Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

К. Ю. Лавров

ПОДГРУППЫ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

1. Введение

Пусть R – кольцо дискретного нормирования v, K – его поле частных и $\mathfrak{p}$ – единственный максимальный идеал R. В настоящей работе рассматривается описание подгрупп полной линейной группы $G_K = \mathrm{GL}(n, K)$ степени n над K, содержащих группу $\mathrm{SD}_R = \mathrm{SD}(n, R)$ диагональных матриц, с определителем равным 1 и коэффициентами из кольца R.

В работе [1] получено описание подгрупп в полной линейной группе $G_K = \mathrm{GL}(n, K)$ степени n над полем K, $|K| \geqslant 7$, содержащих группу $\mathrm{D}_K = \mathrm{D}(n, K)$ диагональных матриц. Позднее это описание было распространено на случай произвольного (не обязательно даже коммутативного) полулокального кольца [2, 3]. Аналогичный вопрос для специальной линейной группы оказался значительно более трудным и был решен для случая поля в работе [4], для случая кольца дискретного нормирования в работе [5], и наконец для случая полулокального кольца в работе [6]. Кроме того, в работе [7] был получен результат, схожий с результатом настоящей работы, – описание подгрупп в G_K, содержащих группу $D_R = \mathrm{D}(n, R)$ диагональных матриц над кольцом R. Данная работа продолжает работу [8] и как в техническом, так в идейном отношении тесно связана с работами [1, 2, 4–7].

Заметим, что результат настоящей работы обобщает для рассматриваемой ситуации также несколько известных циклов работ, в частности, полученное Н. Ивахори, Х. Мацумото, Ф. Брюа и Ж. Титсом описание парахорических подгрупп [9–11], и описание надгрупп $\mathrm{E}(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n, K)$, полученные в различных ситуациях Н. С. Романовским, З. И. Боревичем, Р. А. Шмидтом, Я. Я. Нужиным, Е. Л. Башкировым, Дж. Кремоной и другими (см., например, [12, 13]). Более подробный обзор результатов по расположению подгрупп в линейных (классических) группах можно найти, например, в работе Н. А. Вавилова [14], где также имеются подробные ссылки на предыдущие обзоры А. Е. Залесского, О. Х. Кинга, А. С. Кондратьева и Ли Шанг Чжи.

Сформулируем основной результат настоящей работы. При этом как и во всех предыдущих работах будем использовать язык сетей и сетевых групп, впервые примененный в общей ситуации З. И. Боревичем (напр., в [1]), по поводу всех используемых обозначений см. параграф 2.

Теорема 1. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования v, $\mathfrak{p}$ – его максимальный идеал, K – его поле частных, $n \geqslant 3$. Предположим, что поле вычетов $F = R/\mathfrak{p}$ содержит не менее $3n+2$ элементов. Тогда для любой подгруппы H в $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащей $\mathrm{SD}(n,R)$, существует единственная V-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K порядка n такая, что*

$$\Gamma^0(\sigma) \leqslant H \leqslant N(\sigma).$$

План доказательства теоремы 1 таков. В силу леммы 2.1 существует V-сеть, ассоциированная с H, $\Gamma^0(\sigma) \leqslant H$. Мы должны показать, что $H \leqslant N(\sigma)$. При этом мы будем пользоваться леммой 2.3. В параграфе 3 будет рассмотрен случай ограниченных подгрупп, а в параграфе 4 общий случай. В доказательстве используются результаты и методы работ [1–8], а также некоторые классические факты, такие как разложения Картана и Ивасава [15].

2. Предварительные сведения

Используемые обозначения большей частью стандартны и следуют предыдущим работам. В частности, R^* – мультипликативная группа кольца R; e – единичная матрица; e_{ij} – стандартная матричная единица; $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$, $i \neq j$ – элементарная трансвекция; $d_i(\varepsilon) = e + (\varepsilon - 1)e_{ii}$, где $\varepsilon \in R^*$ – элементарное псевдоотражение; $d_{ij}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1})$ – полупростой корневой элемент; $d^r(\varepsilon) = \varepsilon d_r(\varepsilon^{-n})$ – гомология.

Хорошо известно (см., например, [16]), что R-подмодули в поле K, отличные от нуля и K, имеют вид $\mathfrak{p}^m$, где $m \in \mathbb{Z}$, они называются дробными идеалами. Как и в работах [7, 8], нам будет удобно отступить от традиционного словоупотребления и называть дробными идеалами также нуль и K. При этом мы считаем, что $0 = \mathfrak{p}^{\infty}$, а $K = \mathfrak{p}^{-\infty}$, и, если положить дополнительно

$-\infty + \infty = \infty$, то для всех $-\infty \leqslant l, m \leqslant \infty$ справедливо равенство $\mathfrak{p}^l \mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^{l+m}$. Теперь можно дать следующее определение.

Определение 1. *Квадратная таблица $\sigma = (\sigma_{ij}) = (\mathfrak{p}^{m_{ij}})$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, дробных идеалов в K называется сетью дробных идеалов в K порядка n, если для всех $1 \leqslant i, j, r \leqslant n$ выполнено условие $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ или, иными словами, $m_{ir} + m_{rj} \geqslant m_{ij}$.*

Следуя работе [8], мы будем использовать определение, появившееся в ней впервые. Налагаемое на сеть этим определением условие является чисто техническим и служит лишь для того, чтобы гарантировать единственность сети в теореме 1.

Определение 2. *Сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K порядка n называется V-сетью, если для всех i диагональный идеал σ_{ii} равен либо R, либо K, причем $\sigma_{ii} = K$ в том и только в том случае, когда найдется такой индекс $j \neq i$, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = K$.*

Следующие определения аналогичны определениям из работ [1, 2].

Определение 3. *Для произвольной сети σ дробных идеалов в K порядка n через $M(\sigma)$ обозначим совокупность всех матриц $a = (a_{ij})$ порядка n из кольца $M(n, K)$ всех матриц порядка n над K, для которых $a_{ij} \in \sigma_{ij}$ при всех i, j.*

Из определения сети следует, что $M(\sigma)$ есть подкольцо кольца $M(n, K)$. Ясно, что для произвольной сети σ совокупность $e + M(\sigma)$, состоящая из матриц $e + a$, где $a \in M(\sigma)$, является мультипликативной системой.

Определение 4. *Максимальная подгруппа в полной линейной группе $G_K = \mathrm{GL}(n, K)$, содержащаяся в мультипликативной системе $e + M(\sigma)$, называется сетевой подгруппой в G_K, соответствующей сети σ, и обозначается через $G(\sigma)$.*

По определению, матрица a принадлежит $G(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $a, a^{-1} \in e + M(\sigma)$. Представляет интерес вопрос, когда достаточно ограничиться требованием, чтобы $a \in e + M(\sigma)$, то есть когда имеет место формула

$$G(\sigma) = G_K \cap (e + M(\sigma)).$$

В этом направлении имеется ряд результатов. Для вполне слабо конечных колец вопрос полностью решен в работе [17]. Для наших целей на самом деле достаточен будет гораздо более слабый результат, полученный в работе [1].

Предложение. *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей. Тогда для любой сети σ дробных идеалов кольца R имеем:*

$$G(\sigma) = G_R \cap (e + M(\sigma)).$$

Сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K соответствует элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma) \leqslant \mathrm{GL}(n, K)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями вида

$$t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}, \alpha \in \sigma_{ij}, i \neq j.$$

Следующее определение имеет несколько иной вид, чем в предыдущих работах, это обусловлено спецификой решаемой задачи.

Определение 5. *Пусть σ – V-сеть. Положим $\Gamma^0(\sigma) = E(\sigma)\,\mathrm{SD}_R$.*

Очевидно, что если определить сетевую подгруппу $G^0(\sigma) = E(\sigma)D_R$, как это было сделано в предыдущих работах, то она не будет содержаться в некоторых из подгрупп $\mathrm{SL}(n, K)$. Мы не можем также использовать и $\Gamma(\sigma) = \mathrm{SL}(n, K) \cap G(\sigma)$ – стандартную сетевую подгруппу в $\mathrm{SL}(n, K)$ по тем же причинам, по которым в работе [8] используется $G^0(\sigma)$, а не $G(\sigma)$. Именно поэтому приходится определять сетевую подгруппу $\Gamma^0(\sigma)$ именно так.

Определение 6. *Через $N(\sigma)$ обозначается нормализатор подгруппы $G(\sigma)$ в $\mathrm{GL}(n, K)$, а через $N_{\Gamma(\sigma)}$ нормализатор $\Gamma(\sigma)$ в $\mathrm{SL}(n, K)$.*

Мы хотим связать с каждой подгруппой H в $\mathrm{GL}(n, K)$ некоторую сеть. В случае, когда H удовлетворяет некоторым естественным условиям, существует наибольшая сеть σ такая, что $E(\sigma) \leqslant H$. Это значит, что для любой другой сети τ, такой, что $E(\tau) \leqslant H$, имеет место включение $\tau \leqslant \sigma$. Ясно, что если такая сеть σ существует, то она единственна.

Определение 7. *Наибольшая сеть σ дробных идеалов в K такая, что $E(\sigma) \leqslant H$, называется сетью, ассоциированной с подгруппой H.*

Существование ассоциированной с подгруппой H сети гарантируется следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть R – полулокальная область целостности с полями вычетов, содержащими по крайней мере три элемента, K – ее поле частных, и H – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,K)$, нормализуемая $\mathrm{SD}(n,R)$. Тогда ассоциированная с H V-сеть существует и состоит из дробных идеалов в K.*

Доказательство этой леммы буквально повторяет доказательство леммы из работы [8], поэтому здесь мы его опускаем.

Матрицы из G, входящие в сетевые подгруппы $G(\sigma)$ и $G^0(\sigma)$, характеризуются довольно простыми конгруэнц-условиями. Важно иметь аналогичную характеризацию для матриц из нормализатора $N(\sigma)$. Такую характеризацию нам дает следующая лемма. Именно она существенно используется при доказательстве основного результата.

Лемма 2.2. *Если для сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ и матрицы $a = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,K)$ с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$, при всех i, j, r, s имеют место включения $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$, то $a \in N(\sigma)$. Обратно, если $a \in N(\sigma)$, то эти включения имеют место для всех $r \neq s$.*

Доказательство этой леммы можно найти, например, в работах [1, 8]. Случай $r = s$ представляет некоторые трудности. Как и в работе [8], мы сформулируем доказанный там частичный результат, достаточный для наших целей.

Лемма 2.3. *Пусть R – полулокальная область целостности такая, что все ее поля вычетов содержат не менее трех элементов. Тогда для любой V-сети матрица $a = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,K)$ с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$ принадлежит $N(\sigma)$ в том и только том случае, когда для всех i, j, r, s имеют место включения $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$. В частности, нормализатор группы $G^0(\sigma)$ в $\mathrm{GL}(n,K)$ совпадает с $N(\sigma)$.*

Легко показать, что в этом случае нормализатор $\Gamma^0(\sigma)$ также равен $N(\sigma)$.

Важный промежуточный результат связан с так называемыми ограниченными подгруппами, поэтому мы напомним их определение.

Определение 8. *Подгруппа H в $G_K = \mathrm{GL}(n,K)$ называется ограниченной, если она содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с $G_R = \mathrm{GL}(n,R)$. Подгруппы, сопряженные с G_R, называются максимальными ограниченными подгруппами.*

Ясно, что любая ограниченная подгруппа содержится в $\mathrm{GL}^0(n,K)$ – подгруппе $\mathrm{GL}(n,K)$, состоящей из матриц, определители которых являются обратимыми элементами в R. В наиболее важном случае, когда поле K локально компактно (то есть когда K полно и поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ конечно), подгруппа $H \leqslant G_K$ ограничена тогда и только тогда, когда ее замыкание компактно, а максимальные ограниченные подгруппы – это в точности максимальные компактные подгруппы (см., например, [18] или [19]). С ограниченными подгруппами неотъемлемо связаны ограниченные сети.

Определение 9. *Сеть σ дробных идеалов в K называется ограниченной, если их знаменатели ограничены.*

В дальнейших рассуждениях важную роль играет связанная с предыдущим определением несложная лемма. Доказательство аналогичной леммы есть в работе [8]. Прежде чем ее сформулировать, необходимо дать еще два определения и пояснение к ним.

Определение 10. *Две сети σ и τ называются подобными, если $\tau = \sigma^\pi$ для некоторой перестановки $\pi \in \mathrm{S}_n$.*

Для перестановки $\pi \in \mathrm{S}_n$ через (π) обозначим ее образ при стандартном вложении $\mathrm{S}_n \to G_R$, то есть $(\pi)_{ij} = \delta_{\pi(i),j}$. Имеет место следующая формула $G(\sigma^\pi) = (\pi)G(\sigma)(\pi)^{-1}$. Следовательно, для подобных сетей σ и σ^π соответствующие им сетевые группы $G(\sigma)$ и $G(\sigma^\pi)$ сопряжены в $\mathrm{GL}(n,R)$ при помощи матрицы перестановки.

Определение 11. *Две сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ и $\tau = (\tau_{ij})$ в K порядка n называются сопряженными, если для некоторых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in K^*$ имеем $\tau_{ij} = \varepsilon_i \sigma_{ij} \varepsilon_j^{-1}$.*

Ясно, что для сопряженных сетей σ и τ справедливо $M(\tau) = dM(\sigma)d^{-1}$, $G(\tau) = dG(\sigma)d^{-1}$, где $d = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Таким образом, для двух сопряженных сетей соответствующие им сетевые подгруппы сопряжены при помощи диагональной матрицы.

Лемма 2.4. *Любая ограниченная V-сеть дробных идеалов в K сопряжена с сетью, состоящей полностью из целых идеалов.*

В частности, отсюда вытекает, что любая сеть, максимальная среди ограниченных сетей, сопряжена с постоянной сетью

$\sigma_{ij} = R$ и, значит, $\sigma = (\sigma_{ij})$ тогда и только тогда является максимальной ограниченной сетью, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji} = R$ для всех i, j.

Теперь мы можем переходить к доказательству результатов работы.

3. Ограниченные подгруппы, содержащие SD_R

В этой части мы полностью изучим ограниченные подгруппы, содержащие SD_R. Полученные при этом результаты – теоремы 2 и 3 – являются важным шагом в доказательстве теоремы 1, но представляют и очевидный самостоятельный интерес.

Пусть $B_K = \mathrm{B}(n, K)$ и $B_R = \mathrm{B}(n, R)$ – группы верхних треугольных матриц с коэффициентами из K и R соответственно, а $U_K = \mathrm{U}(n, K)$ и $U_R = \mathrm{U}(n, R)$ – группы верхних унитреугольных (т. е. унипотентных треугольных) матриц. Хорошо известны следующие утверждения, называемые разложениями Картана и Ивасава соответственно (на самом деле они справедливы для любых колец главных идеалов, см., например, [15, §8]).

Лемма 3.1. *Имеет место разложение*

$$G_K = G_R D_K G_R,$$

то есть каждый элемент $x \in G_K$ может быть представлен в виде $x = ydz$, где y, $z \in G_R$, а $d \in D_K$.

Лемма 3.2. *Имеет место разложение*

$$G_K = G_R B_K = G_R D_K U_K,$$

то есть каждый элемент $x \in G_K$ может быть представлен в виде $x = ydu$, где $y \in G_R$, $d \in D_K$, $u \in U_K$.

Мы подошли к одному из центральных вспомогательных результатов. Так как он интересен и сам по себе, а условие на поле вычетов в нем слабее, чем в теореме 1 (формально он не является ее следствием), мы назовем его теоремой. В ее доказательстве нам понадобятся матрицы

$$d_{rs}(\varepsilon) = \mathrm{diag}\,(1, \dots, 1, \varepsilon, 1, \dots, 1, \varepsilon^{-1}, 1, \dots, 1),$$

где ε стоит на r-м, а ε^{-1} на s-м диагональных местах.

Теорема 2. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования, $\mathfrak{p}$ – его максимальный идеал, K – его поле частных, $n \geqslant 3$. Предположим, что поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ содержит не менее четырех элементов, и H – максимальная ограниченная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, K)$, содержащая $\mathrm{SD}(n, R)$. Тогда $H = G(\tau)$, где τ – максимальная ограниченная сеть дробных идеалов в K.*

Доказательство. В силу определения максимальной ограниченной подгруппы имеем $aHa^{-1} = G_R$ для некоторой матрицы $a \in G_K$. Таким образом, в частности, $a\,\mathrm{SD}_R\,a^{-1} \leqslant G_R$. Покажем что тогда на самом деле $a \in G_R D_K$. Согласно разложению Ивасава, $G_K = G_R B_K$, то есть $a = bc$, где $b \in G_R$, $c \in B_K$, ясно, что тогда $c\,\mathrm{SD}_R\,c^{-1} \leqslant G_R$. Возьмем $\varepsilon \in R^*$ такой, что $\varepsilon - 1, \varepsilon + 1 \in R^*$, и положим

$$f(r,s) = cd_{rs}(\varepsilon)c^{-1} = \\ = e + \left(\sum_{i,j=1}^{n} c_{ir}(\varepsilon-1)c'_{rj} + \sum_{i,j=1}^{n} c_{is}(\varepsilon^{-1}-1)c'_{sj}\right)e_{ij} \in G_R.$$

Заметим, что поскольку матрица c имеет вид

$$c = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix},$$

то $c'_{sr} = 0$ при $r < s$, кроме того, $c'_{rr} = c_{rr}^{-1}$. И следовательно, на месте (i,r), $i < r$, в матрице $f(r,s)$ стоит $f(r,s)_{ir} = c_{ir}(\varepsilon-1)c_{rr}^{-1} \in R$. Так как $\varepsilon - 1 \in R^*$, то элемент $c_{ir}c_{rr}^{-1} \in R$.

В силу того, что r может быть любым не равным n индексом, мы доказали что элемент $c_{ij}c_{jj}^{-1} \in R$ при всех $i < j < n$. Следовательно, осталось доказать только, что $c_{in}c_{nn}^{-1} \in R$. Посмотрим на элемент матрицы $f(r,s)$ в позиции (i,n) при $s = n$:

$$f(r,n)_{in} = c_{ir}(\varepsilon-1)c'_{rn} + c_{in}(\varepsilon^{-1}-1)c'_{nn} \in R.$$

Это включение, а также включение, получаемое заменой в нем ε на ε^{-1}, приводит нас к следуюшей системе включений:

$$\begin{cases} c_{ir}(\varepsilon-1)c'_{rn} + c_{in}(\varepsilon^{-1}-1)c'_{nn} \in R \\ c_{ir}(\varepsilon^{-1}-1)c'_{rn} + c_{in}(\varepsilon-1)c'_{nn} \in R. \end{cases}$$

Определитель этой системы включений, равный $\varepsilon^{-2}(\varepsilon-1)^2(\varepsilon^2-1)$, обратим в R (по нашему предположению на ε), а, следовательно, $c_{in}c_{nn}^{-1} \in R$. Значит, элементы $c_{ij}c_{jj}^{-1}$ лежат в R для всех $i < j \leqslant n$. Но это значит, что $c \in U_R D_K$. Итак, мы имеем $a = bc$, где $b \in G_R$, $c \in U_R D_K$, следовательно, $a \in G_R D_K$, то есть $a = b'd$, где $b' \in G_R$, $d \in D_K$. Но $aHa^{-1} = G_R$, и, следовательно, $dHd^{-1} = G_R$. Но ведь это (в силу леммы 2.4) и значит, что $H = G(\tau)$, где $\tau = d^{-1}Rd$. Теорема доказана. □

Следующий результат завершает доказательство теоремы 1 для класса ограниченных подгрупп.

Теорема 3. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования, $\mathfrak{p}$ – его максимальный идеал, K – поле частных R, $n \geqslant 3$. Предположим, что поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ содержит не менее $3n+2$ элементов. Тогда для любой ограниченной подгруппы H в G_K, содержащей $\mathrm{SD}(n,R)$, существует единственная ограниченная V-сеть σ дробных идеалов в K такая, что*

$$\Gamma^0(\sigma) \leqslant H \leqslant N(\sigma).$$

Доказательство. По определению ограниченной подгруппы $H \leqslant A$, где A – некоторая максимальная ограниченная подгруппа. По теореме 2 имеем $A = G(\omega)$, где ω – максимальная ограниченная сеть идеалов в K. Таким образом, $dAd^{-1} = G_R$ для некоторой матрицы $d \in D_K$. Рассмотрим подгруппу dHd^{-1},

$$\mathrm{SD}_R \leqslant dHd^{-1} \leqslant G_R.$$

Так как R – локальное кольцо, то мы можем применить теорему 1 из работы [6] и заключить, что существует единственная сеть τ (целых) идеалов в R такая, что

$$\Gamma^0(\tau) \leqslant dHd^{-1} \cap \mathrm{SL}(n,R) \leqslant N_{\Gamma(\tau)}.$$

В силу того, что $\mathrm{SL}(n,K) \trianglelefteq \mathrm{GL}(n,K)$, можно сделать вывод, что существует единственная сеть τ' (целых) идеалов в R такая, что

$$\Gamma^0(\tau') \leqslant dHd^{-1} \leqslant N(\tau').$$

Более подробное рассуждение можно найти в доказательстве леммы 1 работы [20]. Положив $\sigma = d^{-1}\tau' d$ мы получим нужное утверждение. Теорема доказана. □

4. Доказательство теоремы 1

В предыдущем параграфе мы полностью доказали теорему 1 для ограниченных подгрупп. В этом параграфе мы закончим доказательство в общем случае. Прежде докажем несколько лемм об извлечении трансвекций. Цель этой деятельности состоит в том, чтобы доказать, что в H имеется достаточное количество элементарных трансвекций.

Первая лемма этого параграфа общеизвестна, доказательство аналогичной можно найти, например, в работе [21]. Кроме того, она легко вытекает из результатов работы [22].

Лемма 4.1. *Пусть R – полулокальное кольцо, все поля вычетов которого имеют не менее пяти элементов, H – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащая $\mathrm{SD}(n,R)$, $n \geqslant 3$. Тогда если верхняя треугольная матрица $b=(b_{ij})$ принадлежит H, то $t_{ij}(b_{ij}) \in H$ при всех $i \neq j$ (или, иными словами, $b_{ij} \in \sigma_{ij}$, где $\sigma = (\sigma_{ij})$ – V-сеть ассоциированная с H).*

Ясно, что эту лемму можно применять также и к матрицам, сопряженным с верхней треугольной при помощи матрицы перестановки. Следующая лемма на самом деле является основным результатом работы [8].

Лемма 4.2. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и K – его поле частных. Предположим, что в поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ не менее семи элементов. Тогда для каждой подгруппы H полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащей группу $\mathrm{D}(n,R)$ диагональных матриц, существует единственная V-сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дробных идеалов в K порядка n такая, что*

$$G^0(\sigma) \leqslant H \leqslant N(\sigma).$$

Этот результат, а также лемма 4.1 существенно используются при доказательстве следующей леммы.

Лемма 4.3. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и K – его поле частных. Предположим, что поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ содержит не менее семи элементов, $n \geqslant 3$. Тогда, если H – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащая $\mathrm{SD}(n,R)$, и для некоторой матрицы $a=(a_{ij}) \in H$ при некотором r, $1 \leqslant r \leqslant n$, имеем $a_{rj}=0$ для всех $j \neq r$, то $a \in N(\sigma)$. В частности, $a_{ir} \in \sigma_{ir}$, для всех $i \neq r$, где $\sigma = (\sigma_{ij})$ – V-сеть, ассоциированная с H.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в обратной матрице $a^{-1} = (a'_{ij})$ имеем $a'_{rj} = 0$ при $j \neq r$ и $a_{rr}a'_{rr} = 1$. Согласно лемме 2.3 мы должны проверить справедливость включений $a_{ip}\sigma_{pq}a'_{qj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i, j, p, q.

Не теряя общности, мы можем считать, что $r = n$. Рассмотрим подгруппу в H, состоящую из всех матриц $x = (x_{ij}) \in H$, для которых $x_{nj} = 0$ при всех $j \neq n$. Каждой матрице x сопоставим матрицу $\overline{x} \in \mathrm{GL}(n-1, K)$, получающуюся из x вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Определенную таким образом подгруппу в $\mathrm{GL}(n-1, K)$ обозначим через $\overline{H}$. Ясно, что $\mathrm{D}(n-1, R) \leqslant \overline{H}$, и применив к $\overline{H}$ лемму 4.2 заключаем, что $G^0(\tau) \leqslant H \leqslant N(\tau)$ для однозначно определенной V-сети τ дробных идеалов в K порядка $n-1$. Проверим, что $\tau = \overline{\sigma}$, где $\overline{\sigma}$ – сеть, получающаяся из σ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Очевидно, что $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$. Обратно, пусть $\alpha \in \tau_{ij}$. Тогда $t_{ij}(\alpha) \in \overline{H}$, следовательно,

$$\begin{pmatrix} t_{ij}(\alpha) & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in H.$$

Эта матрица сопряжена при помощи матрицы перестановки с верхней треугольной матрицей, поэтому к ней можно применить лемму 4.1 и заключить, что $t_{ij}(\alpha) \in H$, таким образом, $\alpha \in \sigma_{ij}$. Тем самым доказано, что $\tau_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех $i, j \neq n$. В частности, мы доказали, что $a_{ip}\sigma_{pq}a'_{qj} \subseteq \sigma_{ij}$ для всех i, j, p, $q \neq n$.

Возьмем теперь $\varepsilon \in R^*$ такой, что $\varepsilon - 1$, $\varepsilon + 1 \in R^*$, и положим $b = ad_{hn}(\varepsilon^{-1})a^{-1}$, где h – произвольный не равный n индекс. Ясно, что $b \in H$. По уже доказанному мы имеем: $\overline{b} = \overline{a}d_h(\varepsilon)\overline{a}^{-1} \in G^0(\overline{\sigma})$, пусть $c = \mathrm{diag}(\overline{b}^{-1}, \varepsilon) \in \Gamma^0(\sigma)$. Тогда

$$bc = \prod_{i=1}^{n-1} t_{in}(b_{in}\varepsilon) \in H$$

и снова по лемме 4.1, $b_{in} \in \sigma_{in}$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$. Заменяя b на b^{-1} мы получим $b'_{in} \in \sigma_{in}$. Итак, в матрицах b и b^{-1} элементы, стоящие в позиции (i, n), принадлежат идеалу σ_{ij}, и поэтому справедливы сравнения:

$$\begin{cases} a_{ih}(\varepsilon - 1)a'_{hh} + a_{in}(\varepsilon^{-1} - 1)a'_{nn} \equiv 0 \pmod{\sigma_{in}} \\ a_{ih}(\varepsilon^{-1} - 1)a'_{hh} + a_{in}(\varepsilon - 1)a'_{nn} \equiv 0 \pmod{\sigma_{in}}. \end{cases}$$

Определитель этой системы сравнений, равный $\varepsilon^{-2}(\varepsilon-1)^2(\varepsilon^2-1)$, обратим в R (по нашему предположению на ε), а значит $a_{ih}a_{hh}$, $a_{in}a_{nn} \in \sigma_{in}$. В частности, из того, что $a_{in}a_{nn} \in \sigma_{in}$, следует, что $a_{in} \in \sigma_{in}$ (так как $a'_{nn} \in R^*$ в силу замечания в начале доказательства). Заменяя теперь a на a^{-1}, мы совершенно аналогично покажем, что $a'_{in} \in \sigma_{in}$. Это и доказывает включения из леммы 1.2 в оставшемся случае, когда среди индексов i, j, p, q встречается n. Лемма доказана. $\square$

В доказательстве следующей леммы нам понадобятся матрицы

$$d^h(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \varepsilon^{1-n}, \ldots, \varepsilon),$$

где ε^{1-n} стоит на h-м диагональном месте.

Лемма 4.4. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и K – его поле частных. Предположим, что поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ содержит не менее $2n+2$ элементов, $n \geqslant 3$. Тогда если H – подгруппа в $\mathrm{GL}(n, K)$, содержащая $\mathrm{SD}(n, R)$, и в матрице $a = (a_{ij}) \in H$ при некоторых p, h имеем $a_{ph} = 0$, то $a_{ih}a_{hj} \in \sigma_{ij}$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon \in R^*$ такой, что $\varepsilon^n - 1 \in R^*$, и положим

$$b = ad^h(\varepsilon)a^{-1} = \varepsilon(e + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ih}\xi a'_{hj}e_{ij}) \in H,$$

где $\xi = \varepsilon^{-n} - 1$. Так как $a_{ph} = 0$, то p-я строка матрицы b совпадает с p-й сторокой скалярной матрицы εe и мы можем применить к b лемму 4.3 и заключить, что $b \in N(\sigma)$. Из этого, в частности, вытекает, что $b_{ij}b'_{jj} \in \sigma_{ij}$ для всех i, j. Но ε можно выбрать так, чтобы $b_{jj} \in R^*$. Тогда $b_{ij} = \varepsilon(\delta_{ij} + a_{ih}\xi a'_{hj}) \in \sigma_{ij}$ и, следовательно, $a_{ih}a'_{hj} \in \sigma_{ij}$ или, иными словами, $t_{ij}(a_{ih}a'_{hj}) \in H$. Лемма доказана. $\square$

Для доказательства следующей леммы нам удобно ввести обозначения. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ элементы поля K, удовлетворяющие условию $\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n = 1$.

Возьмем $\varepsilon \in R^*$, такой, что $\varepsilon^4 - 1$, $\varepsilon^n - 1 \in R^*$, и положим

$$b(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon(\delta_{ij} + \alpha_i(\varepsilon^{-n} - 1)\beta_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Матрица $b(\varepsilon)$ обратима, и обратная к ней матрица равна $b(\varepsilon^{-1})$ и

$$b(\varepsilon^{-1})_{ij} = \varepsilon^{-1}(\delta_{ij} + \alpha_i(\varepsilon^n - 1)\beta_j), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Заметим, что если все $\alpha_i\beta_i$ являются целыми, то подгруппа, порожденная $\mathrm{SD}(n,R)$ и $b(\varepsilon)$, является ограниченной. Нам остается рассмотреть случай, когда не все элементы $\alpha_i\beta_i$ целые. В этом случае, как нетрудно заметить, найдутся два индекса r, s такие, что $v(\alpha_r\beta_r)=v(\alpha_s\beta_s)<0$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать ключевую лемму об извлечении трансвекций.

Лемма 4.5. *Пусть R – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$ и K – его поле частных. Предположим, что поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ содержит не менее $2n+5$ элементов, $n\geqslant 3$. Тогда, если H – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,K)$, содержащая $\mathrm{SD}(n,R)$, и $b(\varepsilon)\in H$, то для всех i,j имеем $\alpha_i\beta_j\in\sigma_{ij}$.*

Доказательство. Очевидно, можно считать $i\neq j$. Разберем сначала случай $n\geqslant 4$. Возьмем $\theta\in R^*$, и положим

$$c=c(\varepsilon,\theta)=b(\varepsilon)d_{rs}(\varepsilon^{-1}\theta)b(\varepsilon^{-1})=[b(\varepsilon)d_r(\varepsilon^{-1})]d_{rs}(\theta)[d_s(\varepsilon)b(\varepsilon^{-1})].$$

Тогда

$$c(\varepsilon,\theta)_{ij}=\delta_{ij}+[b(\varepsilon)d_r(\varepsilon^{-1})]_{ir}(\theta-1)[b(\varepsilon^{-1})d_r(\varepsilon^{-1})]_{rj}+$$
$$+[d_s(\varepsilon)b(\varepsilon)]_{is}(\theta^{-1}-1)[d_s(\varepsilon)b(\varepsilon^{-1})]_{sj}=$$
$$\delta_{ij}+b(\varepsilon)_{ir}\varepsilon^{-1}(\theta-1)b(\varepsilon^{-1})_{rj}+\varepsilon b(\varepsilon)_{is}(\theta^{-1}-1)b(\varepsilon^{-1})_{sj}.$$

В силу замечания перед леммой, если положить $\theta=\frac{\alpha_s\beta_s}{\alpha_r\beta_r}\varepsilon^2$, то $\theta\in R^*$. Кроме того, заметим, что $\theta\equiv\varepsilon^2 \pmod{\mathfrak{p}}$, и, следовательно, $\theta-1\equiv\varepsilon^2-1 \pmod{\mathfrak{p}}$, $\theta+1\equiv\varepsilon^2+1 \pmod{\mathfrak{p}}$, из чего, учитывая ограничения наложенные на ε, получаем $\theta-1$, $\theta+1\in R^*$. Непосредственное вычисление показывает, что при $i,j\neq r,s$ и таком выборе θ получим $c_{ij}=0$. Следовательно, по лемме 4.4 $c_{ij}c_{jk}\in\sigma_{ik}$ для всех i, k и всех j не равных r и s. В частности, $c_{ij}c_{jj}\in\sigma_{ij}$, и поскольку $c_{jj}=1$, то для таких i и j имеем:

$$c_{ij}=b(\varepsilon)_{ir}(\theta-1)b(\varepsilon^{-1})_{rj}+b(\varepsilon)_{is}(\theta^{-1}-1)b(\varepsilon^{-1})_{sj}\in\sigma_{ij}.$$

Применив к последнему включению рассуждения, аналогичные рассуждениям леммы 4.3, можем заключить, что $b(\varepsilon)_{ir}b(\varepsilon^{-1})_{rj}\in\sigma_{ij}$. Иными словами,

$$\alpha_i(\varepsilon^{-n}-1)\beta_r\alpha_r(\varepsilon^n-1)\beta_j\in\sigma_{ij}$$

и, следовательно, $\alpha_i\beta_r\alpha_r\beta_j \in \sigma_{ij}$ и, в силу того, что $v(\alpha_i\beta_j) = v(\alpha_i\beta_r\alpha_r\beta_j) + m$, получим требуемые включения $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$. Поменяем местами теперь α и β в определении $b(\varepsilon)$, и, повторив те же рассуждения, получим включения $\beta_i\alpha_j \in \sigma_{ij}$ при тех же ограничениях на j и всех i. Таким образом требуемые включения доказаны для всех $\alpha_i\beta_j$ кроме двух: $\alpha_r\beta_s$ и $\alpha_s\beta_r$.

Фиксируем $j \neq r, s$, в силу того, что $c_{ij} = 0$ для некоторого i, по лемме 4.4 мы можем заключить $c_{rj}c_{js} \in \sigma_{rs}$, но

$$c_{rj}c_{js} = \alpha_r(\varepsilon^n - 1)\beta_j(\theta - 1)\alpha_j(\varepsilon^{-n} - 1)\beta_s(\theta^{-1} - 1),$$

и, следовательно, $\alpha_r\beta_j\alpha_j\beta_s \in \sigma_{rs}$. По определению V-сети, σ_{jj} равен либо R, либо K для всех j, и поэтому $\alpha_r\beta_s \in \sigma_{rs}$. Рассмотрев теперь элемент $c_{sj}c_{jr}$, мы аналогичным образом получим включения $\alpha_s\beta_r \in \sigma_{sr}$. Этим мы доказали, что $\alpha_i\beta_j \in \sigma_{ij}$ для всех i и j.

Осталось рассмотреть случай $n = 3$. Пусть для $\theta \in R^*$ теперь $c = c(\varepsilon, \theta) = b(\varepsilon)d_{rs}(\theta)b(\varepsilon^{-1})$.Заметим прежде всего, что $c_{rs} = \alpha_r\beta_s(\theta^{-1} - 1)(x - \theta y)$, где

$$x = x(\varepsilon) = (\varepsilon^{-n} - 1)(1 + \alpha_s(\varepsilon^n - 1)\beta_s),$$

$$y = y(\varepsilon) = (\varepsilon^n - 1)(1 + \alpha_r(\varepsilon^{-n} - 1)\beta_r).$$

Положим $\theta = y^{-1}x$, тогда как показано выше, $\theta \in R^*$. Легко заметить, что $c_{rs} = 0$. В силу леммы 4.4 таким образом, для всех i, j справедливо $c_{is}c_{sj} \in \sigma_{ij}$. В частности, $c_{is}c_{ss} \in \sigma_{is}$, следовательно, $c_{is} \in \sigma_{is}$. Вычисления показывают, что

$$c_{is} = \alpha_i\beta_s x(\theta^{-1} - 1)\left(\frac{1 + \alpha_r(\varepsilon^{-2n} - 1)\beta_r}{1 + \alpha_r(\varepsilon^{-n} - 1)\beta_r}\right),$$

легко заметить, что

$$v\left(\frac{1 + \alpha_r(\varepsilon^{-2n} - 1)\beta_r}{1 + \alpha_r(\varepsilon^{-n} - 1)\beta_r}\right) = 0,$$

это значит $\alpha_i\beta_s x \in \sigma_{is}$. Очевидно, $v(x) = v(\alpha_s\beta_s) = -m$, следовательно,

$$v(\alpha_i\beta_s) = v(\alpha_i\beta_s x) + m \quad \text{и} \quad \alpha_i\beta_s \in \sigma_{is} \quad \text{для всех} \quad i.$$

Взяв $\theta = x^{-1}y$, мы получим $c_{sr} = 0$, проведя аналогичные рассуждения, можем заключить, что $\alpha_i\beta_r \in \sigma_{ir}$ для всех i. Теперь, как и в случае $n \geqslant 4$, поменяем местами α и β в определении $b(\varepsilon)$, и, повторив те же рассуждения, получим включения $\beta_i \alpha_j \in \sigma_{ij}$ при $j = r, s$ и всех i. Так как $n = 3$, то все необходимые включения таким образом доказаны. А следовательно, доказана и лемма. $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 1 полностью.

Доказательство теоремы 1. Пусть $a = (a_{ij})$ – произвольная матрица из H с обратной матрицей $a^{-1} = (a'_{ij})$. Согласно лемме 2.3, мы должны доказать включения $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$. Разберем вначале случай, когда $r = s$. Этот случай нами фактически уже рассмотрен. Если все элементы вида $a_{ir}a'_{rj}$ являются целыми, то H таким образом является ограниченной подгруппой и, следовательно, можно применить теорему 3. Если же найдется $a_{ir}a'_{rj}$ не являющийся целым, то для любого $\varepsilon \in R^*$ такого, что $\varepsilon^n - 1 \in R^*$, матрица

$$ad^r(\varepsilon)a^{-1} = \varepsilon(\delta_{ij} + a_{ir}(\varepsilon^{-n} - 1)a'_{rj}) = b(\varepsilon)$$

принадлежит H. Положив $\alpha_i = a_{ir}$, $\beta_j = a'_{rj}$, мы можем применить последнюю лемму и заключить, что $a_{ir}a'_{rj} \in \sigma_{ij}$.

Пусть теперь $r \neq s$. Фиксируем $\alpha \in \sigma_{ij}$ и рассмотрим принадлежащую H трансвекцию $b = at_{rs}(\varepsilon\alpha)a^{-1}$, где $\varepsilon \in R^*$. По уже доказанному тогда $b_{ij}b'_{jj} \in \sigma_{ij}$. Если теперь $a_{ir}\alpha a'_{sj}$ целый, то выбором ε мы можем добиться того, чтобы $b'_{jj} \in R^*$, и тогда из включения $b_{ij}b_{jj} \in \sigma_{ij}$ вытекает $b_{ij} \in \sigma_{ij}$. Если же $a_{ir}\alpha a'_{sj}$ не целый, тогда и b'_{jj} не целый и тем более $b_{ij} \in \sigma_{ij}$.

Этим включения $a_{ir}\sigma_{rs}a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$ доказаны для всех матриц $a \in H$ и всех i, j, r, s. Но это и означает, что

$$\Gamma^0(\sigma) \leqslant H \leqslant N(\sigma),$$

где σ – V-сеть дробных идеалов в K, ассоциированная с подгруппой H. Единственность сети, для которой имеют место эти включения, очевидна. Теорема 1 доказана полностью. $\square$

Сделаем в заключение несколько замечаний общего характера о возможностях дальнейшего развития теорем этой работы.

Во-первых, весьма правдоподобно, что аналог теоремы 1 справедлив и для полулокальных колец главных идеалов. Кроме того, учитывая результаты работ [2, 8, 5, 22], мы предполагаем, что можно существенно снизить условие на поле вычетов, а именно, доказать теорему 1 в предположении, что поле вычетов содержит не менее семи элементов.

Хочется сердечно поблагодарить Николая Александровича Вавилова, сформулировавшего для меня эту задачу, за ту поддержку и внимание, с которыми он всегда был готов к обсуждению всех возникающих в процессе решения вопросов и проблем, а также Елизавету Владимировну Дыбкову, внимательнейшим образом прочитавшую эту работу на стадии подготовки и сделавшую ряд весьма ценных замечаний.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич З. И., Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержашие группу диагональных матриц.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **148** (1978), 43–57.
3. Н. А. Вавилов, *О подгруппах полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц.* — Вестн. Ленингр. Ун-та No. 1 (1981), 10–15.
4. Н. А. Вавилов, *О подгруппах специальной линейной группы, содержаших группу диагональных матриц,* I–IV. — Вестн. Ленингр. ун-та, Сер. I, No. 22, 3–7 (1985); No. 2, Вып. 1, 10–15 (1986); Вып. 2, 3–8 (1986); Вып. 3, 10–15 (1988).
5. И. Хамдан, *О подгруппах специальной линейной группы над локальным кольцом главных идеалов.* — В кн.: Сб. научн. трудов. (Кольца и линейные группы). Кубанский гос. ун-т. 1988, с. 119–126.
6. N. A. Vavilov, *Subgroups of* SL_n *Over a Semilocal Ring.* Preprint Universität Bielefeld (1998), No. 111, pp. 1–13.
7. Н. А. Вавилов, И. Хамдан О подгруппах полной линейной группы над локальным полем, — Изв. вузов. Математика No. 12 (1989), 8–15.
8. И. Хамдан, *Подгруппы полной линейной группы над полем частных полулокального кольца.* Канд. дисс., Ленинград (1987).
9. N. Iwahori, H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups.* — Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. No. 25 (1965), 5–48.
10. F. Bruhat, J. Tits, *Groupes reductifs sur un corps local.* 1. — Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. No. 41 (1972), 246.
11. F. Bruhat, J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local.* — Bull. Soc. Math. France **2**, No. 2 (1984), 259–301.
12. Р. А. Шмидт, *О подгруппах полной линейной группы над полем частных кольца главных идеалов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 185–187.
13. Р. А. Шмидт, *О подгруппах полной линейной группы над полем частных дедекиндова кольца.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 119–130.
14. N. A. Vavilov, *Intermediate Subgroups in Chevalley Groups.* in: Proc. Conf. Groups of Lie type and their Geometries (Como–1993), Cambrige Univ. Press. (1995), pp. 233–280.

15. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир., М. (1975).
16. *Алгебраическая теория чисел.* Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха, Мир, М. (1969).
17. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
18. F. Bruhat, *Sur une classe de sous-groupes compact maximaux des groupes de Chevalley sur un corps p-adique.* — Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. **23** (1964), 621–650.
19. Ж. П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли.* Мир, М. (1969).
20. А. Е. Егоров, А. А. Панин, *Теорема о сопряженности для подгрупп* SL_n*, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000).
21. З. И. Боревич, *О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом.* — Вестн. Ленингр. Ун-та No. 19 (1976), 29–34.
22. Н. А. Вавилов, *Параболические подгруппы групп Шевалле над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **116** (1982), 20–43.

Lavrov K. Yu. Subgroups of the general linear group over a local field

We describe subgroups of the general linear group $\mathrm{GL}(n,R)$ over the field of fractions K of a local principal ideal domain R, containing the group $\mathrm{SD}(n,R)$ of diagonal matrices with entries from R and determinant 1. Similar results for overgroups of $D(n,R)$ were obtained earlier by I. Hamdan and N. Vavilov. Results of the present paper generalize also some further known results, notably decription of parahoric subgroups by N. Iwahori and H. Matsumoto.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 4 сентября 2000