Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 272, 2000 г.

**В. М. Цветков**

# ПРОСТОЙ ПРИМЕР РАСШИРЕНИЙ БЕЗ ЦЕЛОГО БАЗИСА

**1.** Пусть $k$ – поле алгебраических чисел, $K/k$ – конечное расширение полей, и $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_K$ – кольца целых элементов в $k$ и $K$, соответственно.

Интересуемся, когда $\mathcal{O}_K$ как $\mathcal{O}_k$-модуль является свободным, т.е. когда есть целый базис в $\mathcal{O}_K$.

Напомним, что если $A$ – дедекиндово кольцо, а $V$ – конечнопорожденный $A$-модуль без кручения, то $V$ разлагается в конечную прямую сумму модулей $V = I_1 \oplus \ldots \oplus I_s$, в которой каждое слагаемое изоморфно ненулевому идеалу в кольце $A$, причем два разложения $I_1 \oplus \ldots \oplus I_s$; $J_1 \oplus \ldots \oplus J_t$ дают изоморфные $A$-модули тогда и только тогда (теорема Штейница–Шевалле–Фаддеева, см. [1]), когда число слагаемых одинаково (ранги модулей равны, т.е. $s = t$), и классы модулей $I_1 \cdot \ldots \cdot I_s$; $J_1 \cdot \ldots \cdot J_t$, как отмеченные элементы в группе классов идеалов $\mathrm{cl}\ A$ кольца $A$ совпадают.

В случае расширения $K/k$ на модуле $V = \mathcal{O}_K$ имеем невырожденную билинейную форму следа $\mathcal{O}_K \underset{\mathcal{O}_k}{\otimes} \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_k$. В частности, для $A = \mathcal{O}_K$ определен дискриминант $\Delta_V$ этой формы как идеал в $A$, равный произведению дискриминантов всех локализаций $V_\mathfrak{p} = V \underset{A}{\otimes} A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ пробегает все ненулевые простые идеалы в $A$. Для указанной формы имеет место формула Артина–Фрёлиха

$$\mathrm{cl}\,(V)^2 = \mathrm{cl}\,(\Delta_V)$$

(см. [2–4]).

**Следствие.** *Если число классов идеалов $h_k$ поля $k$ нечетно, то необходимое и достаточное условие наличия целого базиса в $K/k$ состоит в том, что $\Delta_{K/k}$ – главный идеал.*

Действительно, в этом случае $\mathrm{cl}\,(\Delta_V)$, а значит, и $\mathrm{cl}\,(V)$ – нулевой идеал, и соответствующий модуль свободен. Обратное очевидно.

В частности, как будет показано ниже, таким расширением, имеющим целый базис, является расширение $K = k(\sqrt{-1})$, где $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$, $p$ – простое число, $p \equiv 3(\operatorname{mod} 4)$.

**2.** Пусть $k$ – поле алгебраических чисел, и $k$ имеет $r_1$ вещественных и $r_2$ пар комплексных нормирований ($k \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1} \oplus \mathbb{C}^{r_2}$). Через $\widetilde{\mathrm{cl}}_k$ обозначаем группу классов идеалов в узком смысле, а через $\mathrm{cl}_k$ – в обычном смысле. Напомним, что $\widetilde{\mathrm{cl}}_k$ определяется как коядро гомоморфизма $k^* \to \mathbb{Z}/2^{r_1} \oplus \mathbb{D}_k$, где $\mathbb{D}_k$ – группа всех дивизоров $k$; ненулевому элементу из $k$ сопоставляется набор всех его знаков в вещественных нормированиях, а во второй компоненте – главный идеал, соответствующий числу. Отметим, что естественный эпиморфизм $\widetilde{\mathrm{cl}}_k \to \mathrm{cl}_k$ будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда в поле $k$ встречаются единицы всех вещественных знаков.

Изложению контрпримеров существования целого базиса предпошлем следующую лемму.

**Лемма.** *Пусть $k$ – поле алгебраических чисел, $K/k$ – неразветвленное расширение полей степени два. Если в $K/k$ есть целый базис, то $K$ получается из $k$ присоединением квадратного корня из единицы, т.е. $K = k(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \in E \setminus E^2$, где $E = \mathcal{O}_k^*$ – группа единиц $k$.*

**Доказательство.** Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ – целый базис в $K/k$, $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_k\omega_1 \oplus \mathcal{O}_k\omega_2$. Тогда можно определить $\Delta_{K/k}$ как элемент фактор-полугруппы $(\mathcal{O}_k \setminus \{0\})/E^2$ с помощью равенств

$$\Delta_{K/k} \operatorname{mod} E^2 = \det \begin{Vmatrix} \mathrm{Sp}\,(\omega_1^2) & \mathrm{Sp}\,(\omega_1\omega_2) \\ \mathrm{Sp}\,(\omega_1\omega_2) & \mathrm{Sp}\,(\omega_2^2) \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 \end{Vmatrix}^2,$$

где $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ – базис, сопряженный с $\omega_1$, $\omega_2$.

В частности, для $K = k(\sqrt{d})$, $\bigl(d \in k^* \setminus (k^*)^2\bigr)$ имеем

$$\Delta_{K/k} \operatorname{mod} (k^*)^2 = \det \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{d} \\ 1 & -\sqrt{d} \end{Vmatrix}^2 \operatorname{mod} (k^*)^2 = 4d \operatorname{mod} (k^*)^2.$$

В случае наличия целого базиса имеем аналог критерия неразветвленности Дедекинда: простой идеал $\mathfrak{p}$ из $\mathcal{O}_k$ неразветвлен в $K/k$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} \nmid \Delta_{K/k} \operatorname{mod} E^2$ в полугруппе всех целых идеалов $\mathcal{O}_K$. Докажем это, опуская некоторые технические детали.

Поле $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ – совершенно. Разложение идеала $\mathfrak{p}\mathcal{O}_K = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})}$ в кольце $\mathcal{O}_K$ на простые множители индуцирует изоморфизм $\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$-алгебр

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K \cong \bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{O}_K/\mathfrak{P}\ [t]/\Big(t^{e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})}\Big),$$

где $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}\ [t]$ – алгебра полиномов от одной переменной $t$ над полем $\mathcal{O}_K/\mathfrak{P}$. Если применить критерий полупростоты Веддербарна к конечномерной ассоциативной алгебре с единицей $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K$ над совершенным полем, то получаем, что $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$ для всех $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} \nmid \Delta_{K/k}$, так как дискриминант кольца $\mathcal{O}_K$ над $\mathcal{O}_k$ переходит при редукции $\operatorname{mod} \mathfrak{p}\mathcal{O}_K$ в дискриминант $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K$.

Возвращаясь к лемме, имеем $\Delta_{K/k} \operatorname{mod} E^2 = \varepsilon \operatorname{mod} E^2$, $\varepsilon \in E$, так как все простые идеалы из $\mathcal{O}_K$ неразветвлены в $K/k$ и $\Delta_{K/k} \operatorname{mod}(k^*)^2 = 4d \operatorname{mod}(k^*)^2$, т.е. $K = k(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \in E$, и лемма доказана.

**3.** Пусть $k^{(2)}/k$ – максимальное неразветвленное во всех простых идеалах расширение периода два (на вещественные нормирования условия нет). Тогда из изоморфизма Артина для абсолютного поля классов вытекает, что группа $\operatorname{Aut}(k^{(2)}/k)$ канонически изоморфна группе $\widetilde{\mathrm{cl}}_k/(\widetilde{\mathrm{cl}}_k)^2$. В частности, если

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{\mathrm{cl}}_k/(\widetilde{\mathrm{cl}}_k)^2 > r_1 + r_2 = \dim_{\mathbb{Z}/2} E/E^2,$$

то из леммы вытекает следующее предложение.

**Предложение.** *Если поле алгебраических чисел $k$ таково, что $\dim_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{\mathrm{cl}}_k/(\widetilde{\mathrm{cl}}_k)^2 > r_1 + r_2$, то существует неразветвленное расширение этого поля степени два, в котором нет целого базиса.*

В случае, если $k = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ $\big(\Delta \equiv 0, 1 (\operatorname{mod} 4)\big)$ – квадратичное поле дискриминанта $\Delta$, хорошо известно, что $\dim_{\mathbb{Z}/2} \widetilde{\mathrm{cl}}_k/(\widetilde{\mathrm{cl}}_k)^2 = t-1$, где $t$ – число простых, делящих $\Delta$, а также, что $k^{(2)}/\mathbb{Q}$ – абелево расширение периода два. Более того, в этом случае $k^{(2)}$ является композитом $t$ квадратичных полей, в каждом из которых ветвится только одно простое число, делящее $\Delta$. В частности, для $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$, где $p$, $q$ – различные простые $\equiv 3 (\operatorname{mod} 4)$ получаем $t-1 > 1$.

**Следствие.** *Пусть* $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-pq})$, *где* $p$, $q$ *– различные простые* $\equiv 3(\mathrm{mod}\, 4)$. *Тогда поля* $k(\sqrt{-p})/k$, $k(\sqrt{-q})/k$ *– неразветвленные над* $k$, *и не имеют над ним целого базиса.*

Наименьший числовой пример дают расширения

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-21})/\mathbb{Q}(\sqrt{-21}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-21})/\mathbb{Q}(\sqrt{-21}).$$

Вернемся к примеру из п. 1. Имеем

$$k = \mathbb{Q}(\sqrt{p}), \quad p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 4), \quad \widetilde{\mathrm{cl}}_k/(\widetilde{\mathrm{cl}}_k)^2 \cong \mathbb{Z}/2,$$

$k(\sqrt{-1}) = k(\sqrt{-p})$ – неразветвлено над $k$. Поскольку в $k(\sqrt{-1})/k$ ветвится только вещественная точка, получаем, что $\mathrm{cl}_k$ – группа нечетного порядка и максимальное неразветвленное 2-расширение $k$ совпадает с $k(\sqrt{-1})$. Значит, число классов поля $k(\sqrt{-1})$ – нечетно (как конец 2-башни) и дискриминант $k(\sqrt{-1})/k$ – единичный идеал.

**Замечание.** В книге [2] указан пример квадратичного расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ со ссылкой на [5], в котором нет целого базиса. Но дивизор, делящий 2 в этом расширении, разветвлен. Поэтому проверка отсутствия относительного целого базиса для этого примера значительно сложнее, чем для серии примеров нашей статьи.

## Литература


1. Д. К. Фаддеев, *Об обобщенных целочисленных представлениях над дедекиндовом кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 113–118.
2. Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер, *Симметрические билинейные формы.* Наука, М. (1984).
3. E. Artin, *Algebraic numbers and algebraic functions.* Gordon and Breach, N. Y. et al. (1967).
4. R. Swan, *Vector bundles and projective modules.* — Trans. Am. Math. Soc. **105** (1962), 264–277.
5. R. Mac-Kenzie, D. Scheuneman, *A number field without a retative integral basis.* — Am. Math. Monthly **78** (1971), 882.



Tsvetkov V. M. A simple example of extensions without an integral basis.

A series of examples of quadratic extensions of number fields without an integral basis is given.



С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В, А. Стеклова РАН


Поступило 25 сентября 2000