Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

М. И. Кюршина

ЗАКОН СОКРАЩЕНИЯ ДЛЯ T–ФОРМ

Эта работа является продолжением работ [1, 2]. Напомним некоторые определения и факты из этих работ. *Билинейной формой* на объекте A аддитивной категории $\mathfrak{M}$ с инволюцией мы называем любой морфизм $\Phi : A \longrightarrow A^*$. Форма Φ называется *невырожденной*, если Φ – изоморфизм. Две формы Φ_1, Φ_2 на одном и том же объекте A называются *метрически изоморфными*, если существует автоморфизм α объекта A, такой что $\Phi_2 = \alpha^*\Phi_1\alpha$. Подобъекты (B, i) и (C, j) объекта A называются *ортогональными* относительно формы Φ, если $j^*\Phi i = 0$, $i^*\Phi j = 0$. Мы говорим, что подобъект (B, i) объекта A *вполне изотропен*, если он ортогонален самому себе, т.е. если $i^*\Phi i = 0$. Билинейная форма Φ называется *квазисимметричной*, если существуют такие эндоморфизмы ε, δ объекта A, перестановочные со всеми идемпотентными эндоморфизмами A, что $\Phi^* = \Phi\varepsilon$, $\Phi = \Phi^*\delta$. Эта квазисимметричная форма Φ называется *T-формой*, если существует такой морфизм Ψ, что $\Phi = \Psi + \Psi^*\delta$.

Пусть M– категория с инволюцией, и пусть на объекте B задана билинейная форма Ψ. Мы говорим, что *для пары* (B, Ψ) *выполняется закон сокращения*, если справедливо следующее утверждение:

Пусть A – объект категории $\mathfrak{M}$, разложенный в прямую сумму подобъектов (B, i) и (C, j), и пусть $\Phi_1, \Phi_2 : A \to A^*$ – две билинейные формы на A. Если

(1) *подобъекты (B, i) и (C, j) ортогональны друг другу относительно обеих форм Φ_1, Φ_2;*
(2) *ограничения $i^*\Phi_1 i, i^*\Phi_2 i : B \to B^*$ форм Φ_1, Φ_2 на подобъект (B, i) совпадают с Ψ;*
(3) *формы Φ_1, Φ_2 метрически изоморфны,*

то и ограничения $j^*\Phi_1 j, j^*\Phi_2 j : C \to C^*$ форм Φ_1, Φ_2 на подобъект (C, j) метрически изоморфны.

В [1] было показано, что если $\mathfrak{M}$ – слабо предабелева категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов каждого неразложимого объекта локально, и Ψ – билинейная форма на объекте B категории $\mathfrak{M}$, то в каждом из следующих случаев для пары (B, Ψ) выполняется закон сокращения:

(1) подобъект B вполне изотропен;
(2) пара (B, Ψ)– гиперболическая, то есть форма Ψ невырождена, а объект B раскладывается в прямую сумму двух вполне изотропных относительно Ψ слагаемых, дуальных друг другу;
(3) форма Ψ невырождена, и в кольце эндоморфизмов B возможно и однозначно деление на 2.

В последнем (и, вероятно, самом важном) случае наложено существенное ограничение – обратимость 2 в кольце эндоморфизмов объекта B. Но, как видно из результатов [2], в некоторых утверждениях это ограничение может быть ослаблено и заменено предположением о том, что форма Ψ является T-формой. Цель данной работы – показать, что это справедливо и для закона сокращения.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{M}$ – слабо предабелева категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов каждого неразложимого объекта локально. Пусть Φ – невырожденная T-форма на объекте B этой категории; тогда для пары (B, Φ) справедлив закон сокращения.*

Доказательство. Поскольку форма Φ является T-формой и потому квазисимметричной формой, существуют эндоморфизм δ объекта B и морфизм $\Psi : B \to B^*$, такие что $\Phi = \Phi^*\delta$ и $\Phi = \Psi + \Psi^*\delta$.

Пусть B' – другой экземпляр объекта B; зададим на нем билинейную форму $\Phi' = -\Phi$. Пусть, далее, $D = B' \perp B$ и пусть $i : B = B' \to D$, $j : B \to D$ – канонические вложения первого и второго слагаемых в прямую сумму, а $p : D \to B'$, $q : D \to B$ – канонические проекции. Тогда форма $\Omega : D \to D^*$ на прямой ортогональной сумме задается формулой

$$\Omega = p^*\Phi' p + q^*\Phi q = -p^*\Phi p + q^*\Phi q.$$

Обозначим для краткости $\Phi^{-1}\Psi$ через ξ и определим новые вложения объекта B в D следующим образом: $i_1 = i + j$, $j_1 = j(\mathbf{1}_B - \xi) - i\xi$.

Лемма. *Объект B раскладывается в прямую сумму вполне изотропных относительно формы Ω подобъектов (B, i_1) и (B, j_1). Таким образом, Ω – гиперболическая форма на объекте D.*

Доказательство. Положим $p_1 = (\mathbf{1}_B - \xi)p + \xi q$, $q_1 = q - p$. Поскольку канонические вложения $i, j : B \to D$ и проекции $p, q : D \to B$ удовлетворяют обычным соотношениям $pi = qj = \mathbf{1}_B$, $pj = qi = 0$, $ip + jq = \mathbf{1}_D$, мы имеем:

$$
\begin{aligned}
p_1 i_1 &= ((\mathbf{1}_B - \xi)p + \xi q)(i + j) = \\
&= (\mathbf{1}_B - \xi)pi + \xi qj = (\mathbf{1}_B - \xi)\mathbf{1}_B + \xi \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_B, \\
p_1 j_1 &= ((\mathbf{1}_B - \xi)p + \xi q)(-i\xi + j(\mathbf{1}_B - \xi)) = \\
&= -(\mathbf{1}_B - \xi)pi\xi + \xi qj(\mathbf{1}_B - \xi) = \\
&= -(\mathbf{1}_B - \xi)\mathbf{1}_B\xi + \xi \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_B - \xi) = 0, \\
q_1 i_1 &= (q - p)(i + j) = qj - pi = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_B = 0, \\
q_1 j_1 &= (q - p)(-i\xi + j(\mathbf{1}_B - \xi)) = pi\xi + qj(\mathbf{1}_B - \xi) = \\
&= \mathbf{1}_B\xi + \mathbf{1}_B(\mathbf{1}_B - \xi) = \mathbf{1}_B, \\
i_1 p_1 + j_1 q_1 &= (i + j)((\mathbf{1}_B - \xi)p + \xi q) + (-i\xi + j(\mathbf{1}_B - \xi))(-p + q) = \\
&= i(\mathbf{1}_B - \xi)p + j(\mathbf{1}_B - \xi)p + i\xi q + j\xi q + i\xi p - j(\mathbf{1}_B - \xi)p - i\xi q \\
&+ j(\mathbf{1}_B - \xi)q = ip + jq = \mathbf{1}_D.
\end{aligned}
$$

Эти соотношения означают, что объект D раскладывается в прямую сумму подобъектов (B, i_1) и (B, j_1). Полная изотропность первого из них почти очевидна:

$$
\begin{aligned}
i_1^*\Omega i_1 &= (i + j)^*\Omega(i + j) = (i + j)^*(-p^*\Phi p + q^*\Phi q)(i + j) = \\
&= (-pi)^*\Phi pi + (qj)^*\Phi qj = -\mathbf{1}_B\Phi\mathbf{1}_B + \mathbf{1}_B\Phi\mathbf{1}_B = 0.
\end{aligned}
$$

Для проверки полной изотропности второго слагаемого мы воспользуемся соотношениями, вытекающими из определений и равенства $\Phi = \Phi^*\delta$:

$$
\begin{aligned}
\Phi\xi &= \Phi(\Phi^{-1}\Psi) = \Psi, \\
\xi^*\Phi &= (\Phi^{-1}\Psi)^*\Phi = \Psi^*(\Phi^{-1})^*\Phi = \Psi^*(\Phi^*)^{-1}\Phi^*\delta = \Psi^*\delta.
\end{aligned}
$$

Теперь мы легко получаем полную изотропность подобъекта (B, j_1):

$$\begin{aligned}j_1^*\Omega j_1 = ((\mathbf{1}_{B^*} - \xi^*)j^* - \xi^* i^*)(-p^*\Phi p + q^*\Phi q)(j(\mathbf{1}_B - \xi) - i\xi) = \\ (\mathbf{1}_{B^*} - \xi^*)j^* q^*\Phi q j(\mathbf{1}_B - \xi) - \xi^* i^* p^*\Phi p i\xi = \\ = (\mathbf{1}_{B^*} - \xi^*)\Phi(\mathbf{1}_B - \xi) - \xi^*\Phi\xi = \\ = \Phi - \xi^*\Phi - \Phi\xi = \Phi - \Psi^*\delta - \Psi = 0.\end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть Φ_1, Φ_2 – две билинейные формы на объекте A категории $\mathfrak{M}$, разложенном в прямую сумму подобъектов (B, i), (C, j), причем

(1) подобъекты (B, i), (C, j) ортогональны друг другу относительно обеих форм Φ_1, Φ_2;
(2) ограничения форм Φ_1, Φ_2 на подобъект (B, i) совпадают с T-формой Φ;
(3) формы Φ_1, Φ_2 метрически изоморфны.

Тогда $\Phi' \perp \Phi_1$, $\Phi' \perp \Phi_2$ – метрически изоморфные формы на $B' \perp A = (B' \perp B) \perp C = D \perp C$, и их ограничение на D – гиперболическая форма $\Phi' \oplus \Phi = \Omega$; по закону сокращения для гиперболических форм, ограничения всех форм на C метрически изоморфны, что мы и хотели доказать.

Литература

1. А. В. Яковлев, *Билинейные формы на категориях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 197–214.
2. М. И. Кюршина, А. В. Яковлев, *T-формы и их свойства.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 229–236.

Kyurshina M. I. Cancellation law for T-forms.

It is proved that the cancellation law holds for nondegenerate T-forms on objects of categories (even if the division by 2 of morphisms is impossible).

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило 21 сентября 2000 г.