Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

В. В. Нестеров

РАСПОЛОЖЕНИЕ ДЛИННОЙ И КОРОТКОЙ КОРНЕВЫХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ ШЕВАЛЛЕ ТИПА G_2

§1. Введение

Данная работа посвящена описанию подгрупп, порожденных парой, состоящей из длинной и короткой корневых унипотентных подгрупп в группе Шевалле типа G_2. Также в ней классифицированы орбиты группы Шевалле, действующей одновременным сопряжением на таких парах.

Подобное описание для пары длинных корневых подгрупп довольно давно и хорошо известно (см. [7, 10, 13]). Оно играло решающую роль в изучении неприводимых подгрупп, порождённых длинными корневыми унипотентными подгруппами, и в других вопросах, связанных с порождением в группах Шевалле (см. также [9, 17, 18]).

Что касается коротких корневых подгрупп, то их геометрия изучена в гораздо меньшей степени: известны лишь немногочисленные результаты. Так, в работах [15] и [16] описаны неприводимые подгруппы ими порожденные в случае ортогональной и симплектической группы. В работе [5] изучены пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ и F_4.

Настоящая работа является органическим продолжением работ Н. А. Вавилова [1, 2] и автора [5]. В [1, 2] Н. А. Вавилов вычислил разложения Брюа корневых элементов и, используя эти результаты, передоказал классификацию пар длинных корневых подгрупп и классифицировал пары, состоящие из длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле типа B_ℓ, C_ℓ и F_4. В [5] аналогичный подход был применён к коротким корневым подгруппам.

В данной работе, исходя из идеи вычисления разложения Брюа короткого корневого элемента [2], и, используя метод и технику, развитые в [5], мы получаем наш результат. Полученное описание пар из длинной и короткой корневых подгрупп в группе типа G_2 по сути мало отличается от аналогичного описания для групп типа B_ℓ, C_ℓ и F_4. Однако, поскольку коммутационная формула Шевалле для нашего случая выглядит гораздо сложнее, то и доказательство теоремы 1 (случай характеристики отличной от 3) и теоремы 2 (случай характеристики 3) требует более изощренных и громоздких вычислений.

В следующей работе будут описаны пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа G_2.

Более глубокое ознакомление с данной проблематикой и многочисленными результатами в этом направлении можно получить по обзорам [3, 4, 14].

§2. Формулировка результатов

Все свойства групп Шевалле, используемые в дальнейшем, могут быть найдены в книгах [6] или [8]. Зафиксируем обозначения и напомним некоторые необходимые нам понятия. Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, $G = G(\Phi, K)$ – группа Шевалле типа Φ над полем K. Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ и каждого элемента $t \in K$ обозначим через $x_\alpha(t)$ соответствующий элементарный корневой унипотент. Далее, $X_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid x \in K\}$ – элементарная корневая унипотентная подгруппа, соответствующая α и $H_\alpha = \langle h_\alpha(t), t \in K^*\rangle$ – элементарная полупростая корневая подгруппа, где для $\alpha \in \Phi$ и $t \in K^*$ мы положили $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$. Зафиксируем порядок на Φ. Пусть $B = B(\Phi, K)$ – борелевская подгруппа относительно этого порядка, а Φ^+, Φ^- – соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Подгруппы U, V и H в G определяются следующим образом:

$$U = U(\Phi, K) = \left\langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^+,\ t \in K \right\rangle,$$

$$V = V(\Phi, K) = \left\langle x_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi^-,\ t \in K \right\rangle,$$

$$H = H(\Phi, K) = \langle h_\alpha(t),\ \alpha \in \Phi,\ t \in K^* \rangle.$$

Здесь для подмножества X группы G через $\langle X\rangle$ обозначается подгруппа в G, порожденная множеством X. Через $W = W(\Phi)$ обозначается группа Вейля системы Φ.

В дальнейшем мы имеем дело с системой корней Φ типа G_2:

$$\mathrm{G}_2 = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}$$

где α, β – фундаментальные корни, причем α короткий, а β длинный, $\delta = 3\alpha + 2\beta$ – максимальный (длинный) корень, $\rho = 2\alpha + \beta$ – максимальный короткий корень.

Для корней, строго больших, чем ρ, также будем использовать обозначение $\rho_2 = 3\alpha + \beta$, $\rho_3 = \delta = 3\alpha + 2\beta$.

Подгруппа X называется длинной корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_δ, и короткой корневой унипотентной подгруппой, если она сопряжена с X_ρ. Элементы X называются длинными или короткими унипотентными элементами соответственно. Слово "унипотентный" мы всегда будем опускать.

Пусть $\Lambda(G)$ и $\Omega(G)$ – множества коротких и длинных корневых подгрупп соответственно. Для подгруппы $X \leqslant G(\Phi, K)$ мы обозначим через

$$\Lambda(X) = \{\, Y \leqslant X \mid Y \in \Lambda(G)\},$$

$$\Omega(X) = \{\, Y \leqslant X \mid Y \in \Omega(G)\}$$

множества коротких и длинных корневых подгрупп, содержащихся в X. Как обычно, $|\Lambda(X)|$, $|\Omega(X)|$ – мощности этих множеств. Наконец, $X \sim Y$ означает, что подгруппы X и Y сопряжены в G, а обозначения $X_1 \times X_2$ и $[X_1, X_2]$ отвечают за прямое произведение и взаимный коммутант групп X_1 и X_2 соответственно.

В наших вычислениях мы используем матричное представление группы типа G_2 как подгруппы $\Omega(7, K)$.

Пусть I – единичная матрица порядка 7, e_{ij}, $1 \leq i, j \leq 7$ – матричная единица, т. е. матрица, которая имеет 1 в позиции (i, j) и 0 во всех остальных местах. Как обычно, X^T обозначает транспонированную матрицу X.

Тогда, следуя работе [12], для $\operatorname{char} K \neq 2$ мы имеем следующее представление:

$$x_\alpha(t) = I + t(2e_{45} - e_{12} + e_{67} - e_{34}) - t^2 e_{35},$$

$$x_{-\alpha}(t) = I - t(2e_{43} - e_{54} - e_{76} + e_{21}) - t^2 e_{53},$$

$$x_{\alpha+\beta}(t) = I + t(2e_{46} + e_{13} - e_{57} - e_{24}) - t^2 e_{26},$$

$$x_{-(\alpha+\beta)}(t) = I - t(2e_{42} - e_{64} + e_{75} - e_{31}) - t^2 e_{62},$$

$$x_{2\alpha+\beta}(t) = I + t(2e_{47} - e_{14} + e_{36} - e_{25}) - t^2 e_{17},$$

$$x_{-(2\alpha+\beta)}(t) = I - t(2e_{41} + e_{52} - e_{63} - e_{74}) - t^2 e_{71},$$

$$x_{\beta}(t) = I + t(e_{56} - e_{23}), \qquad x_{-\beta}(t) = x_{\beta}(t)^T,$$

$$x_{3\alpha+\beta}(t) = I + t(e_{15} - e_{37}), \qquad x_{-(3\alpha+\beta)}(t) = x_{3\alpha+\beta}(t)^T,$$

$$x_{3\alpha+2\beta}(t) = I + t(e_{16} - e_{27}), \qquad x_{-(3\alpha+2\beta)}(t) = x_{3\alpha+2\beta}(t)^T.$$

В этом случае коммутационные формулы Шевалле принимают следующий вид:

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(ts)x_{2\alpha+\beta}(-t^2 s)x_{3\alpha+\beta}(-t^3 s)x_{3\alpha+2\beta}(-t^3 s^2),$$

$$[x_\alpha(t), x_{\alpha+\beta}(s)] = x_{2\alpha+\beta}(-2ts)x_{3\alpha+\beta}(-3t^2 s)x_{3\alpha+2\beta}(-3ts^2),$$

$$[x_\alpha(t), x_{2\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+\beta}(3ts),$$

$$[x_\beta(t), x_{3\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+2\beta}(-ts),$$

$$[x_{\alpha+\beta}(t), x_{2\alpha+\beta}(s)] = x_{3\alpha+2\beta}(3ts).$$

Если $\operatorname{char} K = 2$, то группа $\Omega(7, K)$ изоморфна как абстрактная группа $\mathrm{Sp}(6, K)$, и по [11] мы будем иметь дело с таким представлением

$$\begin{aligned}
x_\alpha(t) &= I + t(e_{12} + e_{34} + e_{56}),\\
x_{\alpha+\beta}(t) &= I + t(e_{13} + e_{25} + e_{46}),\\
x_{2\alpha+\beta}(t) &= I + t(e_{24} + e_{16} + e_{35}),\\
x_\beta(t) &= I + t(e_{23} + e_{45}),\\
x_{3\alpha+\beta}(t) &= I + t(e_{14} + e_{36}),\\
x_{3\alpha+2\beta}(t) &= I + t(e_{15} + e_{26}).
\end{aligned}$$

Матрицы для $x_{-\gamma}(t)$, $\gamma \in \Phi^+$ получаются транспонированием матриц для $x_\gamma(t)$.

Множество корней $S \subset \Phi$ называется замкнутым, если из того, что α, $\beta \in S$ и $\alpha + \beta \in \Phi$ следует, что $\alpha + \beta \in S$. Для замкнутого множества корней S положим $E(S) = \langle X_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$. Как известно $E(S) = E(S^r)E(S^u)$, полупрямое произведение редуктивной и унипотентной подгрупп $E(S)$, где $S^r = \{\alpha \in S \mid -\alpha \in S\}$,

$S^u = \{\alpha \in S \mid -\alpha \notin S\}$. Если S^r состоит только из двух корней, скажем γ и $-\gamma$, мы имеем изоморфизм $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2(K)$ (группа односвязна). В этом случае для короткого корня γ мы будем писать $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2^{\rho}(K)$, для длинного корня γ мы будем писать $E(S^r) \simeq \mathrm{SL}_2^{\delta}(K)$. Ясно, что эти группы не сопряжены.

Теперь мы в состоянии сформулировать основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть X – длинная, Y — короткая корневые подгруппы в группе Шевалле $G(\mathrm{G}_2, K)$. Предположим, что* $\mathrm{char}\, K \neq 3$. *Тогда*

1) *X и Y порождают одну из групп* (LS1) – (LS5), *перечисленных ниже;*
2) *пары (X, Y) сопряжены в G тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному и тому же случаю.*

(LS1) $\langle X, Y\rangle = X \times Y$, $|\Lambda| = |K|$, $|\Omega| = 1$;

(LS2) $\langle X, Y\rangle = X \times Y$, $|\Lambda| = 1$, $|\Omega| = 1$;

(LS3) $\langle X, Y\rangle = XYZ$, $Z = [X, Y] \in \Omega$, (Y, Z) *как в* (LS1);

(LS4) $\langle X, Y\rangle \simeq U(\mathrm{G}_2, K)$, *если* $K \neq \mathbb{F}_2$; *некоторая подгруппа* $U(G_2, K)$ *индекса 2, если* $K = \mathbb{F}_2$;

(LS5) $\langle X, Y\rangle \simeq \mathrm{SL}_2^{\delta}(K)E(S)$, *где* $S = \{\,\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta\,\}$, *если* $K \neq \mathbb{F}_2$; *некоторая подгруппа* $\mathrm{SL}_2^{\delta}(K)E(S)$ *индекса 2, если* $K = \mathbb{F}_2$.

В случае характеристики 3 получается довольно простое описание.

Теорема 2. *При тех же предположениях, что в теореме* 1, *но* $\mathrm{char}\, K = 3$, *имеем следующие случаи.*

(LT1) $\langle X, Y\rangle = X \times Y$, $|\Lambda| = 1$, $|\Omega| = 1$, *пары (X, Y) распадаются в две орбиты;*

(LT2) $\langle X, Y\rangle \simeq U(G_2, K)$, *если* $K \neq \mathbb{F}_3$; *некоторая подгруппа* $U(G_2, K)$ *индекса 3, если* $K = \mathbb{F}_3$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теорем 1 и 2.

§3. Предварительные леммы

В теореме 1 работы [2] было вычислено разложение Брюа короткого корневого элемента в группе типа B_ℓ, C_ℓ, F_4. Основываясь на идее доказательства этой теоремы, мы получим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $gX_\rho g^{-1}$ – короткая корневая подгруппа. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

a) *существуют такие $u \in U$, короткий корень γ и $\varepsilon \in K^*$, что*

$$gx_\rho(t)g^{-1} = ux_\gamma(t\varepsilon)u^{-1}, \quad t \in K.$$

b) $\operatorname{char} K \neq 2$ *в случае B_ℓ, C_ℓ, F_4 и* $\operatorname{char} K \neq 3$ *в случае G_2, существуют такие $u \in U$, s, $r \in K$, короткий корень σ и длинный корень λ, которые образуют угол $\pi/4$ для B_ℓ, C_ℓ, F_4 или $\pi/6$ для G_2, причём $\sigma > \lambda$, что*

$$gx_\rho(t)g^{-1} = ux_\sigma(st)x_\lambda(rt)u^{-1}, \quad t \in K.$$

Доказательство. Пусть $x = gx_\rho(t)g^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Запишем приведённое разложение Брюа для элемента g: $g = u_0hwv$, где $u_0 \in U$, $h \in H$, $w \in W$, $v \in U_w^- = U \cap w^{-1}Vw$. Тогда имеем

$$vx_\rho(t)v^{-1} = x_\rho(t)\prod x_{\rho_i}(a_i), \quad \rho_i \in \Sigma,$$

где Σ – множество доминантных корней ([2]) и частные a_i/a_j не зависят от t. Если $\operatorname{char} K = 2$ (соответственно 3) в случае B_ℓ, C_ℓ, F_4 (соответственно в случае G_2), из коммутационной формулы следует, что все a_i равны нулю. Поэтому в этом случае доказывать нечего.

Иначе,

$$hwvx_\rho(t)v^{-1}w^{-1}h^{-1} = x_\gamma(\pm t)\prod x_{w\rho_i}(b_i), \quad b_i = \pm a_i,\ \gamma = w\rho.$$

Пусть $w\rho_j > w\rho_i$ и $b_j, b_i \neq 0$. Тогда будем сопрягать выписанное выше выражение элементами вида $x_{w\rho_j - w\rho_i}(\mp b_j/b_i)$ из U. Это действие приводит к следующему:

$$x = gx_\rho(t)g^{-1} = u_0u_1x_\gamma(t)x_\lambda(r)u_1^{-1}u_0^{-1},$$

где $t/r \in K^*$ зависит только от корневой подгруппы, которая содержит x, $u_1 \in U$.

Теперь, если $\lambda > \gamma$, возьмем $u_2 = x_{\lambda-\gamma}(\mp r/ct)$, где $c = 2$ для B_ℓ, C_ℓ, F_4 и $c = 3$ для G_2. Следовательно, $x = u_0 u_1 u_2 x_\gamma(t) u_2^{-1} u_1^{-1} u_0^{-1}$.

Если $\lambda < \gamma$, остается только заметить, что угол между ρ и ρ_i равен $\pi/4$ или $\pi/6$ и, следовательно, угол между $\sigma = w\rho$ и $\lambda = w\rho_i$ такой же. Положим $u = u_0 u_1 u_2$ или $u = u_0 u_1$. Это завершает доказательство леммы.

На протяжении оставшейся части работы мы будем предполагать, что G – группа Шевалле типа G_2.

По аналогии с работой [5], лемма 1 является отправной и позволяет получить следующий ключевой результат.

Лемма 2. *Пусть X – длинная и Y – короткая корневые подгруппы в $G(\mathrm{G}_2, K)$. Предположим, что* $\operatorname{char} K \neq 3$. *Тогда существует $g \in G$ такой, что*

$$gXg^{-1} = X_\delta,$$
$$gYg^{-1} = X_\gamma \quad \textit{или} \quad gYg^{-1} = X_{\sigma,\lambda} = \langle x_\sigma(s) x_\lambda(s),\ s \in K \rangle\,,$$

где γ, σ, λ имеют то же значение, что и в лемме 1.

В случае $\operatorname{char} K = 3$ *имеем только $gXg^{-1} = X_\delta$, $gYg^{-1} = X_\gamma$.*

Доказательство. По определению найдется $z \in G$ такой, что $zXz^{-1} = X_\delta$. Тогда по лемме 1 можно выбрать $u \in U$, сопрягая которым, получаем, что $u^{-1}zYz^{-1}u$ совпадет либо с X_γ, либо с $\{x_\sigma(s) x_\lambda(ks) \mid s \in K\}$, где k – некоторый фиксированный элемент из K^*. В первом случае в качестве g возьмем $u^{-1}z$, во втором случае положим $g = h_\tau(k^{-1})u^{-1}z$. Указанный корень τ следует выбрать так, чтобы угол между σ и τ был равен $\pi/2$, а между λ и τ был $\pi/3$, а это всегда можно сделать.

Если $\operatorname{char} K = 3$, мы имеем только первый случай. Лемма доказана.

§4. Представители орбит

Напомним, что в системе типа G_2 угол между короткими корнями может принимать одно из следующих значений: 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, π. Угол между коротким и длинным корнем может быть $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$.

Обозначим через θ угол между δ и γ, $\theta = \angle(\delta, \gamma)$, и через (ψ_1, ψ_2) соответствующую пару углов $(\angle(\delta, \sigma), \angle(\delta, \lambda))$. Все возможности для таких углов и корней собраны в таблицах 1 и 2.

Таблица 1

N	(θ)	γ
1	$(\pi/6)$	$2\alpha+\beta,\ \alpha+\beta$
2	$(\pi/2)$	$\alpha,\ -\alpha$
3	$(5\pi/6)$	$-2\alpha-\beta,\ -\alpha-\beta$

Таблица 2

N	(ψ_1, ψ_2)	$(\sigma,\ \lambda)$
4	$(\pi/6, \pi/3)$	$(\alpha+\beta,\ \beta)$
5	$(\pi/2, 2\pi/3)$	$(\alpha, -\beta),\ (-\alpha, -3\alpha-\beta)$
6	$(5\pi/6, 2\pi/3)$	$(-2\alpha-\beta, -3\alpha-\beta)$
7	$(5\pi/6, \pi)$	$(-\alpha-\beta, -3\alpha-2\beta),\ (-2\alpha-\beta, -3\alpha-2\beta)$

Теперь, используя данные таблиц 1 и 2, мы в состоянии выписать все пары (X, Y), которые содержат представителей каждой орбиты G, действующей на парах длинная – короткая корневые подгруппы.

Пусть вначале характеристика основного поля отлична от 3. Мы будем предполагать это до конца §5.

Прежде всего сделаем два редукционных шага.

Каждая рассматриваемая пара (X, Y) может быть сопряжением приведена к одному из двух видов (X_δ, X_γ) или $(X_\delta, X_{\sigma,\lambda})$ и, таким образом, соответствует одному из вариантов, перечисленных в таблицах 1, 2. Будем говорить, что пара подгрупп (X, Y) принадлежит варианту N, если ей соответствует конфигурация корней в точности такая же, как в варианте N таблиц 1, 2.

Назовем *копией* варианта N, $1 \leqslant N \leqslant 7$, пару множеств корней, возникающую в описании X и Y в лемме 2, где (X, Y) принадлежит варианту N. Копия может иметь одну из следующих двух возможных форм: $(\{\delta\}, \{\gamma\})$ или $(\{\delta\}, \{\sigma, \lambda\})$. Из следующей леммы вытекает, что вариант определяет свою копию однозначно с точностью до сопряжения.

Лемма 3. *Все копии, принадлежащие к одному и тому же варианту таблиц 1, 2, сопряжены некоторым элементом группы Вейля.*

Доказательство. Во всех случаях (варианты 1, 3, 5, 7) данным элементом будет $w_\alpha \in W$.

Из этой леммы следует, что пары подгрупп, принадлежащие к одному варианту сопряжены. Таким образом, пары подгрупп параметризуются углами θ и (ψ_1, ψ_2).

Лемма 4. *Варианты* 1 *и* 4, 3 *и* 6 *сопряжены в* G.

Доказательство. Действительно, в вариантах 4 и 1 имеем:

$$x_{-\alpha}(\pm\tfrac{1}{3})X_\delta x_{-\alpha}(\mp\tfrac{1}{3}) = X_\delta,$$
$$x_{-\alpha}(\pm\tfrac{1}{3})\{x_{\alpha+\beta}(s)x_b(s)\}x_{-\alpha}(\mp\tfrac{1}{3}) = X_\rho.$$

В вариантах 6 и 3:

$$x_{-\alpha-\beta}(\pm\tfrac{1}{3})X_\delta x_{-\alpha-\beta}(\mp\tfrac{1}{3}) = X_\delta,$$
$$x_{-\alpha-\beta}(\pm\tfrac{1}{3})\{x_{-2\alpha-\beta}(s)x_{-3\alpha-\beta}(s)\}x_{-\alpha-\beta}(\mp\tfrac{1}{3}) = X_{-\rho}.$$

Таким образом, чтобы закончить доказательство теорем, мы должны описать порождения пар длинной и короткой корневых подгрупп $\langle X, Y\rangle$ в пяти случаях.

Случаи, перечисленные в следующей таблице 3, в точности соответствуют случаям теоремы 1. Они возникают при $\mathrm{char}\, K \neq 3$. Если $\mathrm{char}\, K = 3$ (теорема 2), реализуются только варианты 1, 2, 3, которые отвечают случаям (LS1), (LS2), (LS4). В следующем параграфе мы рассматриваем последовательно все случаи, предполагая, что характеристика поля отлична от 3. Однако, так как в случаях (LS2) и (LS4) рассуждения не зависят от характеристики (в последнем случае $K \neq \mathbb{F}_3$), то нам останется разобрать только случай (LS1) при $\mathrm{char}\, K = 3$ и (LS4) при $K = \mathbb{F}_3$. Это будет сделано в §6.

Положим $x_\tau = x_\tau(t)$ и соберем представителей орбит в следующей таблице.

Таблица 3

случай	вариант	представители	
(LS1)	1, 4	$\{x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{2\alpha+\beta}\}$
(LS2)	2	$\{x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{\alpha}\}$
(LS3)	5	$\{x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{\alpha}x_{-\beta}\}$
(LS4)	3, 6	$\{x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-2\alpha-\beta}\}$
(LS5)	7	$\{x_{3\alpha+2\beta}\}$	$\{x_{-2\alpha-\beta}x_{-3\alpha-2\beta}\}$

§5. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе мы описываем порождения $\langle X, Y\rangle$, где X – длинная, а Y – короткая корневые подгруппы. При этом мы вычисляем количество длинных и коротких корневых подгрупп, содержащихся в $\langle X, Y\rangle$.

Напомним, что по [1], теорема 1, любой длинный корневой элемент сопряжён в U элементу вида $x_{\mu}(s)$, μ – длинный корень. Поскольку при вычислении количества корневых подгрупп, содержащихся в $\langle X, Y\rangle$, мы будем работать внутри группы U, то для выяснения того, является ли произвольный элемент однопараметрической подгруппы $x(t)$, $t \in K$, длинным или коротким корневым элементом, необходимо выяснить разрешимость относительно $u \in U$ следующих уравнений:

$$ux(t)u^{-1} = x_{\mu}(s), \tag{1}$$

$$ux(t)u^{-1} = x_{\gamma}(s), \tag{2}$$

$$ux(t)u^{-1} = x_{\sigma}(s)x_{\lambda}(s), \tag{3}$$

где μ – длинный положительный корень, а γ, σ и λ имеют тот же смысл, что и в лемме 1, и являются положительными.

Перейдем к анализу каждого случая в отдельности.

(LS1). Здесь $D = \langle x_{\delta}(t), x_{\rho}(s)\rangle \sim X \times Y$. Однопараметрические подгруппы $\{x_{\delta}(kt)x_{\rho}(t)\}$, когда $k \in K$, являются короткими корневыми подгруппами.

(LS2). $D = \langle x_{\delta}(t), x_{\alpha}(s)\rangle \sim X \times Y$.

Рассмотрим следующие уравнения относительно $u \in U$:

$$ux_{3\alpha+2\beta}(kt)x_\alpha(t)u^{-1} = \text{ одна из правых частей (1), (2), (3).}$$

Легко видно, что два корневых элемента не уничтожаются никаким сопряжением и $x_\beta(*)$ не появится в этом выражении ни в каком случае. Следовательно, $|\Lambda| = |\Omega| = 1$.

(LS3). $D = \langle x_\delta(t), x_\alpha(s)x_{-\beta}(s)\rangle \sim XYZ$, где $Z \sim [X_\delta, X_{\alpha,-\beta}] = X_{3\alpha+\beta}$.

(LS4). $D = \langle x_\delta(t), x_{-\rho}(s)\rangle \sim \langle x_\beta(t), x_\alpha(s)\rangle \simeq U(G_2, K)$.

Вычисляя коммутаторы элементов D, получим, что элементарные корневые подгруппы $X_{3\alpha+\beta}$, $X_{3\alpha+2\beta}$ и $\{x_{\alpha+\beta}(ts)x_{2\alpha+\beta}(-ts^2), t, s \in K\}$ содержатся в D.

Если $K \neq \mathbb{F}_2$, отсюда нетрудно вывести, что $X_{\alpha+\beta}$ и $X_{2\alpha+\beta}$ также подгруппы D.

Пусть $K = \mathbb{F}_2$. Тогда D содержит элемент $x_{\alpha+\beta}(1)x_{2\alpha+\beta}(1)$, но не содержит $x_{\alpha+\beta}(1)$ и $x_{2\alpha+\beta}(1)$. Откуда следует, что D – подгруппа индекса 2 в $U(G_2, K)$.

(LS5). $D = \langle x_\delta(t), x_{-\rho}(s)x_{-\delta}(s)\rangle$.

Положим $x(t) = x_\delta(t)$, $y(s) = x_{-\rho}(s)x_{-\delta}(s)$. Далее, рассмотрим элементы $w(t) = x(t)y(-t^{-1})x(t)$, $h(t) = w(t)w(-1)$ и вычислим следующие произведения:

$$u_1(t,s) = w(t)x(s)w(-t)y(t^{-2}s) \quad \text{и} \quad u_2(t,s) = h(t)h(s)h(t^{-1}s^{-1}).$$

Мы имеем

$$u_1(t,s) = x_\beta(-t^{-2}s)x_{-\alpha}(t^{-2}s)x_{-2\alpha-\beta}(-t^{-2}s)x_{-3\alpha-\beta}(-t^{-4}s^2 - t^{-3}s),$$

$$u_2(t,s) = x_\beta(g_1(t,s))x_{-\alpha}(g_2(t,s))x_{-3\alpha-\beta}(g_3(t,s)),$$

где $g_1(t,s) = 4ts - t^2s^2 + t - ts^{-1} - 8 + 2t^{-1} + 3s^{-1}$, $g_2(t,s) = 3 - ts - t^{-1} - s^{-1}$, $g_3(t,s) = ts - 1 - t^{-1} + t^{-2} - t^{-1}s^{-1} + t^{-1}s^{-2}$.

Предположим, что $K \neq \mathbb{F}_2$. В этом случае, вычисляя $[u_1(t,s), u_2(t',s')]$ и варьируя t и s, мы можем получить все элементы $X_{-3\alpha-\beta}$.

Теперь, $[X_\delta, X_{-3\alpha-\beta}] = X_\beta$ и, следовательно, D порождается X_δ, $X_{-\delta}$ и X_γ, где $\gamma \in S$ и $S = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta, 3\alpha+\beta\}$.

Если $K = \mathbb{F}_2$, данная подгруппа порождается подгруппами X_δ, $X_{-3\alpha-\beta}$, X_β и элементами $x_{-\delta}(1)x_{-\rho}(1)$, $x_{-\rho}(1)x_{-\alpha}(1)$, $x_{-\rho}(1)x_{\alpha+\beta}(1)$. Таким образом, D имеет индекс 2 в описанной выше подгруппе.

§6. Доказательство теоремы 2

В этом параграфе мы рассматриваем случай $\operatorname{char} K = 3$. Как следует из леммы 3, мы должны рассмотреть только варианты 1 – 3.

Варианты 2 и 3 ($K \neq \mathbb{F}_3$) рассмотрены в §5 (см. замечание в конце §4).

В варианте 1 имеем $X \times Y \sim \langle X_\delta, X_\rho \rangle$, и однопараметрические подгруппы $\{x_\delta(kt)x_\rho(t)\}$, k – фиксировано, не являются корневыми, так как X_ρ и $X_{\delta-\rho}$ коммутируют друг с другом (ср. обсуждение в случае (LS1)). Варианты 1 и 2 составляют случай (LT1) теоремы 2.

Пусть поле $K = \mathbb{F}_3$ в случае (LS4) §5. Тогда, вычисляя коммутаторы элементов группы $D \sim \langle x_\beta(t), x_\alpha(s) \rangle$, получим, что D содержит подгруппу вида $\{x_{\alpha+\beta}(ts)x_{3\alpha+\beta}(2ts^3),\ t,\ s \in K\}$ и не содержит $X_{\alpha+\beta}$ и $X_{3\alpha+\beta}$. Откуда следует результат.

Доказательства теорем полностью завершены.

Литература

1. Н. А. Вавилов, *О геометрии длинных корневых подгрупп в группах Шевалле.* — Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1, вып.1 (1988), 5–10.
2. Н. А. Вавилов, *Взаимное расположение длинной и короткой корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1, вып.1 (1989), 1–7.
3. Н. А. Вавилов, *Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор.* — Труды Ленингр. Мат. Общ. **1** (1990), 64–109.
4. А. С. Кондратьев, *Подгруппы конечных групп Шевалле.* — УМН. **41**, No. 1 (1986), 57–96.
5. В. В. Нестеров, *Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле.* — Докл. РАН. **357** (1997), 302–305.
6. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М.: Мир, 1975, 262 с.
7. M. Aschbacher and G. M. Seitz, *Involutions in Chevalley groups over fields of even order.* — Nagoya Math. J. **63** (1976), 1–91.
8. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Wiley: London et al., 1972, p. 331 p.
9. B. N. Cooperstein, *The geometry of root subgroups in exceptional groups.* — Geometria dedicata **8**, No. **3** (1979), 317–381; II **15**, No. **1** (1983), 1–45.
10. B. N. Cooperstein, *Geometry of long root subgroups in groups of Lie type.* — Proc. Symp. Pure Math. **37** (1980), 243–248.
11. B. N. Cooperstein, *Maximal subgroups of* $\mathrm{G}_2(2^n)$. — J. Algebra **70**, No. **1** (1981), 23–36.
12. J. Hurrelbrink, U. Rehmann, *Eine endliche Präsentation der Gruppe* $\mathrm{G}_2(\mathbb{Z})$. — Math. Z. **141** (1975), 243–251.

13. W. M. Kantor, *Subgroups of classical groups generated by long root elements.* — Trans. Amer. Math. Soc. **248,** No. **2** (1979), 347–379.
14. W. M. Kantor, *Generation of linear groups.* The Geom. Vein: Coxeter Festschift. Springer-Verlag, Berlin et al., 1981, pp. 497–509.
15. Li Shang Zhi, *Maximal subgroups containing short root subgroups in* $\mathrm{PSp}(2n, \mathbb{F})$. — Acta Math. Sinica, New ser. **3,** No. **1** (1987), 82–91.
16. B. S. Stark, *Some subgroups of* $\Omega(V)$ *generated by groups of root type.* — J. Algebra **17,** No. **1** (1974), 33–41.
17. B. S. Stark, *Irreducible subgroups of orthogonal groups generated by groups of root type 1.* — Pacific J. Math. **53,** No. **2** (1974), 611–625.
18. F. G. Timmesfeld, *Groups generated by k-root subgroups.* — Invent. Math. **106** (1991), 575–666.

Nesterov V. V. The arrangement of the long and short root subgroups in the Chevalley group of type G_2.

We describe subgroups generated by a long and short root subgroups in a Chevalley group of type G_2 and classify orbits of the group acting on such pairs by simultaneous conjugation.

Балтийский государственный
технический университет

Поступило 20 июня 2000 г.