, T. Gateva-Ivanova, *Radicals of monomial algebras.* — Fong, Y. (ed.) et al., First international Tainan-Moscow algebra workshop. Proceedings of the international conference, Tainan, Taiwan, Republic of China, July 23–August 22, 1994. Berlin: de Gruyter. 159-169 (1996).
93. G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory.* — Adv. in Math. 29 (1978), 178–218.
94. L. A. Bokut', *Theorems of embedding in the theory of algebras.* — Colloq. math. 14 (1966), 349–353.
95. L. A. Bokut', *The method of Gröbner–Shirshov bases.* — Sib. Adv. Math. 9 (1999), No. 3, 1–16.
96. L. A. Bokut', Y. Fong, W.-F. Ke, *Gröbner–Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: an example.* — to appear in Contemporary Math., AMS.

97. L. A. Bokut', Y. Fong, W.-F. Ke, *Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras.* — Preprint.
98. L. A. Bokut', Y. Fong, W.-F. Ke, *Free associative conformal algebras.* — Proceedings of the 2nd Tainan-Moscow Algebra and Combinatorics Workshop, Tainan 1997, 13–25, Springer-Verlag.
99. L. A. Bokut, S.-J. Kang, K.-H. Lee, P. Malcolmson, *Gröbner–Shirshov bases for Lie superalgebras and their universal enveloping algebras.* — J. Algebra 217 (1999), N. 2, 461–495.
100. L. A. Bokut, G. P. Kukin, *Algorithmic and combinatorial algebra. Mathematics and its Applications, 255.* — Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.
101. L. A. Bokut, A. A. Klein, *Serre relations and Gröbner–Shirshov bases for simple Lie algebras. I, II.* — Internat. J. Algebra Comput. 6 (1996), 389–400 and 401–412.
102. L. A. Bokut, A. A. Klein, *Gröbner–Shirshov bases for exceptional Lie algebras. I.* in: Ring theory. Selected papers from the conference held in Miskolc, July 15–20, 1996, (L. Rowen., ed). J. Pure Appl. Algebra 133 (1998), 51–57; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1998.
103. L. A. Bokut, A. A. Klein, *Gröbner–Shirshov bases for the exceptional Lie algebras E_6, E_7, E_8.* — Algebras and combinatorics (Hong Kong, 1997), 37–46, Springer, Singapore, 1999.
104. L. A. Bokut, P. Malcolmson, *Gröbner–Shirshov bases for quantum enveloping algebras.* — Israel J. Math. 96 (1996), 97–113.
105. L. A. Bokut, P. Malcolmson, *Gröbner–Shirshov bases for relations of a Lie algebra and its enveloping algebra.* — Algebras and combinatorics (Hong Kong, 1997), 47–54, Springer, Singapore, 1999.
106. W. W. Boone, *The word problem.* — Ann. Math. **70** (1959), 207–265.
107. W. W. Boone, *Finitely presented group whose word problem has the same degree as that of an arbitrary given Thue system (an application of methods of Britton).* — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 53 (1965) 2, 265–269.
108. R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA 83 (1986), 3068–3071.
109. A. J. Bowtell, *On a question of Malcev.* — J. Algebra 7 (1967), 126–139.
110. B. Buchberger, *An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal.* — (German). Ph. D. thesis, University of Insbruck, Austria 1965.
111. B. Buchberger, *An algorithmical criteria for the solvability of algebraic systems of equations.* — (German). Aequationes Math. **4** (1970), 374–383.
112. B. Buchberger, F. Winkler (eds), *Gröbner bases and applications.* — London Math. Soc. Lecture Note Ser. 251, Cambridge Univ. Press, 1998.
113. K.-T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, *Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series.* — Ann. Math. 68 (1958), 81–95.
114. C. R. L. Clapham, *Finitely presented groups with word problems an arbitrary degrees of unsolvability.* — Proc. Lond. Math. Soc. 14 (1964), 633–676.
115. D. J. Collins, *Recursively enumerable degrees and the conjugacy problem.* — J. Simb. Logic, 32 (1967), N 3, 432–433.
116. P. M. Cohn, *Embedding problems for rings and semigroups. Universal algebra and its links with logic, algebra, combinatorics and computer science.* — Proc.

25 Arbeitstag. Allgemeine Algebra, Darmstadt 1983, Res. Expo. Math. 4 (1984), 115–126.

117. D. Eisenbud, I. Peeva, B. Sturmfels, *Non-commutative Gröbner bases for commutative algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), no. 3, 687–691.

118. T. Evans, *The word problem for abstract algebras.* — J. Lond. Math. Soc. 26 (1951), No. 1, 64–71.

119. T. Evans, *On multiplicative systems defined by generators and relations. I. Normal form theorems.* — Proc. Cambrige Phil. Soc. 47 (1951), No 4. 637–645.

120. I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster.* London: Academic Press, 1988.

121. T. Gateva-Ivanova, *Skew polynomial rings with binomial relations.* — J. Algebra 185 (1996), No. 3, 710-753.

122. T. Gateva-Ivanova, V. Latyshev, *On recognisable properties of associative algebras.* — Computational aspects of commutative algebra. J. Symbolic Comput. 6 (1988), Nos. 2-3, 371–388.

123. V. P. Gerdt, V. V. Kornyak, *A program for constructing a complete system of relations, basis elements and tables of commutators of finitely presented Lie algebras and superalgebras.* — (Russian) Programmirovanie 1997, OVYR no. 3, 58–71; translation in Program. Comput. Software 23 (1997), no. 3, 164–172.

124. E. S. Golod, *Standard bases and homology.* — Lect. Notes. Math. 1352 (1988), 88–95.

125. E. Green, T. Mora, V. Ufnarovski, *The non-commutative Gröbner freaks.* — Symbolic rewriting techniques (Ascona, 1995), 93–104, Progr. Comput. Sci. Appl. Logic, 15, Birkhauser, Basel, 1998.

126. E. Green, *An introduction to noncommutative Groebner bases.* — K. G. Fischer (ed.) et al., Computational algebra. NY: Dekker. Lect. Notes Pure Appl. Math. 151, 167–190 (1993).

127. M. Hall, *A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups.* — Proc. Am. Math. Soc., 1 (1950), 575–581.

128. P. Hall, *On the embedding of a group in a join of given groups.* — J. Austral. Math. Soc. 14 (1974), N 4, 434–495.

129. G. Hermann, *The question of finitely many steps in the theory of polynomial ideals.* — Maht. Ann. 95 (1926), 736–788.

130. G. Higman, *Subgroups of finitely presented groups.* — Proc. Roy. Soc. Ser. A. 262 (1961), 455–475.

131. H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.* — Ann. Math. 79 (1964), 109–203; ibid. 79 (1964), 205–326.

132. N. Jacobson, *Some recent developments in the theory of algebras with polynomial identities.* Topics in algebra (Proc. 18th Summer Res. Inst. Austral. Nat. Univ., Canberra, 1978) 8–46, Lect. Notes Math., 697, Springer, Berlin, 1978.

133. V. G. Kac, *Formal distribution algebras and conformal algebras.* — XIIth International Congress in Mathematical Physics (ICMP'97) (Brisbane). Internat. Press: Cambridge, MA, 1999. P. 80–97.

134. V. Kac, *Vertex algebras for beginners. Second edition.* — University Lecture Series, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

135. A. Kandry-Rody, V. Weipfenning, *Noncommutative Greubner bases in algebras of solvable type.* — J. Symbolic Comput. 9 (1990), 1–26.
136. S.-J. Kang, K.-H. Lee, *Gröbner–Shirshov bases for representation theory.* — J. Korean Math. Soc. 37 (2000), 55-72.
137. S.-J. Kang, K.-H. Lee, *Gröbner–Shirshov bases for irreducible sl_{n+1}-modules.* — J. Algebra, to appear.
138. S.-J. Kang, I.-S. Lee, K.-H. Lee, H. Oh, *Gröbner–Shirshov pairs for Specht modules of Hecke algebras.* — Preprint.
139. O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir, *Algorithmic problems in varieties.* — Inter. J. Algebra Comput., 5 (1995), Nos. 4, 5, 379–602.
140. A. A. Klein, *Rings nonembeddable in fields with multiplicative semigroups embeddable in groups.* — J. Algebra, 7 (1967), 100–125.
141. N. Koblitz, *Algebraic aspects of cryptography. With an appendix on Hyperelliptic curves by Alfred J. Menezes, Yi-Hong Wu, and Robert J. Zuccherato.* — Algorithms and Computation in Mathematics. 3. Berlin: Springer, 1998.
142. P. Kolesnikov, *The Makar-Limanov's construction of an algebraically closed skew field via Mal'cev–Newmann series.* — Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 12th International Conference, FPSAC'00, Moscow, June 2000, Proceedings, D. Krob, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev (Eds), Springer, Berlin, 2000. 454-460.
143. M. V. Kondratjeva, A. B. Levin, A. V. Mikhalev, E. V. Pankratjev, *Differential and difference dimension polynomials.* — Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1999.
144. V. N. Latyshev, *Lie nilpotency: recognition and word problem.* — First International Tainan-Moscow Algebra Workshop (Tainan, 1994), 237–239, de Gruyter, Berlin, 1996.
145. V. N. Latyshev, *Canonization and standart bases of filtered structures.* — in: Lie Algebras, Rings and related Topics, Fong Yuen, A. A. Mikhalev, E. Zelmanov (Eds.), 61–79, Springer-Verlag, Hong Kong, 2000.
146. V. N. Latyshev, *An improved version of standard bases.* — Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 12th International Conference, FPSAC'00, Moscow, June 2000, Proceedings, D. Krob, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev (Eds), Springer, Berlin 2000, 496-505.
147. J. A. de Loera, B. Sturmfels, R. R. Thomas, *Groebner bases and triangulations of the second hypersimplex.* — Combinatorica 15 (1995), No. 3, 409–424.
148. M. Lothaire, *Combinatorics on Words. Cambridge Mathematical Library.* — Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
149. R. C. Lyndon, *On Burnside's problem I.* — Trans. Amer. Math. Soc. 77 (1954), 202–215.
150. R. C. Lyndon, *On Burnside's problem II.* — Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 329–332.
151. L. G. Makar-Limanov, *Algebraically closed skew fields.* — J. Algebra. 93 (1985) 117–135.
152. A. I. Mal'cev, *On the immersion of an algebraic ring into a field.* — Math. Ann. 113 (1937), 689–691.
153. A. A. Mikhalev, *The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-superalgebras.* Contemp. Math. 131.2 (1992), 91–104.

154. A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Combinatorial aspects of Lie superalgebras.* — Boca Raton, FL: CRC Press. 1995.
155. A. A. Mikhalev, A. A. Zolotykh, *Standard Gröbner–Shirshov bases of free algebras over rings. I. Free associative algebras.* — Intern. J. Algebra Comput. 8 (1998), No. 6, 689–726.
156. A. A. Mikhalev, A. V. Sereguine, *Standard bases of one-sided ideals of algebras of P-type.* in: Algebras and Combinatorics. An International Congress, ICAC-97, Hong Kong, Springer, Singapore, 1999, 345–351.
157. A. A. Mikhalev, E. A. Vasilieva, *Standard bases of ideals of free supercommutative polynomial algebras (ε-Gröbner bases).* — In Lie Algebras, Rings and Related Topics, Springer-Verlag, Hong Kong, 2000, 108–125.
158. T. Mora, *Gröbner bases for nocommutative polynomial rings.* — Lect. Notes Comput. Sci. 229 (1986), 353–362.
159. T. Mora, *Gröbner bases in noncommutative algebras.* — Proc. ISSAC'88, Lect. Notes Comput. Sci., 358 (1988), 150–161.
160. T. Mora, *An introduction to commutative and noncommutative Grobner bases.* — Second International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics (Kyoto, 1992). Theoret. Comput. Sci. 134 (1994), no. 1, 131–173.
161. M. H. A. Newman, *On theory with combinatorial definition of equivalence.* — Ann. Math. 43 (1942), 233–243.
162. E. Poroshenko, *Gröbner–Shirshov bases for Kac-Moody algebras $A_n^{(1)}$ and $B_n^{(1)}$.* — Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, 12th International Conference, FPSAC'00, Moscow, Russia, June 2000, Proceedings, D. Krob, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev (Eds), Springer, Berlin 2000, 552-563.
163. C. Procesi, *Rings with polynomial identities.* — Pure and Applied Mathematics. V. 17, New York: Marcel Dekker, Inc. 1973.
164. C. Reutenauer, *Dimensions and characters of the derived series of the free Lie algebra.* in: M. Lothaire, *Mots*, Mélanges offerts a M.-P. Schützenberger, 171–184. Hermès, Paris (1990).
165. C. Reutenauer, *Free Lie algebras. London Mathematical Society Monographs. New Series, 7.* — Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
166. M. Roitman, *On free conformal and vertex algebras.* — J. Algebra 217 (1999), 496–527.
167. M. Roitman, *Universal enveloping conformal algebras.* — Selecta Math., to appear.
168. M. Roitman, *A criterion for embedding of Lie conformal algebras into associative conformal algebras.* — Preprint, 1999.
169. V. A. Ufnarovskij, *Calculations of growth and Hilbert series by computer.* — Computational algebra (Fairfax, VA, 1993), 247–256, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 151, Dekker, New York 1994.
170. V. Ufnarovski, *Introduction to noncommutative Gröbner bases theory. In Gröbner bases and applications.* — London Math. Soc. Lecture Note Ser. 251, Cambridge Univ. Press, 1998. 259–280.
171. X. G. Viennot, *Algèbres de Lie libres et monoides libres.* — Lect. Notes Math., 1978. No. 691. Springer, Berlin.

172. E. Witt, *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe.* Math. Zeit., 64 (1956), 195–216.

173. A. A. Zolotykh, A. A. Mikhalev, *Algorithms for constructing standard Gröbner–Shirshov bases of ideals of free algebras over commutative rings.* — (Russian) Programmirovanie 1998, OVYR no. 6, 10–11.

Bokut' L. A., Kolesnikov P. S. Grо́bner–Shirshov bases: from incipiency to nowdays.

In this paper we present a history and the main results of the Grо́bner–Shirshov bases theory for commutative, non-commutative, Lie and conformal algebras from the beginning (1962) up to nowadays. We consider the problem of constructing free Lie algebra basis, structure of free products of Lie algebras, word problem for Lie algebras, embedding of arbitrary Lie algebra into algebraically closed one. The contemporary form of Composition–Diamond lemma (CD-lemma) is adduced. The rewriting systems for groups are considered from the Grо́bner–Shirshov bases theory point of view. The important role is devoted to conformal algebras, we present a statement of CD-lemma for associative conformal algebras, someexamples are considered. The analogue of Hilbert basis theorem for commutative conformal algebras is stated.

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН

Поступило 22 февраля 2000