Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

А. И. Короткевич

ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЭЛЕМЕНТАРНУЮ ГРУППУ В ПРИВОДИМОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

§1. Введение

Пусть R – коммутативное колько с единицей, $\mathrm{GL}(n,R)$ – полная линейная группа степени n над R. В работе [1] были описаны подгруппы в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащие блочно–диагональную элементарную группу $E(\nu,R)=\{\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_l)\mid a_i\in E(\nu_i,R)\}$, где $\nu=(n_1,\dots,n_l)$, а $\sum n_i=n$. В предположении, что каждое $n_i\geqslant 3$, решетка промежуточных групп описывается в терминах "сетевых подгрупп" и их нормализаторов. Работа [1] служит, в частности, очень широким обобщением теоремы Уилсона–Голубчика о подгруппах $\mathrm{GL}(k,R)$, нормализуемых $E(k,R)$. О дальнейших результатах см. ссылки [2, 4]. См. также [3] по поводу обобщения теоремы Уилсона–Голубчика в другом направлении.

В настоящей статье мы рассматриваем приводимое представление элементарной группы, а именно степень естественного. Мы описываем надгруппы группы $E^m(n,R)=\{\mathrm{diag}(a,\dots,a)\mid a\in E(n,R)\}$. Очевидно, что $E^m(n,R)$ значительно меньше, чем $E(\nu,R)$ (считая, что $\nu=(n,\dots,n)$), и значит, описание её надгрупп является, в рассматриваемом случае, весьма широким обобщением результатов работы [1].

В §§2–4 мы показываем что методы, использованные в цитируемых работах, распространяются, по крайней мере частично, на случай приводимого представления. А именно, мы строим весьма широкие классы промежуточных подгрупп, определяемые в терминах подалгебр матричной алгебры, содержащих алгебру скалярных матриц. С этой точки зрения использовавшиеся в [1] сетевые подгруппы отвечают подалгебрам, содержащим все диагональные матрицы.

В качестве первого приложения предложенной конструкции в §5 мы даем описание надгрупп $E^m(n,R)$ в случае, когда $R=K$ – поле, а n достаточно велико по отношению к m.

§2. Обозначения

Под R будет пониматься произвольное коммутативное кольцо с единицей (за исключением последнего параграфа, где $R = K$ – поле). Как обычно, через $M(k,l,R)$ обозначается множество матриц размера k на l. Для $k = l$ мы обозначим $M(k,k,R) = M(k,R)$, рассматривая $M(k,R)$ как R-алгебру. Пусть $e = e_k$ единица алгебры $M(k,R)$, и, хотя индекс далее опускается, из контекста будет ясно, какая именно алгебра имеется в виду. Также мы будем пользоваться стандартными обозначениями для $\mathrm{GL}\,(k,R)$ – мультипликативной группы обратимых матриц в $M(k,R)$ и $E(k,R) \leqslant \mathrm{GL}\,(k,R)$ – элементарной группы степени k. Обозначим e_{ij} – стандартную матричную единицу. В координатах $(e_{ij})_{hk} = \delta_{ih}\delta_{jk}$, где δ – символ Кронекера. Как известно, матричная алгебра изоморфна сжатой полугрупповой алгебре полугруппы, состоящей из матричных единиц и нуля.

Зафиксируем размер $n \geqslant 2$ и количество блоков m. Введем сокращение $M = M(m,R)$, $G = \mathrm{GL}\,(mn,R)$, $E = E^m(n,R)$, причем, если понадобится, строки и столбцы матриц из M будут нумероваться корнями (степени m) из единицы

$$I = \{\varepsilon_k \mid 1 \leqslant k \leqslant m\},$$

а строки и столбцы матриц из $M(mn,R)$, в частности, элементов из G, – парами

$$\{(\varepsilon_k, j) \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Отождествим $M(mn,R) \simeq M \otimes M(n,R)$. Учитывая введенную нумерацию, изоморфизм задается “*кронекеровым произведением*”. В силу сделаных выше замечаний для каждого $g \in G \subseteq M(mn,R)$ существует и единственно представление в виде

$$g = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} g_{(i,j)} \otimes e_{ij}, \quad g_{(i,j)} \in M. \tag{1}$$

Элемент $g_{(i,j)}$ этого разложения мы будем называть (i,j)-той компонентой g.

§3. “Трансвекции”

Следующее понятие является ключевым в работе. Определим элементарные “*трансвекции над M*” как матрицы в G вида

$$T_{ij}(a) = e + a \otimes e_{ij},$$

где $a \in M$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Во избежание путаницы с обычными элементарными трансвекциями слово "трансвекция" будет браться в кавычки.

В силу стандартных свойств тензорного произведения получаем, во-первых, аналог "*коммутационной формулы Шевалле*": для всех $a, b \in M$

$$[T_{ij}(a)T_{kl}(b)] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \neq k, \quad j \neq l, \\ T_{il}(ab), & \text{если} \quad j = k, \quad i \neq l, \\ T_{kj}(-ba), & \text{если} \quad i = l, \quad j \neq k; \end{cases} \tag{2}$$

и, во-вторых, следующее выражение для представления сопряженного с элементарной "трансвекцией" в виде (1): если $a, b \in M$, $g \in G$ и $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, то

$$(gT_{ij}(a)g^{-1})_{(k,l)} = \delta_{kl}e + g_{(k,i)}ag^{-1}{}_{(j,l)}. \tag{3}$$

Для произвольной подалгебры $A \leqslant M$ обозначим через $M(A)$ множество матриц $g \in M(mn, R)$, у которых $g_{(i,j)} \in A$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Подалгебру $A \leqslant M$ будем называть *C-подалгеброй*, если она содержит центр $C = \mathrm{Cent}\,(M) = \{\lambda \cdot e \mid \lambda \in R\}$. Для C-подалгебры A введем понятие *группы типа* A:

$$G(A) = \{g \in M(A) \mid g^{-1} \in M(A)\} \leqslant G.$$

Мы будем исследовать, в частности, $N(A)$ – её нормализатор в G.

Содержащуюся в $G(A)$ *элементарную группу над* A обозначим через $E(A)$:

$$E(A) = \langle T_{ij}(a) \mid a \in A,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle.$$

В этих обозначениях $E = E(C)$.

Рассмотрим подгруппу H в G, содержащую $E(C)$. Следующая лемма показывает существование в H "трансвекций" как результат наличия матриц специального вида.

Лемма. *Пусть $g \in H$ и существует индекс i такой, что для всех j (i, j)–тая компонента g совпадает с той же компонентой единичной матрицы, иначе говоря $g_{(i,j)} = \delta_{ij} \cdot e$. Тогда H содержит* *“трансвекции” вида $T_{rs}(g_{(l,k)})$, то есть $E(A) \leqslant H$, где A порождается, как R-алгебра, множеством тех $g_{(l,k)}$, у которых k, l – индексы от 1 до n и k отличен от i.*

Доказательство. Если $l = i$, то доказывать нечего: $E \leqslant H$. Пусть теперь $l \neq i$. В силу условия $k \neq i$. Рассмотрим матрицу $h = gT_{ki}g^{-1}$. В этом случае ввиду (3) имеем

$$h_{(p,q)} = \delta_{pq} \cdot e + \delta_{iq} g_{(p,k)},$$

и, значит,

$$h_{(p,q)} = \delta_{pq} e \quad \text{при} \quad p \neq i, \quad \text{и} \quad h_{(i,i)} = e.$$

Таким образом,

$$h = \prod_{q \neq i} T_{iq}(g_{(q,k)}).$$

Поскольку элементы множества $\{T_{iq}(a) \mid a \in M,\ q \neq i\}$ попарно перестановочны, то $T_{il}(g_{(l,k)}) \in H$ и в силу формул Шевалле лемма доказана.

§4. Нормализаторы

Пусть A – произвольная C–подалгебра в M. В настоящем параграфе мы покажем, что в этом случае, при дополнительном условии на размер блоков, можно дать простое описание нормализатора $N(A)$.

Ясно, что если $g \in G$ и для всех i, j, k, l и всех $a \in A$ выполняется включение

$$g_{(k,i)} a g^{-1}{}_{(j,l)} \in A, \tag{4}$$

то g нормализует $G(A)$. Очевидно также, что в силу формулы (3) и включения $E(A) \leqslant G(A)$, условие (4) необходимо при $i \neq j$.На самом деле имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Если $n \geqslant 3$, то $g \in N(A)$ в том и только том случае, когда $gE(A)g^{-1} \leqslant G(A)$. Это условие эквивалентно условию (4) при $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть $f \in G(A)$. Тогда, в силу изложенного выше, достаточно доказать, что для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n, 1 \leqslant r \leqslant n$ имеет место

$$g_{(i,r)} f_{(r,r)} g^{-1}{}_{(r,j)} \in A.$$

Фиксируем i, j. Поскольку $n \geqslant 3$, можно выбрать k и l так, чтобы k, l, r были попарно различны. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&g_{(i,r)}f_{(r,r)}{g^{-1}}_{(r,j)} = \\
&\quad = g_{(i,r)}\Big(\sum_{1\leqslant p\leqslant n} {g^{-1}}_{(k,p)}g_{(p,k)}\Big)f_{(r,r)}\Big(\sum_{1\leqslant q\leqslant n} g_{(l,q)}{g^{-1}}_{(q,l)}\Big){g^{-1}}_{(r,j)} = \\
&\qquad = \sum_{1\leqslant p,q\leqslant n}\Big(g_{(i,r)}e{g^{-1}}_{(k,p)}\Big)\Big(g_{(p,k)}f_{(r,r)}{g^{-1}}_{(l,q)}\Big)\Big(g_{(q,l)}e{g^{-1}}_{(r,j)}\Big).
\end{aligned}$$

Последнее равенство доказывает предложение.

Условие предложения 1 можно несколько усилить. Следующая вариация используется в дальнейшем.

Предложение 2. *Достаточно проверять принадлежность элемента $h \in G$ нормализатору $N(A)$ только на порождающей системе. Точнее, пусть $\mathbf{a} \subseteq M$, причем $e \in \mathbf{a}$, и A порождается $\mathbf{a}$ как R алгебра. H нормализует $G(A)$ тогда и только тогда, когда для всех $h \in H$, индексов $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, и всех $a \in \mathbf{a}$ выполняется $hT_{ij}(a)h^{-1} \in G(A)$*

Доказательство. Ясно, что в силу условия и формул Шевалле $E(A)$ порождается множеством $\{T_{ij}(a) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ a \in \mathbf{a}\}$ как подгруппа в G. Таким образом, предложение 2 следует из предложения 1.

§5. Случай поля

Начиная с этого места мы считаем, что $R = K$ – поле. В этом случае при достаточно больших n промежуточные подгруппы $E = SL(C) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}\,(mn, K)$, можно описать в терминах $E(A)$, $G(A)$ и их нормализаторов. А именно, имеет место следующая

Теорема. *Пусть $n \geqslant m^2+3$. Тогда для любой промежуточной подгруппы $E \leqslant H \leqslant G$ в M существует единственная K-подалгебра A в M такая, что*

$$E(A) \leqslant H \leqslant N(A).$$

Доказательство. Сначала докажем единственность. Предположим $E(A) \leqslant F \leqslant N(A)$ и $E(B) \leqslant F \leqslant N(B)$. Следовательно, $E(A) \leqslant N(B)$, откуда, применяя формулы Шевалле, получаем $A \subseteq B$. Аналогично $B \subseteq A$, что и требовалось показать.

Покажем теперь, что такая алгебра A существует. В качестве $A = A(H)$ можно взять

$$A = \{a \mid T_{12}(a) \in H\}.$$

Ввиду включения $E \leqslant H$ и формул Шевалле это C–подалгебра в M. В силу предложения 2 достаточно доказать, что включение $T_{rs}(a) \in H$ влечет для любого h из H включение $(hT_{rs}(a)h^{-1})_{(p,q)} \in A$.

Положим $c = hT_{rs}(a)h^{-1}$ и рассмотрим следующую матрицу, где мы для простоты считаем, что $q = 1$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} {h^{-1}}_{\varepsilon_1 2, \varepsilon_1 r} & \ldots & {h^{-1}}_{\varepsilon_1 m^2+2, \varepsilon_1 r} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ {h^{-1}}_{\varepsilon_m 2, \varepsilon_m r} & \ldots & {h^{-1}}_{\varepsilon_m m^2+2, \varepsilon_m r} \end{pmatrix} \in M(m^2, m^2+1, k).$$

В данном случае будем нумеровать столбцы натуральными числами от 2 до m^2+2, а строки множеством $I \times I$. Обозначим через k ранг этой матрицы $\operatorname{rk}\Gamma$. Если $k = 0$, то $c = e$ и доказывать нечего. Пусть поэтому $k > 0$ и Δ – какой-то отличный от нуля минор матрицы Γ порядка k, $j_1, \ldots, j_k$ – его столбцы, $i_1, \ldots, i_k$ – строки. Поскольку $m^2 + 1 > m^2 \geqslant k$, то найдется индекс j_0, отличный от $j_1, \ldots, j_k$. Рассмотрим

$$T = \prod_{u=0}^{k} T_{1 j_u}\left(\Delta^{j_0 \ldots \not{j}_u \ldots j_k}_{i_1 \ldots\ldots\ldots i_k} \cdot e\right) \in E,$$

где $\Delta^{j_0 \ldots \not{j}_u \ldots j_k}_{i_1 \ldots\ldots\ldots i_k}$ – соответствующее алгебраическое дополнение. В силу сделанных предположений и представления (3) заметим, что столбцы матрицы $c^{-1} - e$ инвариантны относительно действия матрицы T, иными словами, являются собственными векторами, причем T унипотентна. Тогда, вводя в рассмотрение $d = cTc^{-1}$, легко видеть, что $d = e + c \cdot (T - e)$. Следовательно, $d \in H$ удовлетворяет условию леммы по крайней мере для двух различных индексов. Кроме того, $d_{(l,j_0)} = \Delta \cdot c_{(l,1)}$. Таким образом, произвольность выбора $q = 1$ доказывает теорему.

В заключении автор хотел бы выразить признательность Николаю Александровичу Вавилову, без всестороннего участия которого статья не была бы написана.

Литература

1. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Распределение подгупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Труды Матем. ин-та АН СССР **3** (1985), 27–46.
2. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of Transvection: A Theme with Variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
3. L. N. Vaserstein, *The subnormal structure of general linear group over rings.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 219–230.
4. N. Vavilov, *Intermediate Subgroups in Chevalley Groups.* in: Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries, (Como–1993), Camb. Univ. Press. (1995) pp. 233–280.

Korotkevich A. I. Subgroups of the general linear group containing an elementary subgroup in a reducible representation.

Let R be a commutative ring, $G = \mathrm{GL}(mn, R)$ be the general linear group of degree mn over R. We construct and study a wide class of overgroups of the elementary group $E^m(n, R) \cong E(n, R)$ in the representation which is the direct sum of m copies of the dxtufk representation. When $R = K$ is a field and n is large enough with respect to m, this allows us to give a complete description of all subgroups intermediate between $E^m(n, K)$ and G. This is a very broad generaliØation of some results by Z. I. Borewicz, N. A. Vavilov and others.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 4 сентября 2000