Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

А. С. Сивацкий

О ПРИВЕДЕННОЙ ГРУППЕ УАЙТХЕДА АФФИННОЙ КОНИКИ

Пусть F – поле, характеристика которого не равна 2, $a, b \in F^*$, X – аффинная коника над F, определяемая уравнением $ax^2 + by^2 = 1$, $A = F[x,y]/(ax^2+by^2-1)$ – алгебра регулярных функций на X, $F(X)$ – поле рациональных функций на X, $SK_1 A = SL(A)/E(A)$ – приведенная группа Уайтхеда алгебры A. Основной целью данной работы является вычисление $SK_1 A$, не использующее K-теории Квиллена и базирующееся на K-теории Милнора. В качестве следствий мы сможем вычислить для некоторых простых идеалов $\mathfrak{p}$ группу $SK_1 \mathfrak{p}$, выяснить в каких случаях $SK_1 A$ тривиальна, и когда матрица $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ -by & ax & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ является произведением элементарных трансвекций порядка 3. Аналогичный вопрос можно также решить и для матрицы $\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix}$ при помощи одной теоремы А.А. Суслина.

Все K-группы, которые будут рассматриваться, являются K-группами Милнора. В дальнейшем нам потребуются некоторые определения и факты из теории квадратичных форм над полями. Невырожденная квадратичная форма над полем F называется изотропной, если она имеет нетривиальный нуль и анизотропной в противном случае. Она называется универсальной, если множество ее ненулевых значений совпадает с F^*. Форма f называется гиперболичной, если она разлагается в прямую сумму гиперболических плоскостей. В этом случае будем писать $f = 0$, так как f принадлежит нулевому классу в кольце Витта поля F. Через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ будем обозначать диагональную форму от n переменных $a_1 {x_1}^2 + \dots + a_n {x_n}^2$. Форма вида $\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ будет обозначаться $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$. Она называется n-формой Пфи-

Ключевые слова: группа Уайтхеда, символ Меннике, квадратичная форма, стабильный ранг.

стера и ее изотропность равносильна ее гиперболичности, а также тому, что a_n является значением формы $\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle$ ([6]). Форма Пфистера $\langle\langle u, v\rangle\rangle$ гиперболична в точности тогда, когда алгебра кватернионов $(u, v)_F$ расщеплена над F, то есть представляет нулевой элемент в группе Брауэра поля F ([6]). Пусть $I(F)$ – фундаментальный идеал кольца Витта, то есть идеал классов эквивалентности четномерных форм. Пусть, далее, $D = (a, b)_F$ – алгебра кватернионов над F, определяемая элементами a и b, $\operatorname{Nrd} D$ – группа ненулевых значений редуцированной нормы алгебры D. Группа $\operatorname{Nrd} D$ есть группа ненулевых значений формы Пфистера $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ ([6]). Через N обозначим группу значений нормы квадратичного расширения $F(\sqrt{-ab})/F$.

Предложение 1. *$SK_1 A \simeq \operatorname{Nrd} D/N$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что интерес представляет лишь случай, когда $\sqrt{-ab} \notin F$, так как в противном случае $\operatorname{Nrd} D = N = F^*$, $A \simeq F[t, t^{-1}]$, и с помощью алгоритма Евклида легко доказывается, что тогда $SK_1 A = 1$. Поэтому с этого момента мы будем считать, что $\sqrt{-ab} \notin F$.

Обозначим через $\overline{X}$ проективное замыкание X, то есть проективную конику, определяемую уравнением $ax^2 + by^2 = z^2$. Под точкой коники будем всегда подразумевать замкнутую точку в смысле топологии Зариского. Для произвольной точки $p \in \overline{X}$ положим $F_p = A/\mathfrak{m}_p$, где $\mathfrak{m}_p$ – максимальный идеал, соответствующий p. Как обычно будем называть F_p полем вычетов кольца A в точке p.

Воспользуемся теперь частью точной последовательности Басса-Тейта для дедекиндова кольца ([3], 13.1):

$$K_2F(X) \xrightarrow{\bigoplus d_p} \bigoplus_{p\in X} K_1F_p \xrightarrow{g} K_1A \longrightarrow K_1F(X), \tag{1}$$

которая применима в нашей ситуации, так как X – неособое многообразие, и, следовательно, кольцо A дедекиндово. В этой последовательности $d_p\{a_1, a_2\} = (-1)^{v_p(a_1)v_p(a_2)} \frac{a_1{}^{v_p(a_2)}}{a_2{}^{v_p(a_1)}} \pmod p$ – ручной символ, соответствующий дискретному нормированию v_p, связанному с точкой p, $g(a(\operatorname{mod}\mathfrak{p})) = \begin{bmatrix} a \\ \mathfrak{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ c \end{bmatrix}$ – символ Меннике (напомним, что $a' \equiv a(\operatorname{mod}\mathfrak{p}), a' \equiv 1(\operatorname{mod}\mathfrak{q}), \mathfrak{p}\mathfrak{q} = (c)$, и легко видеть, что символ $\begin{bmatrix} a \\ \mathfrak{p} \end{bmatrix}$ определен корректно ([3], стр. 136)). Гомоморфизм $K_1A \longrightarrow K_1F(X)$ индуцирован вложением $A \longrightarrow F(X)$, и, следовательно, $SK_1A = \mathrm{Im}\ g$.

Нам потребуется также следующая точная последовательность для коники, полученная А. С. Меркурьевым:

$$K_2F(X) \xrightarrow{\bigoplus d_p} \bigoplus_{p\in \overline{X}} K_1F_p \xrightarrow{\prod N_{F_p/F}} K_1F. \tag{2}$$

(Элементарное доказательство точности этой последовательности можно найти в [7]). Легко видеть, что $\mathrm{Nrd}\, D$ есть группа порожденная всеми $N_{L/F}L^*$, где L пробегает все поля расщепления алгебры D конечной степени над F (то есть алгебра $D_L = D \underset{F}{\otimes} L$ является матричной над L). Действительно, используя гомоморфизм нормы $N_{L/F} : I^3(L)/I^4(L) \longrightarrow I^3(F)/I^4(F)$ для конечного расширения полей L/F ([6]) получаем, что для произвольного $u \in L^*$

$$\langle\langle a, b, N_{L/F}u\rangle\rangle = N_{L/F}\langle\langle a, b, u\rangle\rangle = 0,$$

так как $\langle\langle a, b\rangle\rangle = 0$. Следовательно, $N_{L/F}u \in \mathrm{Nrd}\, D$. С другой стороны, если D является телом, $x \in D^*$, $x \notin F^*$, $L \subset D$ – максимальное подполе алгебры D, то легко видеть, что $\mathrm{Nrd}\,(x) = N_{F(x)/F}(x)$. Очевидно также, что для любой точки $p \in \overline{X}$ поле F_p является полем расщепления D. Таким образом, $\mathrm{Nrd}\, D = \prod\limits_{p\in \overline{X}} N_{F_p/F}(F_p^*)$.

Пусть $s \in \mathrm{Nrd}\, D$, $s = N_{F_\infty/F}(x_\infty) \prod\limits_{i=1}^{k} N_{F_{p_i}/F}(x_i)$, где $p_1, \dots, p_k$ – некоторые замкнутые точки коники $\overline{X}$ отличные от ∞, ∞ – бесконечно удаленная точка на $\overline{X}$, определяемая уравнением $ax^2 + by^2 = 0$, $x_\infty, x_1, \dots, x_k$ – некоторые элементы, принадлежащие соответствующим полям вычетов. Для краткости будем записывать последнее равенство в виде $s = N(x_1, \dots, x_k, x_\infty)$. Определим отображение $h : \mathrm{Nrd}\, D \longrightarrow SK_1A$ следующим образом: $h(s) = g(x_1, \dots x_k)$. Покажем, что h корректно определено. Действительно, если

$$s = N(x_1, \dots, x_k, x_\infty) = N({x_1}', \dots, {x_k}', {x_\infty}'),$$

то, очевидно,

$$N(x_1, \dots, x_k, x_\infty)N({x_1'}^{-1}, \dots, {x_k'}^{-1}, {x_\infty'}^{-1}) = 1.$$

Из точной последовательности (2) следует, что существует $u \in K_2F(X)$ такой, что

$$\bigoplus_{p \in \overline{X}} d_p(u) = (x_1, \dots, x_k, x_\infty)({x_1'}^{-1}, \dots, {x_k'}^{-1}, {x_\infty'}^{-1}),$$

и, следовательно,

$$\bigoplus_{p \in X} d_p(u) = (x_1, \dots, x_k)({x_1'}^{-1}, \dots, {x_k'}^{-1}).$$

Из точной последовательности (1) следует, что $g(\bigoplus\limits_{p \in X} d_p(u)) = 0$, и поэтому отображение h корректно определено. Очевидно, что h является гомоморфизмом. Так как $\mathrm{Im}\ g = SK_1A$, то h сюръективен. Пусть $h(s) = 0$, $s = N(x_1, \dots, x_k, x_\infty)$. Из точной последовательности (1) получаем, что существует $u \in K_2F(X)$ такой, что $\bigoplus\limits_{p \in X} d_p(u) = (x_1, \dots, x_k)$. Отсюда $\bigoplus\limits_{p \in \overline{X}} d_p(u) = (x_1, \dots, x_k, d_\infty(u))$, и, следовательно,

$$1 = \prod_{p \in \overline{X}} N_{F_p/F} d_p(u) = N(x_1, \dots, x_k, d_\infty(u)) = sN_{F_\infty/F}(d_\infty(u)),$$

то есть $s \in N$. Предложение доказано. $\bullet$

В следующем утверждении нам потребуется определение приведенной группы Уайтхеда идеала.

Пусть $\mathfrak{p} \in X$. Введем следующие обозначения:

$GL_n(\mathfrak{p}) = \{\tau \in GL_n(A) : \tau \equiv 1_n \pmod{\mathfrak{p}}\}$, $SL_n(\mathfrak{p}) = GL_n(\mathfrak{p}) \cap SL_n(A)$, $E_n(\mathfrak{p})$ – нормальная подгруппа в $E_n(A)$, порожденная трансвекциями τ такими, что $\tau \equiv 1_n \pmod{\mathfrak{p}}$, $GL(\mathfrak{p}) = \lim GL_n(\mathfrak{p})$, $SL(\mathfrak{p}) = \lim SL_n(\mathfrak{p})$, $E(\mathfrak{p}) = \lim E_n(\mathfrak{p})$. Как известно, $E(\mathfrak{p})$ – нормальная подгруппа в $GL(\mathfrak{p})$ ([3], 4.2). Положим $K_1\mathfrak{p} = GL(\mathfrak{p})/E(\mathfrak{p})$, $SK_1\mathfrak{p} = SL(\mathfrak{p})/E(\mathfrak{p})$. По теореме о стабилизации K_1-функтора ([1], гл. V, 4.2) $SK_1\mathfrak{p} = SL_n(\mathfrak{p})/E_n(\mathfrak{p})$ для любого $n \geq 3$.

Следствие 2.

1) *Пусть F – конечное поле и $\mathfrak{p} \in X$. Тогда $SK_1\mathfrak{p} \simeq SK_1A = 1$.*

2) *Пусть F – произвольное поле и $\mathfrak{p}$ – рациональная точка на X, (это означает, что $A/\mathfrak{p} = F$). Тогда $SK_1\mathfrak{p} = SK_1A = F^*/N$.*

Доказательство. Воспользуемся точной последовательностью

$$K_2A \longrightarrow K_2A/\mathfrak{p} \longrightarrow K_1\mathfrak{p} \longrightarrow K_1A \longrightarrow K_1A/\mathfrak{p} \qquad (*)$$

([3], 6.2).

В случае 1) поле $A/\mathfrak{p}$ конечно, и, следовательно, $K_2A/\mathfrak{p} = 0$ ([3], 9.9, 11.1). В случае 2) $A/\mathfrak{p} = F$, и, очевидно, что в обоих случаях гомоморфизм $K_2A \longrightarrow K_2A/\mathfrak{p}$ сюръективен. Из точности последовательности $(*)$ мы получаем, что последовательность

$$1 \longrightarrow K_1\mathfrak{p} \longrightarrow K_1A \longrightarrow K_1A/\mathfrak{p}$$

точна, а, следовательно, точна и индуцированная ею последовательность

$$1 \longrightarrow SK_1\mathfrak{p} \longrightarrow SK_1A \longrightarrow SK_1A/\mathfrak{p}.$$

Поскольку $SK_1A/\mathfrak{p} = 1$, то $SK_1\mathfrak{p} \simeq SK_1A$. В случае 1) $SK_1A = \operatorname{Nrd} D/N = 1$, так как форма $\langle 1, ab\rangle$ универсальна. В случае 2) $SK_1A = \operatorname{Nrd} D/N = F^*/N$, так как в силу наличия рациональной точки форма $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ универсальна.

(Отметим, что естественный изоморфизм $SK_1\mathfrak{p} \simeq SK_1A$ при условиях 1) или 2) выполняется для любой кривой X над полем F). $\bullet$

Следствие 3. *Пусть $n \geqslant 3$. В условиях предложения 1 обозначим через α канонический образ матрицы $\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix} \in SL_2(A)$ в $SL_n(A)$. Тогда $\alpha \in E_n(A)$ в том и только в том случае, когда $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\operatorname{sr}(A)$ стабильный ранг кольца A (см., например, [2], 7). Отметим вначале, что $\operatorname{sr}(A) \leq \dim A + 1 = 2$ ([1], гл. V, т. 3.5). По теореме о стабилизации K_1-функтора ([1], гл. V, 4.2) мы получаем, что

$$SK_1(A) = SL(A)/E(A) = SL_n(A)/E_n(A)$$

для любого $n \geq 3$. Если $\sqrt{-ab} \in F$, то, очевидно, $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$, $\operatorname{Nrd} D = N = F^*$, $SK_1(A) = 1$ и все доказано. Пусть теперь $\sqrt{-ab} \notin F$ и $\sqrt{b} \notin F$. Тогда $\left[\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \mathfrak{p} \end{bmatrix}$, где $\mathfrak{p} = (x)$. Так как $N_{F_\mathfrak{p}/F}\, y = -\frac{1}{b}$, то по предложению 1 получаем:

$\alpha = 0 \iff -\frac{1}{b} \in N \iff$ форма $\langle 1, b, ab\rangle$ изотропна $\iff \langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$.

В случае когда $\sqrt{b} \in F$ имеем $(x) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, где $\mathfrak{p}_1 = (x, y - \frac{1}{c}) \in X$, $\mathfrak{p}_2 = (x, y + \frac{1}{c}) \in X$, $b = c^2$, и аналогичные вычисления дают тот же результат. $\bullet$

В связи со следствием 3 возникает естественный вопрос. В каком случае $\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix} \in E_2(A)$? Имеет место следующее

Предложение 4. $\alpha = \begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix} \in E_2(A)$ *тогда и только тогда, когда* $\sqrt{-ab} \in F$.

Доказательство. Если $\sqrt{-ab} \in F$, то элемент $x + y\sqrt{-\frac{b}{a}}$ является обратимым в A, и, следовательно, существует матрица $\beta \in E_2(A)$ такая, что $(1,0)\beta = (x,y)$. Стало быть, $\beta = \begin{pmatrix} x & y \\ * & * \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix} \beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, и значит, $\begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix} \in E_2(A)$.

Обратное утверждение вытекает из одной теоремы А. А. Суслина ([4]). Нам будет необходим лишь частный случай. Для полноты изложения приведем набросок доказательства. Пусть $\sqrt{-ab} \notin F$, v – дискретное нормирование, связанное с бесконечной точкой коники $\overline{X}$, k – соответствующее поле вычетов. Назовем матрицу $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(A)$ допустимой, если

1) $p_{ij} \neq 0$ для всех $1 \leq i,j \leq 2$.
2) $v(p_{11}) = v(p_{21})$.
3) $\frac{p_{21}}{p_{11}} \notin F^*$.

Лемма ([4]). *Если* $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ *– допустимая матрица, то*

1) $v(p_{12}) = v(p_{22})$.
2) *Образы элементов* $\frac{p_{21}}{p_{11}}$ *и* $\frac{p_{22}}{p_{12}}$ *в поле* k *совпадают.*
3) $P \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *– допустимая матрица при любом* $c \in A$.

Легко видеть, что любая матрица из $E_2(A)$ представляется как произведение матриц вида $\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и что $\alpha = \begin{pmatrix} x & y \\ -by & ax \end{pmatrix}$ допустима. Так как, очевидно, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не является допустимой, то $\alpha \notin E_2(A)$. $\bullet$

Предложение 5. *Следующие два условия равносильны.*

1) $SK_1A = 1$.
2) *Или* $N = F^*$ *(то есть форма* $\langle 1, ab\rangle$ *универсальна и, в частности,* $\langle\langle a, b\rangle\rangle = 0$*), или* $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$ *и мультипликативная группа* N *замкнута относительно сложения (в частности, поле* F *является формально вещественным).*

Доказательство. 2) $\Longrightarrow$ 1) Если $N = F^*$, то $\operatorname{Nrd} D = N = F^*$, откуда в силу предложения 1 получаем $SK_1A = 1$. Пусть $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$ и группа N замкнута относительно сложения. Тогда форма $\langle 1, b, ab\rangle$ изотропна и, следовательно, $-b = u^2 + abv^2$ при некоторых $u, v \in F$. Кроме того, $N \neq F^*$ (иначе бы $0 \in N + N$), и, значит, форма $\langle 1, ab\rangle$ анизотропна. Отсюда

$$x_1{}^2 - ax_2{}^2 - bx_3{}^2 + abx_4{}^2 = (x_1{}^2 + abx_4{}^2) - b(x_3{}^2 + ab(\frac{x_2}{b})^2) =$$
$$= (x_1{}^2 + abx_4{}^2) + (u^2 + abv^2)(x_3{}^2 + ab(\frac{x_2}{b})^2) \in N + N \subset N,$$

и, следовательно, $\operatorname{Nrd} D = N$.

1) $\Longrightarrow$ 2) Пусть $SK_1A = 1$, и $N \neq F^*$. Так как $\operatorname{Nrd} D = N$, то существуют $u, v \in F$ такие, что $-b = u^2 + abv^2$. Следовательно, форма $\langle 1, b, ab\rangle$ изотропна, то есть $\langle\langle -a, -b\rangle\rangle = 0$. Кроме того, $\operatorname{Nrd} D \neq F^*$, следовательно, форма $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ анизотропна, и, значит,

$$N + N = N - bN \subset \operatorname{Nrd} D = N,$$

что завершает доказательство. $\bullet$

В оставшейся части работы рассмотрим следующие вопросы, являющиеся, насколько нам известно, открытыми.

Пусть F – поле, $\operatorname{char} F \neq 2$, $a_1, \ldots, a_n \in F^*$,

$$A = F[x_1, \ldots x_n]/(a_1x_1{}^2 + \cdots + a_nx_n{}^2 = 1)$$

– кольцо регулярных функций квадрики, определяемой квадратичной формой $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. Возникают следующие вопросы:

1) Когда унимодулярная строка $(x_1, \ldots, x_n)$ является стабильной, то есть существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in A$ такие, что строка $(x_1 - \alpha_1x_n, \ldots, x_{n-1} - \alpha_{n-1}x_n)$ унимодулярна?

2) Когда строка $(x_1, \ldots, x_n)$ является строкой некоторой матрицы из $E_n(A)$?

3) Когда строка $(x_1, \ldots, x_n)$ является строкой некоторой матрицы из $SL_n(A)$?

Основанием для первого вопроса служит следующее замечание. Если строка $(x_1, \ldots, x_n)$ не является стабильной, то $n \leq \mathrm{sr}(A)$. С другой стороны, имеет место неравенство $\mathrm{sr}(A) \leq \mathrm{sr}(F[t_1, \ldots, t_{n-1}])$ ([2], т. 20.5), где $t_1, \ldots, t_{n-1}$ – независимые переменные, и, таким образом, $\mathrm{sr}(F[t_1, \ldots, t_{n-1}]) = n$ (последнее равенство известно только в том случае, когда $K_{n-1}(F) \neq 0$ ([5], 4.7)).

Гипотеза. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Строка* $(x_1, \ldots x_n)$ *стабильна.*
2) *Форма* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *изотропна.*
3) *Строка* $(x_1, \ldots x_n)$ *принадлежит некоторой матрице из* $E_n(A)$.

Легко видеть, что 2) $\Longrightarrow$ 1) $\Longrightarrow$ 3). Действительно, импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) очевидна. Пусть теперь форма $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ изотропна. Тогда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$ такие, что $a_1{\alpha_1}^2 + \cdots + a_{n-1}{\alpha_{n-1}}^2 + a_n = 0$. Строка $(x_1 - \alpha_1 x_n, \ldots, x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)$ является унимодулярной, так как

$$\begin{aligned}(x_1 - \alpha_1 x_n)(a_1 x_1 + a_1\alpha_1 x_n) + (x_2 - \alpha_2 x_n)(a_2 x_2 + a_2\alpha_2 x_n) + \ldots \\ +(x_{n-1} - \alpha_{n-1} x_n)(a_{n-1} x_{n-1} + a_{n-1}\alpha_{n-1} x_n) = \\ = a_1{x_1}^2 + \cdots + a_{n-1}{x_{n-1}}^2 - (a_1{\alpha_1}^2 + \cdots + a_{n-1}{\alpha_{n-1}}^2){x_n}^2 = \\ = a_1{x_1}^2 + \cdots + a_n{x_n}^2 = 1.\end{aligned}$$

Заметим, что по предложению 4 при $n = 2$ имеет место также импликация 3) $\Longrightarrow$ 2), и, следовательно, в этом случае гипотеза верна.

В заключение я хочу выразить признательность А. В. Степанову за полезное обсуждение вопросов, рассматриваемых в данной работе.

Литература

1. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* — "Мир", М (1973).
2. Л. Н. Васерштейн, А. А. Суслин, *Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория.* — Изв. Акад. Наук СССР **40, No. 5** (1976), 993–1054.
3. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* — "Мир", М (1974).

4. А. А. Суслин, *Об одной теореме Кона.* — Записки научных семинаров ЛОМИ, “Кольца и модули” **64** (1976), 127–130.
5. А. А. Суслин, *Mennicke symbols and their applications in the K-theory of fields.* — Lecture Notes in Math. **966** (1982), 334–356.
6. T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms.* — Massachusetts: Benjamin (1973).
7. A. R. Wadsworth, *Merkurjev's elementary proof of Merkurjev's theorem.* — Contemp. Math. **55** (1986), 741–776.

Sivatsky A. S. On the reduced Whitehead group of an affine conic.

In the framework of Milnor's K-theory we compute SK_1 of the ring of regular functions on a conic. We also investigate unimodular rows of this ring from the point of view of the theory of quadratic forms.

С.-Петербургский государственный
электротехнический университет
Санкт-Петербург, 197376, Россия
sivatsky@AS3476.spb.edu

Поступило 26 июня 2000 г.