Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

Н. В. Косматов

ОЦЕНКИ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ РАССЛОЁННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОЛЕЦ. II

Под кольцом мы будем понимать ассоциативное кольцо с единицей, сохраняемой при кольцевых гомоморфизмах. Модули над кольцами, если не оговорено противное, будут считаться левыми. Для кольца Λ мы будем обозначать его левую глобальную и левую слабую размерности соответственно через $\mathrm{lgld}\Lambda$ и $\mathrm{lwd}\Lambda$. Для Λ-модуля X через $\mathrm{id}_\Lambda X$, $\mathrm{pd}_\Lambda X$ и $\mathrm{fd}_\Lambda X$ будут обозначаться его инъективная, проективная и плоская размерности. Левой инъективной финитной размерностью кольца Λ $\mathrm{lFID}\Lambda$ мы будем называть $\sup\{\mathrm{id}_\Lambda M \mid M$ – Λ-модуль, $\mathrm{id}_\Lambda M < \infty\}$. Аналогично определяется левая проективная финитная размерность $\Lambda : \mathrm{lFPD}\Lambda = \sup\{\mathrm{pd}_\Lambda M \mid M$ – Λ-модуль, $\mathrm{pd}_\Lambda M < \infty\}$.

Пусть дан коммутативный квадрат колец и гомоморфизмов колец

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i_1} & R_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle j_1} \\ R_2 & \xrightarrow{j_2} & R', \end{array} \tag{1}$$

и пусть R – расслоённое произведение колец R_1 и R_2 над R', т.е. для любых элементов $r_1 \in R_1$ и $r_2 \in R_2$, удовлетворяющих условию $j_1(r_1) = j_2(r_2)$, существует единственный элемент $r \in R$, для которого $i_1(r) = r_1$ и $i_2(r) = r_2$. Предположим дополнительно, что отображение i_1 сюръективно, и зафиксируем эти обозначения.

Целью этой статьи является получение аналогичных [1] и [2] оценок для финитных размерностей расслоённого произведения колец (теоремы 1 и 2). Мы также приведём примеры вычислений, использующих эти оценки и показывающих существенность дополнительных условий на квадрат колец (1) в полученных результатах.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 0$ и для любого R-модуля M конечной инъективной размерности выполнено $\mathrm{id}_{R_k}(\mathrm{Ext}^l_R(R_k, M)) \leqslant n - l$ при всех*

$k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$. Тогда $\mathrm{lFID}R \leqslant n$.

Доказательство. Пусть M – R-модуль конечной инъективной размерности. Тогда из [1, предложение 4] вытекает, что $\mathrm{id}_R M \leqslant n$. Следовательно, $\mathrm{lFID}R = \sup\{\mathrm{id}_R M \mid \mathrm{id}_R M < \infty\} \leqslant n$.

Аналогичным рассуждением из [2, предложение 3] выводится оценка на левую финитную проективную размерность R:

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 0$ и для любого R-модуля M конечной проективной размерности выполнено $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_l^R(R_k, M)) \leqslant n - l$ при всех $k = 1, 2$ и $l = 0, 1, \ldots, n$. Тогда* $\mathrm{lFPD}R \leqslant n$.

Пример 1. Пусть $s \geqslant 2$, определим $R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid s$ делит $m - n\}$, $R_1 = R_2 = \mathbb{Z}$, $R' = \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$, тогда получаем универсальный квадрат колец (1), в котором все отображения являются каноническими эпиморфизмами. Существуют периодические свободные резольвенты R-модулей R_k:

$$\ldots \xrightarrow{(0,s)} R \xrightarrow{(s,0)} R \xrightarrow{(0,s)} R \xrightarrow{i_1} R_1,$$

$$\ldots \xrightarrow{(s,0)} R \xrightarrow{(0,s)} R \xrightarrow{(s,0)} R \xrightarrow{i_2} R_2,$$

сизигиями в которых являются поочерёдно подмодули $s\mathbb{Z} \times 0 \simeq R_1$ и $0 \times s\mathbb{Z} \simeq R_2$. Несложно убедиться, что короткие точные последовательности R-модулей

$$0 \longrightarrow 0 \times s\mathbb{Z} \hookrightarrow R \xrightarrow{i_1} R_1 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow s\mathbb{Z} \times 0 \hookrightarrow R \xrightarrow{i_2} R_2 \longrightarrow 0$$

не расщепляются. Мы получаем, что R-модули R_k не проективны, а также ввиду [3, теорема 3.2.7], не плоские, откуда $\mathrm{pd}_R R_k = \mathrm{fd}_R R_k = \infty$ и $\mathrm{lgld}R = \mathrm{lwd}R = \infty$. В то же время $\mathrm{lgld}R_k = \mathrm{lwd}R_k = 1$, что показывает невозможность оценить глобальную или слабую размерность расслоённого произведения колец, зная только соответствующие размерности колец-сомножителей.

Пусть M – R-модуль конечной проективной размерности с проективной резольвентой

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{f_n} \ldots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M.$$

Поскольку $\mathrm{lgld}R_k = 1$, то $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_0^R(R_k, M)) \leqslant 1$. Благодаря приведённым выше проективным резольвентам R-модулей R_k и M и из [3, упражнение 2.4.3] для достаточно больших t имеем

$$\mathrm{Tor}_1^R(R_k, M) \simeq \mathrm{Tor}_{1+2t}^R(R_k, M) \simeq \mathrm{Tor}_0^R(R_k, 0) = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_1^R(R_k, M)) = \mathrm{pd}_{R_k} 0 = 0$. Применяя теорему 2, получаем $\mathrm{lFPD}R \leqslant 1$. Аналогично по теореме 1 находим $\mathrm{lFID}R \leqslant 1$.

Короткая точная последовательность R-модулей

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(s,s)} R \xrightarrow{pr} R/(s,s)R \longrightarrow 0$$

не расщепляется и является проективной резольвентой для R-модуля $R/(s,s)R$, поэтому его проективная размерность равна 1, и $\mathrm{lFPD}R = 1$. Подгруппа R свободной абелевой группы $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ свободна, поэтому применение функтора $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ к последовательности $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ приводит нас к короткой точной последовательности R-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Эта последовательность не расщепляется и является инъективной резольвентой R-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Z})$, следовательно, это R-модуль инъективной размерности 1, откуда $\mathrm{lFID}R = 1$.

Пример 2. Пусть F – поле, и в квадрате колец (1) $R' = F(x, y)$, $R_1 = F(x)[y]$, $R_2 = F(y)[x]$, $R = R_1 \cap R_2 = F[x, y]$, а отображения i_k, j_k являются вложениями. Кольцо R – расслоённое произведение колец R_1 и R_2 над R', причём ни одно из отображений в квадрате (1) не сюръективно. Покажем, что без этого условия не выполняются многие полученные оценки на гомологические размерности расслоённого произведения колец.

Из [3, следствие 4.3.8] следует, что $\mathrm{lgld}R = 2$, $\mathrm{lgld}R_k = 1$, а поскольку эти размерности конечны, то $\mathrm{lFPD}R = 2$ и $\mathrm{lFPD}R_k = 1$. Нетрудно видеть, что R-модуль R_k плоский. Поэтому для $n = 1$ условие теоремы 2 выполняется, однако ее заключение $\mathrm{lFPD}R \leqslant 1$ неверно. То же самое можно сказать и об оценках [2, предложение 3, теорема 4, следствие 5]. Это объясняется тем, что без условия сюръективности не выполняется теорема 2.3 из [4], лежащая в основе полученных оценок. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть R-модуль $M = R/(xR + yR)$, который не является проективным, в то время как R_k-модули $R_k \otimes_R M$ нулевые, следовательно, проективные $(k = 1, 2)$.

В заключение автор благодарит профессора А. И. Генералова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Н. В. Косматов, *Оценки гомологических размерностей расслоённого произведения колец.* Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 222–228.
2. Н. В. Косматов, *Оценка глобальной размерности расслоённого произведения колец.* — Фунд. и прикл. мат-ка **5** (1999), 1251–1253.
3. C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge Univ. Press (1994).
4. A. N. Wiseman, *Projective modules over pullback rings.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **97** (1985), 399–406.

Kosmatov N. V. Upper bounds on homological dimensions of pullback rings. II.

New upper bounds on the finitistic dimensions of pullbacks are given and homological dimensions of certain pullbacks are calculated.

С.-Петербургский
государственный
университет
email koko@nk1442.spb.edu

Поступило 4 июля 2000