Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 274, 2001 г.

Г. И. Петрашень

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ. II

Часть II. ПРОСТЕЙШИЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ПЛОСКИХ ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

ГЛАВА 7

Плоские и квазиплоские волны в изотропных упругих средах с плоской границей раздела

Понятие о плоской волне, являющееся абстракцией реально наблюдаемых процессов (очень простой в математическом отношении и далеко не такой простой с точки зрения физики), оказывается весьма важным и полезным в теории распространения волн. Это объясняется прежде всего тем, что сложные волновые поля в кусочно-однородных (изотропных) средах часто удобно рассматривать математически как результат наложения того или иного множества (вещественных или комплексных) плоских волн.

В теории плоских волн некоторое затруднение могут вызывать вопросы, связанные с постановками задач на распространение волн, что является прямым следствием абстрактности понятия “плоская волна”. Для преодоления возникающих трудностей целесообразно исходить из какой-либо реальной модели волнового поля, приводящей к понятию “плоская волна”, и ставить задачи, основываясь на принятых модельных соображениях. В качестве простейшей и наиболее естественной модели такого рода в изотропных средах удобно брать поле, возбужденное точечным источником в области, прилегающей к элементу фронта волны, кривизнами которого уже допустимо пренебрегать в рассматриваемых конкретных условиях. Примерно так же обстоит дело и в случаях анизотропных сред, где обращение к локально плоским волнам вытекает из соображений наглядности в механизме процесса распространения поверхностей разрывов в производных поля смещений по времени на волновых фронтах.

§20. Сферические и плоские (однородные и неоднородные) волны. Отражение плоских волн от границы упругого полупространства. Явления полного внутреннего отражения

Как следует из результатов §18, поля упругих смещений, возбуждаемые в однородной изотропной упругой среде сосредоточенными (равно как и распределенными по "малой" области V_0) стационарными или нестационарными источниками, представляются на достаточно больших расстояниях от источников в виде сферически расходящихся продольных и поперечных волн. Если не обращать внимания на векторный характер таких полей смещений, а также на возможную зависимость "интенсивности" волны от направления на выбранную точку наблюдения (как это имеет место, например, в случае источников вида (18.33)), то можно считать, что в волновой зоне поля упомянутых источников упругих колебаний представляются в виде

$$u(M,t) = \frac{1}{r}\,\varphi\left(t - \frac{r}{v}\right), \tag{20.1}$$

характерном для простейшей (скалярной) сферически расходящейся волны, распространяющейся со скоростью v. Подынтегральная функция

$$u(M,t;\omega) = \frac{1}{r}\exp i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) \tag{20.2}$$

из разложения

$$u(M,t) = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty \Phi(\omega)\frac{1}{r}\exp i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)d\omega \tag{20.2$'$}$$

поля $u(M,t)$ в интеграл Фурье определяет элементарную монохроматическую сферически расходящуюся волну. При этом существенно, что как (20.1), так и (20.2) строго удовлетворяют скалярному волновому уравнению со скоростью распространения v.

1. Покажем, что если рассматривать поле (20.2), равно как и его наложение в некоторой ограниченной части пространства, то при известных (формулируемых далее) условиях его можно приближенно отождествлять с полем плоской волны. Для этого предположим, что сферическая волна $u(M,t;\omega)$ наблюдается на весьма больших расстояниях r от источника M_0 и притом лишь в точках M ограниченной пространственной области V, размеры которой по всем направлениям характеризуются величиной порядка l.

Если обозначить через $\vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0O}$ радиус-вектор некоторой фиксированной точки $O \in V$, то для вектора $\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$, очевидно, будем иметь

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}, \tag{20.3}$$

где $\vec{\rho} = \overrightarrow{M_0O}$, $|\vec{\rho}| < l$.

При этом оказывается, что

$$r = \sqrt{r_0^2 + 2(\vec{r}_0\vec{\rho}) + \rho^2} = r_0 + \frac{(\vec{r}_0\vec{\rho})}{r_0} + O\left(\frac{\rho^2}{r_0^2}\right) \tag{20.4}$$

и, если достаточно хорошо выполняется неравенство

$$l \ll r_0, \tag{20.5}$$

то для всех точек $M \in V$ можно полагать

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[1 + O\left(\frac{\rho}{r_0}\right)\right] \approx \frac{1}{r_0}.$$

На основании этого для фазы волны из (20.2) получается выражение

$$\omega(t - r/v) = \omega\left[t - \frac{r_0}{v} - \frac{(\vec{r}_0\vec{\rho})}{vr_0}\right] + \frac{\omega}{v}\,O\left(\frac{\rho^2}{r_0^2}\right),$$

из которого видно, что если выполняется условие

$$\left|\frac{\omega}{v}\,O\left(\frac{\rho^2}{r_0}\right)\right| \approx \frac{\omega}{v}\,\frac{\rho^2}{r_0} \leqslant 2\pi\frac{l^2}{\lambda r_0} \ll \frac{\pi}{2},$$

или, что то же, неравенство

$$l^2 \ll \frac{1}{4}\,\lambda r_0, \tag{20.6}$$

где $\lambda = 2\pi v\omega^{-1}$, то в точках $M \in V$ допустимо пользоваться приближенной формулой

$$\omega\left(t - \frac{r}{v}\right) \approx \omega\left[t - \frac{r_0}{v} - \frac{(\vec{r}_o\vec{\rho})}{vr_0}\right].$$

Наконец, если обозначить $\vec{\kappa} = \vec{r}_0/r_0$ постоянный единичный вектор, определяющий направление распространения волны (20.2) в фиксированной точке O области V и считать, что наряду с (20.4) и (20.5) выполняется еще неравенство

$$\lambda = 2\pi \frac{v}{\omega} < l, \tag{20.7}$$

обеспечивающее многократную осцилляцию выражения $\exp i\omega(t-r/v)$ при перемещении точки M внутри области V, то для поля (20.2) в точках M области V получается приближенное представление

$$u(M,t;\omega) \approx \frac{1}{r} \exp i\omega \left[t' - \frac{(\vec{\kappa}\vec{\rho})}{v} \right] \tag{20.8}$$

в виде плоской монохроматической волны, в которой $t' = t - r_0/v$ играет роль локального для области V времени.

Что касается нестационарной волны, представляющейся разложением (20.2$'$) и наблюдаемой в ограниченной пространственной области V, то для нее также получается приближенное представление в виде плоской волны

$$u(M,t) \approx \mathrm{Re} \int\limits_0^\infty \frac{\Phi(\omega)}{r_0} \exp i\omega \left(t' - \frac{(\vec{\kappa}\vec{\rho})}{v} \right) d\omega = \frac{1}{r_0} \varphi \left(t' - \frac{(\vec{\kappa}\vec{\rho})}{v} \right), \tag{20.8$'$}$$

если выполняется неравенство (20.5), а функция $\Phi(\omega)$ заметно отличается от нуля лишь в таком промежутке $\omega_1 < \omega < \omega_2$ угловых частот, что для каждого ω выполняются неравенства (20.6) и (20.7).

Итак, выражения (20.8) и (20.8$'$) в форме плоских волн получаются как приближенные представления полей сферических волн (20.2) и (20.3), справедливые в точках области V при выполнении условий (20.5), (20.6) и (20.7). Подобные же приближенные локальные представления можно было бы получить и для любой волны, радиусы кривизны фронта которой достаточно велики по сравнению с длиной волны. При этом весьма существенным здесь оказывается то обстоятельство, что выражения (20.8) и (20.8$'$) строго удовлетворяют волновому уравнению со скоростью распространения $v = \mathrm{const}$. Это позволяет рассматривать плоские волны как самостоятельные решения волнового уравнения в случае однородной среды, определенные во всем безграничном пространстве.

В заключение отметим, что если положить $n\lambda = l$, где $n \gg 1$, то условие (20.7) будет выполненным. Условия же (20.5) и (20.6) примут соответственно вид $\lambda/r_0 \ll n^{-1}$ и

$$\frac{\lambda}{r_0} \ll \frac{1}{4n^2}. \tag{20.6$'$}$$

Таким образом, оказывается, что при выполнении лишь одного условия (20.6$'$), содержащего число $n \gg 1$, в точках области V, размеры которой характеризуются "радиусом" l, отстоящей от источника M_0 сферической волны на расстояние r_0, поле сферической волны (20.2) можно заменить полем (20.8) плоской монохроматической волны. При этом длина волны λ и размеры l области V связаны друг с другом порядковым соотношением (20.7).

2. При изучения плоских волн мы будем обозначать через $\vec{\kappa} =$ const единичный вектор распространяющейся волны, а вместо $\vec{\rho}$ по-прежнему будем писать $\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M поля относительно начала O некоторой выбранной системы координат. Фронтами плоской волны

$$u = \varphi\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v}\right)$$

оказываются безграничные плоскости, определяемые уравнением

$$\vec{\kappa}\vec{r} \equiv (\vec{\kappa}\vec{r}) = vt + \mathrm{const}\,.$$

Тот факт, что поле нестационарной плоской волны определено и отлично от нуля в некоторой безграничной полосе, параллельной фронту, как раз и связан с упоминавшейся абстрактностью понятия "плоская волна". Плоскую волну во всем безграничном пространстве, конечно, возбудить нельзя. Однако в любой ограниченной части однородной среды можно возбудить поле, имеющее характер плоской волны с любой наперед заданной точностью. На практике такие волны возбуждаются обычно излучателями, совершающими синхронные колебания с частотой ω в точках некоторой плоской поверхности. Если для размеров l этой поверхности хорошо выполняется неравенство $l \gg \lambda$, где λ – длина возбуждаемых волн, то на не слишком больших расстояниях от центральной части такой поверхности поле имеет (почти точно) характер плоской волны.

Для получения аналитического выражения полей смещений плоских волн в однородной упругой среде, характеризуемой скоростями v_p и v_s распространения волн, необходимо задать в виде плоских волн выражения для продольного и поперечного потенциалов φ и $\vec{\psi}$.

Полагая

$$\varphi = f\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v_p}\right), \quad (\vec{\kappa} = \kappa_1\vec{i}_1 + \kappa_2\vec{i}_2),$$

где $f(\tau)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция, а составляющие вектора $\vec{\kappa}$ "нормали к фронту" подчинены условию

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1, \tag{20.9}$$

обеспечивающему удовлетворение функцией φ волновому уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (v = v_p \text{ или } v_s),$$

для поля смещений p-волны получаем

$$\vec{u}_p = \operatorname{grad} f\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v_p}\right) = -\frac{\vec{\kappa}}{v_p} f'\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v_p}\right). \tag{20.10}$$

В случае вещественных значений κ_1 и κ_2 из (20.9) фронтом такой волны оказывается плоскость $\vec{\kappa}\vec{r} = v_p t = \mathrm{const}$. Поляризация же волны определяется ортом $\vec{\kappa}$, нормальным волновому фронту.

Если для векторного потенциала выбрано выражение

$$\vec{\psi} = \vec{b}\, f\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v_s}\right), \quad (\vec{\kappa} = \kappa_1\vec{i}_1 + \kappa_2\vec{i}_2),$$

где κ_1 и κ_2 удовлетворяют условию (20.9), а $\vec{b} \neq c\vec{\kappa}$ – произвольно, то для поля смещений волны получается

$$\vec{u}_s = \operatorname{rot}\vec{\psi} = [\operatorname{grad} f \times \vec{b}] = \frac{[\vec{b} \times \vec{\kappa}]}{v_s} f'\left(t - \frac{\vec{\kappa}\vec{r}}{v_s}\right). \tag{20.11}$$

Фронты такого поля $\vec{\kappa}\vec{r} = v_s t = \mathrm{const}$ имеют прежнюю структуру. Поляризация же волны теперь определяется вектором $[\vec{b} \times \vec{\kappa}]$, ортогональным нормали $\vec{\kappa}$ к волновому фронту, т.е. лежащим в касательной к фронту плоскости.

Существенно, что поля (20.9) и (20.10) сохраняют смысл решений уравнений движения однородной изотропной среды при любых значениях $\vec{\kappa}$, удовлетворяющих условию (20.9). В частности и при значениях $\kappa_1 > 1$, когда составляющая

$$\kappa_2 = \sqrt{1-\kappa_1^2} = \pm i \left|\sqrt{\kappa_1^2 - 1}\right| = \pm i|\kappa_2|$$

оказывается чисто мнимой. В таком случае поля (20.10) и (20.11) представляют собой, как говорят, неоднородные плоские волны. Физическая их сущность становится наиболее прозрачной в случаях, когда зависимость от t в (20.10) оказывается гармонической, как например, в подинтегральной функции разложения функции $f'(t)$ в интеграл Фурье по $i\omega$.

Полагая $f'(\tau) = \exp(i\omega\tau)$, например в (20.10), будем иметь

$$\vec{u} = -\frac{\vec{\kappa}}{v_p} e^{\pm\omega|\kappa_2|\frac{y}{v_p}} \exp i\omega \left[t - \frac{\kappa_1}{v_p}\right]. \qquad (20.12)$$

Не касаясь деталей, лишь отметим, что такое поле сохраняет характер “плоской волны”, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью $v = v_p/\kappa_1$ и с амплитудой, экспоненциально зависящей от переменной y. При этом знак при экспоненте следует выбирать так, чтобы амплитуда убывала при возрастании $|y| > 0$.

3. Следует отметить, что волновое уравнение имеет строгие решения в виде плоских волн только в случае однородной среды (в которой $v = \text{const}$). При этом нетрудно сообразить, что при встрече плоской волны с границей раздела двух (различных) однородных сред могут возникать отраженная и преломленная плоские волны только в том случае, когда граница раздела оказывается плоскостью. Поэтому основным в теории оказывается вопрос о распространении плоских волн в слоисто-однородных средах с плоскими границами раздела.

Во многих случаях этот общий вопрос может быть расчленен (фактически или логическим путем) на частные вопросы, касающиеся прохождения плоскими волнами плоской границы раздела лишь двух сред. Один из таких вопросов мы и рассмотрим. При этом, чтобы не загромождать рассуждения непринципиальными подробностями, будем сначала предполагать, что речь идет о процессах, описываемых одним волновым уравнением, а не уравнениями теории упругости.

Пусть плоскость $y = 0$ является границей раздела полупространств $y > 0$ и $y < 0$, характеризуемых соответственно скоростями v_1 и v_2 распространения волн, и притом такой границей, что для возбуждающихся в полупространствах волновых полей u_1 и u_2 выполняются условия контакта

$$(\overline{u}_1 - \overline{u}_2)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0.$$

Так как зависимость от пространственных координат x, y, z поля плоской волны осуществляется через посредство скалярного произведения $(\vec{\kappa}, \vec{r})$, то ясно, что для полного описания процесса отражения-преломления такой волны от границы $y = 0$ раздела сред нет необходимости рассматривать все точки пространства, а достаточно дать его описание лишь в точках какой-нибудь одной плоскости (плоскости падения), содержащей в себе вектор $\vec{\kappa}$ и прямую, перпендикулярную границе раздела. В качестве последней мы выберем ось OY декартовой системы координат, плоскость xOy которой (т.е. плоскость $z = 0$) совмещена с плоскостью падения рассматриваемых плоских волн.

Таким образом, векторы $\vec{\kappa}$, определяющие направления распространения плоских волн, будут характеризоваться в дальнейшем лишь двумя составляющими, κ_1 и κ_2, а поля плоских волн окажутся не зависящими от переменной z выбранной декартовой системы координат и, следовательно, принадлежащими классу решений плоских задач для волнового уравнения или уравнений теории упругости[1]

В силу изложенных обстоятельств ясно, что при выяснении вопросов, касающихся постановок задач на отражение-преломление плоских волн, целесообразно аппелировать к результатам (хотя бы качественного) исследования решения плоской задачи на отражение-преломление волны, возбужденной точечным (плоским) источником.

4. Предположим, что указанная в п. 3 среда находилась в покое при $t < t_0 = -h/v_1$, а при $t = t_0 = -h/v_1$ в точке M_0 ($x = 0$,

[1] Плоскими называются задачи для указанных уравнений, решения которых даются в функциях, зависящих лишь от двух пространственных координат (например, (x, y)) и времени t. Такие решения реализуются в средах, свойства которых не зависят от пространственной переменной z при условии, что от переменной z не зависят и все входные данные задачи.

$y = -h$) полупространства начинает действовать (плоский) точечный источник колебаний, порождающий первичную (падающую) цилиндрическую (или "круговую", если иметь ввиду лишь точки плоскости xOy) волну u_1^0. В момент $t = 0$ падающая волна доходит до границы $y = 0$ раздела сред и начинает возбуждать отраженную волну u_1 и преломленную волну u_2 соответственно в полупространствах $y < 0$, $(\nu = 1)$ и $y > 0$, $(\nu = 2)$. В некоторые моменты времени $t > 0$ картина расположения фронтов падающей, отраженной и преломленной волн в плоскости $z = 0$ будет иметь вид, изображенный на рис. 2. Точка O' на рис. 2 соответствует пересечению передних фронтов указанных волн с плоскостью $y = 0$, а прямые $O'a_0$, $O'a_1$ и $O'a_2$ изображают касательные плоскости соответственно к фронтам волн u_1^0, u_1 и u_2 в точке O'.

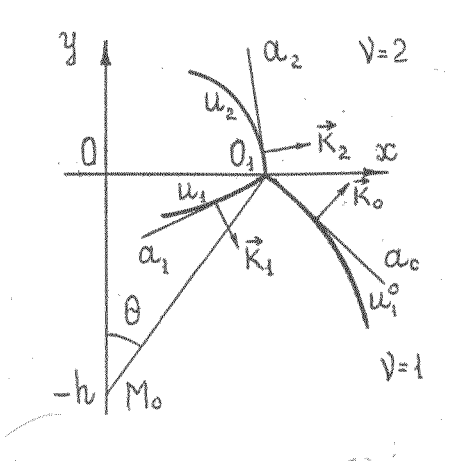

Рис. 2

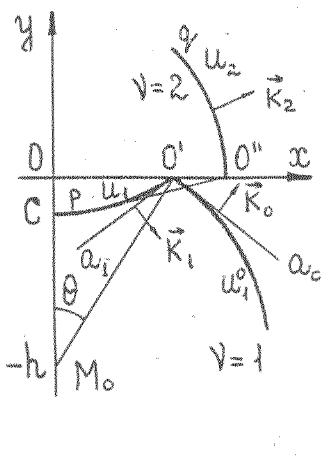

Рис. 3.

Если бы ставилась задача нахождения точных выражений $u_1(x,y,t)$ и $u_2(x,y,t)$ по падающей волне $u_1^0(x,y,t)$, то следовало бы искать решения волновых уравнений

$$\Delta u_\nu - \frac{1}{v_\nu^2}\ddot{u}_\nu = 0 \qquad (20.13)$$

соответственно в средах $y > 0$ и $y < 0$ при нулевых начальных данных, $t = 0$ и граничных условиях

$$(u_1^0 + u_1 - u_2)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \tag{20.14}$$

в которых u_1^0 отвечает известному полю “падающей волны”, возбужденной “точечным” источником M_0 в безграничной среде со скоростью распространения v_1. Решение такой (несложной) задачи выходит за рамки теории плоских волн и мы пока не будем на нем задерживаться. Отметим лишь, что, как ясно из здравого смысла, отраженная u_1 и преломленная u_2 волны должны соответствовать (нестационарным) возмущениям, распространяющимся от границы $y = 0$ соответственно в стороны возрастающих и убывающих значений y. Однако, отказавшись от исследования сформулированной задачи в ее точной постановке, можно ставить целью рассмотреть волновой процесс не во всей безграничной среде, а лишь в окрестности точки O', в которой пересекается (передний) фронт падающей волны с плоскостью $y = 0$, т.е. с осью Ox на рис. 2.

В точке O' пересекаются фронты отраженной и преломленной волн (как изображено на рис. 2). Поэтому, если размеры l упомянутой окрестности весьма малы по сравнению с радиусами кривизны r_0 волновых фронтов в точке O', причем для “доминирующих” длин волн λ рассматриваемых полей и величин l и r_0 выполняются неравенства вида (20.6) и (20.7), то в соответствии с п. 1 все волны могут быть заменены плоскими волнами, распространяющимися в плоскости xOy соответственно по направлениям $\vec{\kappa}_1^{\,0}$, $\vec{\kappa}_1$ и $\vec{\kappa}_2$, перпендикулярным касательным плоскостям в точке O' к фронтам истинных волн u_1^0, u_1 и u_2.

Условимся, как это имеет место в теории плоских волн, определять направление $\vec{\kappa}$ распространения плоской волны углом ее падения θ (где $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$) на границу раздела, образуемым вектором $\vec{\kappa}$ с ортом нормали к границе. При этом для векторов $\vec{\kappa}_1$, $\vec{\kappa}_2$, $\vec{\kappa}_3$ и $\vec{\kappa}_4$, проведенных из начала координат и располагающихся соответственно в первом, втором, третьем и четвертом квадрантах плоскости xOy выбранной системы координат, будем иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} \vec{\kappa}_1 &= \sin\theta \vec{i}_1 + \cos\theta \vec{i}_2, \quad & \vec{\kappa}_2 &= -\sin\theta \vec{i}_1 + \cos\theta \vec{i}_2, \\ \vec{\kappa}_3 &= -\sin\theta \vec{i}_1 - \cos\theta \vec{i}_2, \quad & \vec{\kappa}_4 &= -\sin\theta \vec{i}_1 - \cos\theta \vec{i}_2. \end{aligned}\right\} \tag{20.15}$$

Обозначим через θ, θ_1 и θ_2 углы падения падающей, отраженной и преломленной (в “малой” окрестности точки O') волн и учтем истинный характер движения волновых фронтов, вытекающий из рассмотрения точной задачи для полей u_1 и u_2. Тогда в качестве аналитических представлений интересующих нас локально-плоских волн (рис. 2) следует взять выражения

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}\,_1^0 &= f_0\left(t - \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{v_1}\right), \\ \overline{u}\,_1 &= f_1\left(t - \frac{x\sin\theta_1 - y\cos\theta_1}{v_1}\right), \\ \overline{u}\,_2 &= f_2\left(t - \frac{x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2}{v_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{20.16}$$

При этом упомянутой малой окрестности точки O' соответствуют значения t и x, изменяющиеся в малых интервалах Δt и Δx, содержащих внутри себя соответственно точки

$$t^0 = t_0 + \frac{h}{v_1\cos\theta} = \frac{h}{v_1}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) \quad \text{и} \quad x_0 = h\,\mathrm{tg}\,\theta. \tag{20.17}$$

Поля (20.16) удовлетворяют волновым уравнениям в соответствующих средах, причем функция f_0, входящая в выражение для падающей волны u_1^0, предполагается заданной. Неизвестные функции f_1 и f_2, равно как и значения углов падения θ_1 и θ_2, должны определяться из граничных условий (20.14), приводящих к функциональным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} f_2\left(t - \frac{x\sin\theta_2}{v_2}\right) - f_1\left(t - \frac{x\sin\theta_1}{v_1}\right) = f_0\left(t - \frac{x\sin\theta}{v_1}\right), \\ \frac{\cos\theta_2}{v_2}f_2'\left(t - \frac{x\sin\theta_2}{v_2}\right) + \frac{\cos\theta_1}{v_1}f_2'\left(t - \frac{x\sin\theta_1}{v_1}\right) = \\ = \frac{\cos\theta}{v_1}f_0'\left(t - \frac{x\sin\theta}{v_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{20.18}$$

которые должны выполняться тождественно относительно независимых переменных t и x, изменяющихся в окрестности точек t^0 и x_0 из (20.17).

Нетрудно видеть, что последнее возможно только в том случае, когда аргументы у всех функций из (20.18) совпадают[2]. Отсюда следует, что углы θ, θ_1 и θ_2 падения рассматриваемых волн связаны друг с другом соотношениями Снеллиуса

$$\frac{\sin\theta}{v_1} = \frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}. \tag{20.19}$$

Что касается определения функций f_1 и f_2 по заданной функции f_0, то (имея в виду дальнейшее) его целесообразно производить на основе разложений

$$f_\nu(\tau) = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty F_\nu(\omega) e^{i\omega\tau}\, d\omega \quad (\nu = 0, 1, 2) \tag{20.20}$$

функций $f_\nu(\tau)$ в интегралы Фурье. Если представить в виде аналогичного же интеграла $f_0(\tau) = \mathrm{Re}\int_0^\infty F_0(\omega)e^{i\omega\tau}\, d\omega$ функцию f_0 из (20.16), определяющую поле падающей волны, то подстановка (20.20) в (20.18) приводит к элементарной алгебраической системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_2(\omega) - F_1(\omega) = F_0(\omega),\\ \frac{\cos\theta_2}{v_2}F_2(\omega) + \frac{\cos\theta}{v_1}F_1(\omega) = \frac{cos\theta}{v_1}F_0(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{20.21}$$

Система (20.21) подобна системе уравнений, получающейся при решении задачи на отражение падающей монохроматической плоской волны

$$u_1^0(x, y, t; \omega) = F_0(\omega) \exp i\omega \left(t - \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{v_1}\right) \tag{20.22}$$

при условии, что поля u_1 и u_2 отраженной и преломленной волн ищутся также в виде монохроматических плоских волн

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y, t; \omega) = F_1(\omega) \exp i\omega \left(t - \frac{x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1}{v_1}\right),\\ u_2(x, y, t; \omega) = F_2(\omega) \exp i\omega \left(t - \frac{x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2}{v_2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{20.23}$$

[2]Это, в частности, вытекает из результата решения относительно f_1' и f_2' системы уравнений (20.18), в которой первое уравнение продифференцировано по t.

уходящих от точек границы $y = 0$.

Из (20.21) следует

$$F_1(\omega) = k_1(\theta)F_0(\omega), \quad F_2(\omega) = k_2(\theta)F_0(\omega), \tag{20.24}$$

где величины

$$k_1(\theta) = \frac{v_2 \cos\theta - v_1 \cos\theta_2}{v_2 \cos\theta + v_1 \cos\theta_2}, \quad k_2(\theta) = \frac{2v_2 \cos\theta}{v_2 \cos\theta + v_1 \cos\theta} \tag{20.25}$$

называются соответственно коэффициентами отражения и преломления плоской монохроматической волны, встречающей границу раздела под углом падения θ. При этом предполагается, что значение $\cos\theta_2$ выражено через θ при помощи соотношений (20.19).

Если при заданном угле падения оказывается

$$\gamma \sin\theta < 1, \quad \left(\gamma = \frac{v_2}{v_1}\right), \tag{20.26}$$

то из (20.19) следует: $\cos\theta_2 = \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2\theta} > 0$, вследствие чего и коэффициенты $|K_1(\theta)|$ оказываются вещественными.

При выполнении условия (20.26) на основании (20.20) и (20.24) для функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ из (20.16) получаются выражения $f_\nu(\tau) = \kappa_1(\theta)f_0(\tau)$, из которых явствует, что зависимость от "своих" аргументов полей отраженных и преломленных волн из (20.16) совпадает с зависимостью от аргументов падающей волны u_1^0. Вследствие этого отраженная и преломленная волны обладают одинаковыми функциями формы $f(\tau)$ волны и характеризуются передними фронтами, если падающая волна обладает передним фронтом.

5. В п. 4 поля рассматривались в окрестности точки O' (в которой передний фронт падающей волны u_1^0 пересекается с осью Ox) в предположении, что в этой же точке пересекают ось Ox и передние фронты отраженной и преломленной волн.

Нетрудно видеть, что такое предположение реализуется только лишь при условии, что скорость $\dot{x}_0$ перемещения точки O' вдоль оси Ox превосходит скорость волн v_2 в среде $y > 0$ ($\nu = 2$), т.е., если оказывается

$$\dot{x}_0 = v_1 \frac{v_1(t + h/v_1)}{\sqrt{v_1^2(t + h/v_1)^2 - h^2}} = \frac{v_1}{\sin\theta} > v_2. \tag{20.27}$$

В случае соотношения $v_1 > v_2$ такое условие выполняется при любом значении угла падения θ луча M_0O'. Если же оказывается $v_1 < v_2$, то существует предельный угол

$$\theta^0 = \arcsin \frac{v_1}{v_2} \tag{20.28}$$

такой, что при $\theta < \theta^0$ неравенство (20.27) реализуется, а в случае $\theta > \theta^0$ выполняется неравенство, обратное неравенству (20.27). Это означает, что при $\theta > \theta^0$ возмущение, распространяющееся в среде $y > 0$ ($\nu = 2$) со скоростью v_2, "обгоняет" (движущуюся) точку O (пересечения фронтов падающей и отраженной волн), вследствие чего картина расположения передних фронтов "истинных" (цилиндрических) волн u_1^0, u_1 и u_2 иллюстрируется уже рис. 3. В точке O' пересекаются с осью Ox цилиндрические фронты падающей и отраженной волн. Что касается преломленной волны, то ее фронт $O''q$ "оторвался" от точки O' и продвинулся вперед до точки O''. При этом в среде $y < 0$ появилась дополнительная "отраженная" головная волна с плоским фронтом pO''. Линия pO'' касается окружности $O'pc$, изображающей на рис. 3 фронт отраженной цилиндрической волны. Естественно, что количественное описание такой картины распространения всех волновых фронтов выходит за рамки теории плоских волн. Однако для локального описания полей в окрестности точки O' из рис. 3 представления полей в форме (20.16) (со всеми выкладками вплоть до (20.25)) сохраняют свою значимость. Различие же состоит только в том, что значение $\cos\theta_2$ из (20.23) и (20.24) оказывается теперь чисто мнимым

$$\cos\theta_2 = -i\sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta - 1}. \tag{20.29}$$

Вследствие этого спектральная функция $u_2(x, y, t; \omega)$ из (20.23) принимает вид неоднородной плоской волны

$$u_2 = F_2(\omega) e^{-\frac{\omega}{v_2} y \sqrt{\gamma^2 \sin^2\theta - 1}} \exp i\omega \left[t - x \frac{\sin\theta}{v_1} \right], \tag{20.30}$$

затухающей экспоненциально по мере углубления (наблюдателя) в полупространство $y > 0$ и сохраняющей характер "плоской" волны, распространяющейся в направлении оси Ox. При этом вследствие мнимости выражения (20.29) для $\cos\theta_2$ коэффициенты отражения-преломления из (20.25) оказываются теперь комплексными, причем модуль коэффициента отражения $|K_1(\theta)| = 1$

равен единице. Последнее обстоятельство как раз и послужило поводом для названия угла θ^0 из (20.28) углом полного внутреннего отражения.

Не задерживаясь на словесном описании явления полного внутреннего отражения лишь заметим, что это явление состоит в тесном родстве с различными явлениями экранирования волновых полей высокоскоростными тонкими слоями, входящими в состав слоисто-однородных изотропных упругих сред. При этом такие явления оказываются наиболее интересными в случае полей, возбуждаемых нестационарными сосредоточенными воздействиями.

6. Как уже упоминалось, построение точных решений задач, типа задачи из п. 4, (равно как и их качественные исследования) выходят далеко за рамки теории плоских волн. Однако в математических представлениях полей смещений, возбуждаемых в слоисто-однородных изотропных упругих средах с границами раздела $y = \mathrm{const}$ произвольными сосредоточенными источниками, плоские волновые поля фактически играют значительную роль. Дело в том, что представления таких волновых полей (и их потенциалов), применяемые в случае слоистых сред, можно рассматривать как специальное наложение (суперпозицию) комплексных плоских волн, входящих под знаки повторных интегралов типа Фурье.

Вследствие этого некоторые операции в построении аналитических представлений решений задач на распространение волн (например, в форме потенциалов), вроде удовлетворения потенциалами граничных условий задачи, сводятся фактически к удовлетворению таких условий подинтегральными функциями упомянутых интегралов.

И вот, с целью приблизить изложение аппарата теории плоских волн к современности представляется целесообразным воспользоваться представлениями волн в такой их форме, в какой они входят, например, в метод Лемба решения задач на распространение волн в слоисто-однородных изотропных упругих средах с границами $y = \mathrm{const}$, возбуждаемых сосредоточенными воздействиями[3].

[3] Предполагается, что методу Лемба и родственному ему методу контурных интегралов в решении указанных задач будет посвящен специальный выпуск настоящей серии.

В случае плоских задач на распространение волн (когда решение не зависит от переменной z декартовой системы координат) в качестве представлений потенциалов в слоях ($\nu = 1, 2, \dots$) среды

$$\varphi_\nu \equiv \varphi_\nu(x, y, t) \quad \text{и} \quad \vec{\psi}_\nu \equiv \psi_\nu(x, y, t)\vec{j}, \quad (\vec{j} \equiv \vec{i}_2), \tag{20.31}$$

в методе Лемба можно выбирать интегралы Фурье

$$\left.\begin{matrix} \varphi_\nu \\ \psi_\nu \end{matrix}\right\} = \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix} \Phi_\nu(x, y, \kappa) \\ \Psi_\nu(x, y, \kappa) \end{matrix}\right\} e^{i\omega t} d\omega, \quad \left(\kappa = \frac{\omega}{v_{s1}}\right), \tag{20.32}$$

подинтегральные функции которых представляются в форме контурных интегралов следующего вида

$$\left.\begin{matrix} \Phi_\nu \\ \Psi_\nu \end{matrix}\right\} = \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} A_\nu(\zeta, \kappa) e^{-\kappa[ix\zeta \pm y\sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}]} \\ B_\nu(\zeta, \kappa) e^{-\kappa[ix\zeta \pm y\sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}]} \end{matrix}\right\} d\zeta. \tag{20.33}$$

Здесь, соответственно каждому слою ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) среды введены обозначения

$$\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p_\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{s_1}}{v_{s_\nu}}, \quad \kappa = \frac{\omega}{v_{s_1}} \tag{20.34}$$

(где v_{p_ν} и v_{s_ν} – скорости распространения p- и s-волн в ν-ом слое), а λ является некоторым (бесконечным) контуром на (разрезанной) комплексной плоскости (ζ), идущим из бесконечности $\zeta = -\infty - i\kappa$, ($\kappa > 0$) третьего квадранта к бесконечности $\zeta = \infty + i\kappa$ первого квадранта через точку $\zeta = 0$.

Не касаясь множества деталей (в частности, особых точек подинтегральных функций из (20.33), определения ветвей радикалов $\sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}$ и $\sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}$ на основном листе комплексной плоскости (ζ) и многого др.), мы лишь отметим, во-первых, что везде далее можно будет полагать

$$\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} = \begin{cases} \left|\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}\right|, & \text{если} \quad \zeta^2 > \gamma^2, \\ i\left|\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}\right|, & \text{при} \quad \zeta^2 < \gamma^2 \end{cases} \tag{20.35}$$

и, во-вторых, что контуру (λ) могут принадлежать и некоторые точки ζ вещественной оси плоскости (ζ). При этом, если рассматривать значения $x > 0$, то знаку $+$ (знаку $-$) в показателях экспонент из (20.33) отвечают волны, распространяющиеся в сторону возрастающих (убывающих) значений y.

Из (20.32) и (20.33) ясно, что потенциалы φ_ν и ψ_ν в методе Лемба являются своеобразной суперпозицией комплексных плоских волн, определяемых потенциалами

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_\nu &= A_\nu e^{i\omega t-\kappa(ix\zeta\pm y\sqrt{\zeta^2-\gamma_\nu^2})}, \\ \widetilde{\psi}_\nu &= B_\nu e^{i\omega t-\kappa(ix\zeta\pm y\sqrt{\zeta^2-\delta_\nu^2})}, \end{aligned} \tag{20.36}$$

где γ_ν, δ_ν и κ имеют значения из (20.34). При этом такие представления содержат в себе потенциалы и обычных монохроматических волн.

Действительно, если в (20.36) положить

$$\zeta = \gamma_\nu \sin\theta_p^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\zeta^2-\gamma_\nu^2} = i\gamma_\nu\cos\theta_p^{(\nu)}, \tag{20.37}$$

то потенциал $\widetilde{\varphi}_\nu$ из (20.36) примет обычный канонический вид

$$\widetilde{\varphi}_\nu = A\exp i\omega\left[t - \frac{x\sin\theta_p^{(\nu)} \pm y\cos\theta_p^{(\nu)}}{v_{p_\nu}}\right]$$

потенциала плоской продольной волны.

Подобным же образом обстоит дело и в случае потенциала ψ_ν из (20.36), если там положить

$$\zeta = \delta_\nu\sin\theta_s^{(\nu)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\zeta^2-\delta_\nu^2} = i\delta_\nu\cos\theta_s^{(\nu)}. \tag{20.38}$$

7. С целью иллюстрации, рассмотрим здесь формально задачу на отражение плоских волн от границы $y = 0$ упругого полупространства $y > 0$, характеризуемого параметрами μ, v_s, v_p и $\gamma = \frac{v_s}{v_p} < 1$.

Пользуясь обозначениями

$$\alpha(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-\gamma^2}, \quad \beta(\zeta) = \sqrt{\zeta^2-1}, \quad g(\zeta) = 2\zeta^2-1, \tag{20.39}$$

предположим сначала, что на границу полупространства падает плоская p-волна, заданная потенциалом

$$\varphi_0 = A_0 e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta-(y-h)\alpha(\zeta)]}, \quad (\zeta = \gamma\sin\theta_0). \tag{20.40}$$

В результате отражения возникают продольная и поперечная (плоские) волны pp и ps, определяемые потенциалами

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta+(y+h)\alpha(\zeta)]}, \quad (\zeta = \gamma\sin\theta_p) \\ \psi_1 &= B_1 e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta+y\beta(\zeta)+h\alpha(\zeta)]}, \quad (\zeta = \gamma\sin\theta_s), \end{aligned}\right\} \tag{20.41}$$

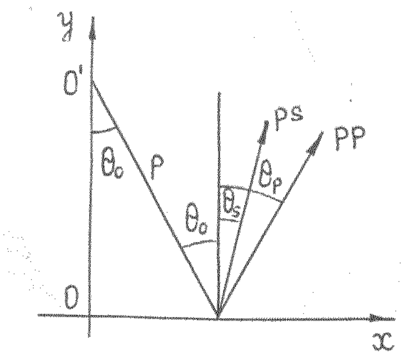

Рис. 4

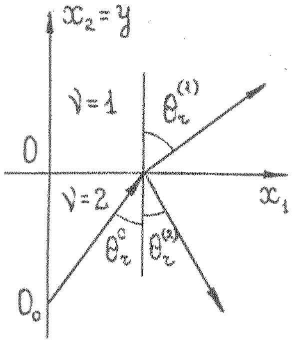

Рис. 5.

представления которых выбраны здесь в такой форме, в какой они появляются под знаками интегралов (20.33) в задаче на возбуждение полей в полупространстве $y \geqslant 0$ сосредоточенным источником, расположенным в точке $x = 0$, $y = h > 0$.

Заметим, что в рамках теории плоских волн значения ζ в выражениях φ_0, φ_1 и ψ_1 следовало бы считать сначала различными. Однако при подстановке потенциалов (20.41) и (20.40) в (линейные) граничные условия (20.43), которые должны удовлетворяться тождественно относительно переменных t и x, сразу выясняется необходимость придания величинам ζ во всех упомянутых выражениях одинаковых значений. Именно это приводит к равенствам

$$0 < \zeta = \gamma \sin \theta_p^0 = \gamma \sin \theta_p = \sin \theta_s < 1, \tag{20.42}$$

допускающим запись в обычной форме

$$\frac{\sin \theta_p^0}{v_p} = \frac{\sin \theta_p}{v_p} = \frac{\sin \theta_s}{v_s},$$

выражающей закон Снеллиуса в процессах отражения (и преломления) волн.

После установления кинематического закона Снеллиуса (20.42) амплитудные множители A_1 и B_1 из (20.41) должны определяться из учета граничных условий при $y = 0$, которые в случае свободной от напряжений границы принимают вид

$$
\begin{aligned}
t_{yx}(\varphi,\psi) &\equiv \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]=0,\\
t_{yy}(\varphi,\psi) &\equiv \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0,
\end{aligned}
\tag{20.43}
$$

где $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$; $\psi=\psi_1$ суммарные потенциалы поля смещений в среде $y>0$.

При учете выражений (20.40) и (20.41), а также обозначений (20.39) и (20.44)

$$
R(\zeta)=g^2-4\zeta^2\alpha\beta;\quad T(\zeta)=g^2+4\zeta^2\alpha\beta,
\tag{20.44}
$$

подстановка значений φ_1 и ψ_1 в условия (20.43) приводит для коэффициентов A_1 и B_1 из (20.41) к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
2i\alpha\zeta A_1+gB_1&=2i\alpha\zeta A_0,\\
gA_1-2i\beta\zeta B_1&=-gA_0,
\end{aligned}
\tag{20.45}
$$

определитель которой $R(\zeta)\neq 0$ отличен от нуля при значениях ζ из (20.42). Поэтому для амплитудных множителей A_1, B_1 из (20.41) получаются выражения

$$
\begin{gathered}
A_1=K_{pp}A_0,\quad B_1=K_{ps}A_0,\quad K_{pp}=\frac{T(\zeta)}{R(\zeta)},\\
K_{ps}=-\frac{4i\alpha\zeta}{R(\zeta)},
\end{gathered}
\tag{20.46}
$$

где $K_{pp}(\zeta)$ и $K_{ps}(\zeta)$ имеют смысл коэффициентов отражения волн типа pp и ps в форме потенциалов. На толковании результатов здесь едва ли требуется задерживаться, так как процесс отражения протекает тривиальным образом.

8. Более интересным оказывается случай отражения поперечной волны s, заданной потенциалом

$$
\psi_0=B_0e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta-(y-h)\beta(\zeta)]},\quad (\zeta=\sin\theta_0).
\tag{20.47}
$$

Отраженные sp и ss волны можно характеризовать потенциалами

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1^0&=A_1^0e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta+y\alpha(\zeta)+h\beta(\zeta)]},\quad (\zeta=\gamma\sin\theta_p^0),\\
\psi_1^0&=B_1^0e^{i\omega t-\kappa[ix\zeta+(y+h)\beta(\zeta)]},\quad (\zeta=\sin\theta_s^0),
\end{aligned}
\right\}
\tag{20.48}
$$

аналогичными потенциалам из (20.41), уже учитывающим условия излучения. Они записаны в форме, учитывающей также и соотношения Снеллиуса

$$\zeta = \sin\theta_0 = \gamma \sin\theta_p^0 = \sin\theta_s. \tag{20.49}$$

Амплитудные их множители A_1^0 и B_1^0 должны определяться из учета граничных условий (20.43), в которых следует полагать $\varphi = \varphi_1^0$, $\psi = \psi_0 + \psi_1^0$. Подставляя такие значения φ и ψ в (20.43), после сокращения на общий множитель $\exp\{i\omega t - \kappa[ix\zeta + h\beta(\zeta)]\}$, придем к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2i\alpha\zeta A_1^0 + gB_1^0 &= -gB_0,\\ -gA_1^0 + 2i\beta\zeta B_1^0 &= 2i\beta\zeta B_0, \end{aligned}\right\} \tag{20.50}$$

детерминант которой (при $0 < \zeta < 1$) отличен от нуля.

Таким образом, для амплитудных множителей из (20.48) получаются выражения

$$\begin{gathered} A_1^0 = K_{sp}B_0, \quad B_1^0 = K_{ss}B_0, \quad K_{sp} = -\frac{4i\beta\zeta g}{R(\zeta)},\\ K_{ss} = -\frac{T(\zeta)}{R(\zeta)} \end{gathered} \tag{20.51}$$

при обозначениях из (20.39) и (20.44).

При толковании полученного результата нужно исходить из соотношений Снеллиуса (20.49). Из них видно, что при условии

$$0 < \sin\theta_0 < \gamma \tag{20.52}$$

углы падения отраженных волн вещественны, а радикалы $\alpha(\zeta)$и $\beta(\zeta)$ чисто мнимы. Поэтому отраженные волны реализуются в форме однородных плоских волн.

Если же оказывается

$$\gamma < \sin\theta_0 = \zeta < 1, \tag{20.52$'$}$$

то радикал $\beta(\zeta)$ – по-прежнему чисто мним, а радикал $\alpha(\zeta)$ имеет уже положительное значение $\alpha(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} > 0$. Поэтому отраженная волна ss реализуется в форме обычной однородной плоской волны, определяемой потенциалом

$$\psi_1^0 = B_1^0 \exp i\omega \left[t - \frac{x\sin\theta_0 + (y+h)\cos\theta_0}{v_s}\right], \tag{20.53}$$

с амплитудой B_1^0 из (20.51), у которой $|K_{ss}| = 1$ (полное внутреннее отражение). А отраженная продольная волна sp оказывается неоднородной плоской волной, характеризуемой потенциалом

$$\varphi_1^0 = A_1^0 e^{-\frac{\omega}{v_s}\sqrt{\sin^2\theta_0 - \gamma^2}} \exp i\omega \left[t - \frac{x\sin\theta_0 + h\cos\theta_0}{v_0}\right]. \qquad (20.54)$$

Таким образом, продольная волна реализуется в форме своеобразной поверхностной волны, энергия которой сосредоточена в окрестности границы $y = 0$ (и экспоненциально убывает при удалении от нее в глубь полупространства $y > 0$). Эта волна распространяется вдоль границы с фазовой скоростью

$$v_\phi = \frac{v_s}{\sin\theta_0}, \qquad (20.55)$$

зависящей от угла падения θ_0 из (20.52$'$) падающей s волны так же, как зависит от этого угла и коэффициент затухания амплитуды волны. Вследствие зависимости от угла падения θ_0 первичной (падающей) волны s, такую волну sp можно называть “индуцированной волной поверхностного типа”.

Однако на границе полупространства может существовать (а, следовательно, и возбуждаться) специфическая поверхностная волна – волна Релея, представляющая собой самостоятельное волновое образование, распространяющееся вдоль границы с определенной (релеевской) скоростью распространения и характеризуемая определенными (экспоненциальными) законами затухания при увеличении $y > 0$, как по составляющей $\varphi(x, y, t)$, так и по составляющей $\psi(x, y, t)$ поля смещений. Сущность такой (релеевской) волны устанавливается в п. 1 и 2 §22, материал которых непосредственно связан с п. 7 и 8 настоящего параграфа.

9. В заключение уместно отметить, что задачи на отражение плоских волн из п. 7 и 8 оказываются фактически формальной основой для построения точных решений задач на отражение от свободной границы упругого полупространства $y > 0$ волн, возбужденных сосредоточенными плоскими источниками, приложенными в точке $x = 0$, $y = h > 0$, зависящими от времени как $f(t)$ и включаемых при $t = 0$.

Например, в случае нормального (плоского) сосредоточенного источника с плотностью силы

$$\vec{f} = \delta(x)\delta(y-h)f(t)\vec{j}, \quad (\vec{j} \equiv \vec{i}_2), \qquad (20.56)$$

включаемого в момент $t = 0$, потенциалы φ_0 и ψ_0 возбуждаемого (первичного) поля представляются повторными интегралами типа (20.32) и (20.33), которые допускают запись в форме

$$\left.\begin{matrix}\varphi_0\\ \psi_0\end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{(\lambda)} \left\{\begin{matrix} A_0 e^{i\omega t - \frac{\omega}{v_s}[ix\zeta - (y-h)\alpha]} \\ B_0 e^{i\omega t - \frac{\omega}{v_s}[ix\zeta - (y-h)\beta]}\end{matrix}\right\} \frac{F(i\omega)}{\omega^2} d\zeta, \qquad (20.57)$$

где объединены множители (зависящие от t, x и y) образующие представления плоских волн. Здесь положено

$$A_0 = C = \mathrm{const}; \quad B_0 = \frac{\zeta}{\beta} C; \quad \alpha = \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}; \quad \beta = \sqrt{\zeta^2 - 1},$$

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} ds, \quad (\mathrm{Re} > 0), \qquad (20.58)$$

а (λ) – обозначает некоторый бесконечный контур на (разрезанной) комплексной плоскости (ζ).

Возбуждаемые источником поля φ_0 и ψ_0 из (20.57) доходят (последовательно) до границы полупространства $y = 0$ и в результате взаимодействия с ней возбуждают (вторичные) отраженные поля φ_1 и ψ_1, которые также могут быть представлены повторными интегралами вида (20.32) и (20.33) и также – могут быть записаны в форме (20.57), содержащей под знаками интегралов монохроматические плоские волны. В случае падающей волны φ_0 из (20.57) упомянутые формы потенциалов φ_1 и ψ_1 полей отраженных волн сводятся к следующему

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \psi_1\end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{(\lambda)} d\zeta \frac{F(i\omega)}{\omega^2} \left\{\begin{matrix} A_1 e^{i\omega t - \frac{\omega}{v_1}[ix\zeta + (y+h)\alpha]} \\ B_1 e^{i\omega t - \frac{\omega}{v_1}[ix\zeta + y\beta + h\alpha]}\end{matrix}\right\}. \qquad (20.59)$$

При этом неизвестные еще функциональные коэффициенты A_1 и B_1 должны определяться так, чтобы суммарное поле $(\varphi_1 + \varphi_0)$, ψ_1 из (20.57) и (20.59) удовлетворяло граничному условию (20.43).

Из сопоставления φ_0 из (20.57) с выражением (20.40), а выражений из (20.59) с потенциалами φ_1, ψ_1 из (20.41), становится ясным, что определение коэффициентов A_1 и B_1 из (20.59) сводится к задаче для плоских волн из п. 7, приводящей к выражениям из (20.45) для A_1 и B_1. А это, как раз, и приводит к интегральному представлению потенциалов φ_1 и ψ_1 задачи на отражение от свободной границы полупространства $y > 0$ продольной (p) волны, возбужденной сосредоточенным источником (20.56).

Естественно, что множество важных деталей в изложении материала здесь опущено. Но фактическая роль плоских волн в конструировании полей сосредоточенных источников оттенена здесь достаточно выпукло. Однако самых интересных вопросов, связанных с извлечением физических следствий из полей, представленных в форме повторных интегралов, коснуться здесь не представилось возможным. Также не представилось возможным показать, каким образом в результате взаимодействия первичных волн источника из (20.56) со свободной границей полупространства $y \geqslant 0$ в среде появляется поверхностная релеевская волна, распространяющаяся в некотором эффективном слое $0 < y < c_0\lambda$ вдоль границы $y = 0$ полупространства $y > 0$ со скоростью $v = v_r < v_s$.

§21. Задачи на отражение-преломление плоских волн на границе раздела двух изотропных упругих полупространств. (Решение в форме потенциалов метода Лемба и решение в составляющих поля смещений, как в случае анизотропных сред)

Задачи на взаимодействие волн с границами раздела упругих сред занимают видное место среди проблем теории упругости и ее приложений. При этом наиболее интересными и важными оказываются, конечно, случаи волн, возбуждаемых сосредоточенными (нестационарными) воздействиями. Однако, если учесть, что в основе любых методов решения задач для случаев таких воздействий лежит (как и в методе Лемба) суперпозиция некоторых комплексных плоских волн, то приобретают известную физическую значимость и задачи на отражение-преломление плоских волн на границах раздела упругих изотропных и однородных полупространств при различных типах контакта между ними. Рассмотрения различных типов контакта не отличаются друг от друга в идейном отношении. Поэтому здесь достаточно ограничиться случаем обычного (жесткого) контакта, а остальное предоставить читателям в качестве упражнения.

Что же касается самой задачи на отражение-преломление волн, то ознакомление с ее решением в главе, посвященной элементам теории плоских волн, целесообразно давать в такой форме, которая наиболее близка каким-либо значимым прикладным проблемам.

В качестве таковых – естественно выбрать, во-первых, задачу на отражение-преломление плоских волн, представленных потенциалами φ_ν и ψ_ν в форме метода Лемба, являющимися подинтегральными функциями в представлениях повторными интегралами (типа Фурье из п. 6 §20) потенциалов полей смещений, возбуждаемых в полупространствах сосредоточенными воздействиями. И, во-вторых, – с аналогичной же задачей для плоских волн, но решаемой в составляющих поля смещений так же, как в составляющих поля смещений решается задача на отражение-преломление плоских волн на границе раздела двух однородных анизотропных упругих полупространств. Решение последней нетривиально (хотя бы в вычислительном отношении). Поэтому будет полезно и поучительно сопоставить (в §25) ее решение с решением однотипной задачи в случае изотропных контактирующих упругих полупространств, рассматриваемой в настоящем параграфе также и в составляющих поля смещений.

1. При постановке задач на отражение-преломление плоских волн на границе раздела $y = 0$ упругих полупространств $y > 0$, $(\nu = 1)$ и $y < 0$, $(\nu = 2)$ будем сначала ориентироваться (как и в п. 6 и 7 §20) на задачу о взаимодействии с границей раздела упругих волн, возбуждаемых (плоским) сосредоточенным источником O_0, расположенным, например, в точке $(x = 0,\ y = -h;\ h > 0)$ полупространства $\nu = 2$ (рис. 5). Полупространства будем характеризовать абсолютными –

$$\mu_\nu,\ v_{p_\nu},\ v_{s_\nu}, \quad (\nu = 1, 2), \tag{21.1}$$

и относительными параметрами

$$\gamma_\nu = \frac{v_{s_1}}{v_{p_\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{s_1}}{v_{s_\nu}}, \quad \sigma = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \tag{21.2}$$

причем будем учитывать, что потенциалы φ_ν и ψ_ν полей волн, возбуждаемых сосредоточенными источниками, представляются интегралами вида (20.32) и (20.33). В подинтегральные функции интегралов (20.33), отвечающих p_0 и s_0 волнам, "падающим" из среды $\nu = 2$ на границу раздела, входят выражения

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_0 &= a_0(\zeta, \kappa) e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta + (y+h)\alpha_2(\zeta)]}, \\ \widetilde{\psi}_0 &= b_0(\zeta, \kappa) e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta + (y+h)\beta_2(\zeta)]}, \end{aligned} \tag{21.3}$$

в которых здесь (и далее) добавлен временной множитель $\exp i\omega t$, заимствованный у внешнего интеграла из (20.32). Подобные же выражения в подинтегральных функциях содержатся и в представлениях (20.33) для отраженных ($\nu = 2$) и преломленных ($\nu = 1$) волн. В случае падающей p_0-волны $\widetilde{\varphi}_0$ из (21.3) они определяются выражениями

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_2 &= a_2 e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta - (y-h)\alpha_2]}, \\ \widetilde{\psi}_2 &= b_2 e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta - y\beta_2 + h\alpha_2]}, \end{aligned} \tag{21.4}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 &= a_1 e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta + y\alpha_1 + h\alpha_2]}, \\ \widetilde{\psi}_1 &= b_1 e^{i\omega t - \kappa[ix\zeta + y\beta_1 + h\alpha_2]}, \end{aligned} \tag{21.5}$$

а в случае падающей s_0-волны $\widetilde{\psi}_0$ из (21.3) – подобными же выражениями, в которых независящий от x и y множитель $\exp[-\kappa h\alpha_2(\zeta)]$ заменен на множитель $\exp[-\kappa h\beta_2(\zeta)]$. При этом здесь и далее использованы обозначения

$$\begin{gathered} \alpha_\nu \equiv \alpha_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu \equiv \beta_\nu(\zeta) = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \\ g_\nu \equiv g_\nu(\zeta) = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2, \quad \kappa = \frac{\omega}{v_{s_1}}, \quad \sigma = \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{gathered} \tag{21.6}$$

при относительных параметрах γ_ν и δ_ν из (21.2).

Вследствие вхождения под знаки повторных интегралов (20.32) и (20.33) выражений (21.4) и (21.5) ясно, что вопрос об удовлетворении потенциалами (20.32), (20.33) как волновым уравнениям (для соответственных потенциалов), так и – условиям контакта на границе раздела $y = 0$ полупространств сводится к выяснению таких же вопросов по отношению к потенциалам φ и ψ из (21.3)–(21.5). Непосредственной подстановкой выражений из (21.3)–(21.5) в соответствующие волновые уравнения легко проверяется, что уравнения движения упругих сред удовлетворены. Путем же подстановки в выражения $\widetilde{\varphi}_\nu$ и $\widetilde{\psi}_\nu$ соответственных значений

$$\zeta = \gamma_\nu \sin\theta_{p_\nu} \quad \text{и} \quad \zeta = \delta_\nu \sin\theta_{s_\nu} \tag{21.7}$$

нетрудно убедиться и в том, что эти выражения определяют плоские монохроматические волны, допускающие представления через углы падения "θ" в общепринятой (канонической) форме. При этом такие волны правильно учитывают и "принцип излучения", определяющий направление распространения (фазовых) волн, участвующих в процессе.

Здесь остается лишь отметить, что удовлетворение потенциалами φ_ν, ψ_ν из (20.32) и (20.33) граничным условиям при $y = 0$ жесткости контакта полупространств $\nu = 1$ и $\nu = 2$

$$\begin{aligned} &\vec{u}[\varphi_0 + \varphi_2, \psi_0 + \psi_2] = \vec{u}[\varphi_1, \psi_1], \\ &\vec{t}_y[\varphi_0 + \varphi_2, \psi_0 + \psi_2] = \vec{t}_y[\varphi_2, \psi_1], \end{aligned} \tag{21.8}$$

также сводится к подобной же задаче для потенциалов плоских волн из (21.3)–(21.5). При этом выражения составляющих вектора напряжения $\vec{t}_y$ через потенциалы приведены в (20.43), а подобные же выражения для вектора смещений имеют вид

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{21.9}$$

Таким образом выясняется, что задача на отражение-преломление плоских волн от границы $y = 0$ раздела упругих полупространств действительно входит существенным элементом в решение подобной же задачи в случае сосредоточенного источника возбуждения падающих волн.

2. Обращаясь (далее) к рассмотрению лишь случая плоских волн с потенциалами из (21.3)–(21.5) предположим (сначала), что на границу раздела $y = 0$ из среды $\nu = 2$ падает p-волна, характеризуемая потенциалом $\widetilde{\varphi}_0$ из (21.3), где под ζ можно понимать значение

$$\zeta = \gamma_2 \sin \theta_p^0. \tag{21.10}$$

Потенциалы отраженных и преломленных волн представляются выражениями (21.4) и (21.5), удовлетворяющими уравнениям движения и условиям излучения, в которых неизвестными являются амплитудные множители a_ν и b_ν. При этом в каждом из потенциалов $\widetilde{\varphi}_\nu$ и $\widetilde{\psi}_\nu$ можно применять выражения переменной ζ

$$\zeta = \gamma_\nu \sin \theta_{p_\nu} \quad \text{и} \quad \zeta = \delta_\nu \sin \theta_{s_\nu} \tag{21.11}$$

через углы падения соответствующих волн.

Подстановка потенциалов из (21.3), (21.4) и (21.5) в граничные условия (21.8) (выписанные в проекциях на координатные оси при помощи выражений (21.9) и (20.43)) приводит к равенствам, которые должны удовлетворяться тождественно относительно переменных t и x. Последнее же имеет место только в том случае, если величины ω и ζ в выражениях всех потенциалов из (21.3)–(21.6) имеют одинаковые значения. Учет этого обстоятельства, равно как и выражений (21.10)–(21.11), приводит, как известно, к соотношениям Снеллиуса

$$\zeta = \gamma_2 \sin\theta_p^0 = \gamma_\nu \sin\theta_{p_\nu} = \delta_\nu \sin\theta_{s_\nu} \tag{21.12}$$

для плоских волн, участвующих в процессе отражения-преломления.

По сокращении в соотношениях, учитывающих граничные условия, общего множителя $\exp\{i\omega t - \kappa[ix\zeta + h\alpha_2(\zeta)]\}$, для амплитудных коэффициентов a_ν и b_ν из (21.4) и (21.5) получается неоднородная система линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&-\zeta a_1 - \beta_1 b_1 + i\zeta a_2 - \beta_2 b_2 = -i\zeta a_0,\\
&\alpha_1 a_1 - i\zeta b_1 + \alpha_2 a_2 + i\zeta b_2 = \alpha_2 a_0,\\
&2\sigma i\zeta\alpha_1 a_1 + \sigma g_1 b_1 + 2i\zeta\alpha_2 a_2 - g_2 b_2 = 2i\zeta\alpha_2 a_0,\\
&\sigma g_1 a_1 - 2\sigma i\zeta\beta_1 b_1 - g_2 a_2 - 2i\zeta\beta_2 b_2 = g_2 a_0,
\end{aligned} \tag{21.13}$$

в которой использованы обозначения из (21.6).

Подобная же система (уравнений) получается и в случае падения на границу раздела $y = 0$ (из полупространства $\nu = 2$) поперечной s-волны, представленной потенциалом $\widetilde{\psi}_0$ из (21.3). Она совпадает с системой уравнений из (21.13), если в ее правой части матрицу-столбец

$$(-i\zeta, \alpha_2, 2i\zeta\alpha_2, g_2)^+ a_0, \tag{21.13$'$}$$

записанную в форме транспонированной матрицы-строки, заменить на матрицу-столбец вида

$$(-\beta_2, -i\zeta, g_2, 2i\zeta\beta_2)^+ b_0. \tag{21.14}$$

Детерминант системы уравнений (21.13)

$$\Delta(\zeta) \equiv \begin{vmatrix} -i\zeta, & -\beta_1, & i\zeta, & -\beta_2\\ \alpha_1, & -i\zeta, & \alpha_2, & i\zeta\\ 2\sigma i\zeta\alpha_1, & \sigma g_1, & 2i\zeta\alpha_2, & -g_2\\ \sigma g_1, & 2\sigma i\zeta\beta_1, & -g_2, & -2i\zeta\beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{21.15}$$

отличен от нуля при значениях ζ из промежутка

$$0 < \zeta < \sup(\delta_\nu), \tag{21.16}$$

вследствие чего система уравнений (21.13) однозначно разрешима при любой падающей плоской p- или s-волне. Путем решения такой системы определяются восемь коэффициентов

$$\begin{gathered} \kappa_{pp_1}, \ \ \kappa_{ps_1}, \ \ \kappa_{pp_2}, \ \ \kappa_{ps_2}, \\ \kappa_{sp_1}, \ \ \kappa_{ss_1}, \ \ \kappa_{sp_2}, \ \ \kappa_{ss_2}, \end{gathered} \tag{21.17}$$

отражения-преломления волн по “потенциалам”. При этом аналитические их выражения оказываются настолько громоздкими, что прямое использование их представляется нерациональным. Проще оказывается определять значения таких коэффициентов путем непосредственного решения системы уравнений (21.13)–(21.14) численными методами на персональном компьютере.

3. При обсуждении физических следствий из решения задач следует исходить из закона Снеллиуса (21.12) и учитывать, что если при значении ζ (определяемым по углу падения “первичной волны”) оказывается: $\alpha_\nu(\zeta) = |\alpha_\nu|$ (или $\beta_\nu(\zeta) = |\beta_\nu|$), то соответствующий потенциал $\widetilde{\varphi}_\nu$ (или потенциал $\widetilde{\psi}_\nu$) отвечает уже неоднородной (плоской) волне. В принципе, здесь дело обстоит также, как и в конце п. 8 §20, но случаи появления неоднородных волн (здесь) оказываются значительно более многообразными.

Пусть, например, относительные параметры γ_ν и δ_ν из (21.2) удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_2 < \gamma_1 < \delta_2 < \delta_1. \tag{21.18}$$

В случае падающей p-волны (под любым углом падения $\theta_p^0 < \pi/2$) переменная ζ из (21.12) удовлетворяет неравенству $\zeta < \gamma_2$, вследствие чего все радикалы $\alpha_\nu(\zeta)$ и $\beta_\nu(\zeta)$ чисто мнимы. Поэтому все отраженные и преломленные волны оказываются (обычными) однородными плоскими волнами.

В случае же падающей s-волны при малых углах падения, пока еще $\zeta < \gamma_2$ дело обстоит так же. Если же выполняются неравенства

$$\gamma_2 < \zeta \equiv \delta_2 \sin\theta_s^0 < \gamma_1, \tag{21.19}$$

то волны s_2s_2, s_2p_1 и s_2s_1 реализуются в виде однородных плоских волн, а отраженная волна s_2p_2 оказывается уже неоднородной, – определяемой потенциалом

$$\widetilde{\varphi}_2 = \alpha_2(\zeta, \kappa) e^{\kappa(y-h)\sqrt{\zeta^2-\gamma_2^2}} e^{i\omega\left(t-\frac{x\zeta}{v_{s_2}}\right)}, \quad (y < 0).$$

При дальнейшем увеличении угла падения θ_s^0, падающей s-волны, когда оказывается $\gamma_1 < \zeta = \sin\theta_s^0 < \delta_2$, к неоднородной отраженной s_2p_2 волне с потенциалом $\widetilde{\varphi}_2$ добавляется еще и неоднородная преломленная s_2p_1 волна, характеризуемая потенциалом

$$\widetilde{\varphi}_1 = a_1(\zeta, \kappa) e^{-\kappa[y\sqrt{\zeta^2-\gamma_1^2}+h\sqrt{\zeta^2-\gamma_2^2}]} e^{i\omega\left[t-\frac{x\zeta}{v_{s_2}}\right]}, \quad (y > 0),$$

также убывающая экспоненциально при удалении точки поля (x, y) от границы раздела $y = 0$ упругих полупространств в области $y < 0$.

Подобным же образом обстоит дело и в случае других порядковых соотношений между относительными параметрами контактирующих полупространств. Не задерживаясь на этом вопросе, лишь заметим, что обращение одной (или нескольких) из отраженно-преломленных волн в неоднородные – здесь не обязательно сопровождается явлением полного внутреннего отражения падающей волны.

В завершение же первой части параграфа, связываемой нами с процессом отражения-преломления на границе раздела $y = 0$ волн, возбуждаемых сосредоточенным источником и представленных потенциалами в форме повторных интегралов (20.32), (20.33) отметим, что в зависимости от типа порядковых соотношений (21.18) упомянутые интегралы описывают то или иное множество волн, возбудившихся в среде. Сюда относятся, прежде всего, отраженно-преломленные (неплоские) объемные волны, волны головные, а также – различные волны экранированного типа. При этом последние волны по своей природе оказываются родственными (локально) плоским неоднородным волнам.

4. В заключительных разделах параграфа полезно обратиться к краткому рассмотрению задачи на отражение-преломление плоских волн на границе раздела $y = 0$ полупространств $y > 0$, $(\nu = 1)$ и $y < 0$, $(\nu = 2)$, излагаемой в форме, возможно более близкой к (применяемому далее) способу решения такой же задачи в случае анизотропных однородных упругих полупространств.

При этом без ограничения общности можно полагать, что рассматриваются монохроматические плоские волны, переход от которых к плоским волнам общего вида производится при помощи интегралов Фурье.

Решение указанной задачи (там и здесь) ведется в составляющих вектора $\vec{u}(x_1, x_2, t)$ упругих смещений (а не в потенциалах), причем для декартовых координат применяются обозначения $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$. При этом первым (там и здесь) ставится вопрос об общем представлении полей смещений плоских волн, распространяющихся, например, в плоскости падения X_1OX_2 (т.е. $x_3 = 0$) и, следовательно, не зависящих от координаты x_3.

Фронты таких волн определяются заданием ортов их нормалей $\vec{n}_r^{(\nu)} = n_{r1}^{(\nu)}\vec{i}_1 + n_{r2}^{(\nu)}\vec{i}_2$ к фронтам, или – направлениями векторов рефракции

$$\vec{k}_r^{(\nu)} = \frac{\vec{n}_r^{(\nu)}}{v_r^{(\nu)}}, \quad (\nu = 1, 2), \tag{21.20}$$

где в случае изотропии $r = (p$ или $s)$.

Применительно к изотропным средам подобный вопрос фактически уже рассмотрен в п. 2 §20, где показано, что в (изотропной) упругой среде существуют два типа плоских волн: продольные и поперечные – представляемые полями смещений вида

$$\begin{aligned} \vec{u}_p^{(\nu)} &= a_\nu \vec{A}_p^{(\nu)} \exp i\omega[t - \vec{\kappa}_p^{(\nu)}\vec{x}], \quad (\nu = 1, 2) \\ \vec{u}_s^{(\nu)} &= b_\nu \vec{A}_s^{(\nu)} \exp i\omega[t - \vec{\kappa}_s^{(\nu)}\vec{x}]. \end{aligned} \tag{21.21}$$

в которых оказывается

$$\begin{aligned} \vec{\kappa}_r^{(\nu)} &= \vec{\kappa}_{r1}^{(\nu)}\vec{i}_1 + \kappa_{r2}^{(\nu)}\vec{i}_2, \quad (r = p, s), \\ \vec{A}_p^{(\nu)} &= \vec{K}_p^{(\nu)} = \kappa_{p1}^{(\nu)}\vec{i}_1 + K_{p2}^{(\nu)}\vec{i}_2, \quad (\nu = 1, 2), \\ \vec{A}_s^{(\nu)} &= [\vec{\kappa}_s^{(\nu)} \times \vec{i}_3] = \kappa_{s2}^{(\nu)}\vec{i}_1 - \kappa_{s1}^{(\nu)}\vec{i}_2. \end{aligned} \tag{21.22}$$

5. Пусть в плоскости падения x_1Ox_2, $(x_3 = 0)$ на границу раздела $x_2 = 0$ полупространств $x_2 > 0$, $(\nu = 1)$ и $x_2 < 0$, $(\nu = 2)$ из среды $\nu = 2$ падает первичная p или s волна (рис. 4). Распространение этой волны определяется вектором рефракции $\vec{\kappa}_r^{(0)}$, равно как векторами рефракции $\vec{\kappa}_r^{(2)}$ и $\vec{\kappa}_r^{(1)}$ определяется распространение отраженных и преломленных плоских волн. С учетом условий излучения здесь полагается

$$\vec{\kappa}_r^{(0)} = \frac{\sin\theta_r^0}{v_r^{(2)}}\,\vec{i}_1 + \frac{\cos\theta_r^0}{v_r^{(2)}}\,vi_2, \quad (r = p, s) \tag{21.23}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\kappa}_r^{(2)} &= \frac{\sin\theta_r^{(2)}}{v_r^{(2)}}\,\vec{i}_1 - \frac{\cos\theta_r^{(2)}}{v_r^{(2)}}\,vi_2, \\ \vec{\kappa}_r^{(1)} &= \frac{\sin\theta_r^{(1)}}{v_r^{(1)}}\,\vec{i}_1 + \frac{\cos\theta_r^{(1)}}{v_r^{(1)}}\,vi_2, \end{aligned}\right\} \tag{21.24}$$

причем при вещественных углах падения всегда считается, что $\sin\theta > 0$ и $\cos\theta > 0$.

Поле смещений падающей волны задается в виде

$$\vec{u}_r^{(0)} = \begin{pmatrix} a_0\delta_{rp} \\ b_0\delta_{rs} \end{pmatrix} \vec{A}_r^{(0)} \exp i\omega(t - \vec{\kappa}_r^{(0)}\vec{x}), \quad (r = p, s) \tag{21.25}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_p^{(0)} &= \vec{\kappa}_p^{(0)} \equiv \kappa_{p_1}^{(0)}\vec{i}_1 + \kappa_{p_2}^{(0)}\vec{i}_2, \\ \vec{A}_s^{(0)} &= [\vec{\kappa}_s^{(0)} \times \vec{i}_3] = \kappa_{s_2}^{(0)}\vec{i}_1 + \kappa_{s_1}^{(0)}\vec{i}_2, \end{aligned} \tag{21.26}$$

где δ_{rp} и δ_{rs} – символы Кронекера, а векторы рефракции $\vec{\kappa}_p^{(0)}$ и $\vec{\kappa}_s^{(0)}$ имеют значение из (21.23).

Что же касается отраженных ($\nu = 2$) и преломленных ($\nu = 1$) волн, то их можно представлять выражениями (21.21), (21.22) при условии, что их векторы рефракции $\vec{\kappa}_r^{(2)}$ и $\vec{\kappa}_r^{(1)}$ определяются выражениями из (21.22) и (21.24). При этом для величин $\vec{\kappa}_r^{(\nu)}\vec{x}$ из (21.21) нужно употреблять выражения

$$\begin{aligned} (\vec{\kappa}_r^{(2)}\vec{x}) &= \frac{\sin\theta_r^{(2)}x_1 - \cos\theta_r^{(2)}x_2}{v_r^{(2)}}, \\ (\vec{\kappa}_r^{(1)}\vec{x}) &= \frac{\sin\theta_r^{(1)}x_1 - \cos\theta_r^{(2)}x_2}{v_r^{(1)}}. \end{aligned} \tag{21.27}$$

Теперь можно было бы переходить к учету условия жесткости контакта

$$\begin{aligned} \vec{u}^{(0)} + \vec{u}_p^{(2)} + \vec{u}_s^{(2)} &= \vec{u}_p^{(1)} + \vec{u}_s^{(1)}, \\ t_2[\vec{u}^{(0)} + \vec{u}_p^{(2)} + \vec{u}_s^{(2)}] &= t_1[\vec{u}_p^{(1)} + \vec{u}_s^{(1)}], \end{aligned} \tag{21.28}$$

на границе $x_2 = 0$ полупространств $\nu = 1$ и $\nu = 2$, из которых должны определяться амплитудные множители a_ν и b_ν из представлений (21.21) отраженных и преломленных волн. Однако предварительно уместно остановиться на связи применяемой здесь формы записи зависимости плоской волны от пространственных переменных x_1 и x_2 и той ее записью, которая применялась в разделах п. 1–3 настоящего параграфа. По отношению, например, к продольным волнам эта связь вытекает из необходимой тождественности относительно переменных $x = x_1$ и $y = x_2$ выражений

$$i\omega(\vec{\kappa}_p^{\,(\nu)} \cdot \vec{x}) = i\omega \frac{\sin\theta_p^{(\nu)} \cdot x_1 - (-)^\nu \cos\theta_p^{(\nu)} \cdot x_2}{v_{p_\nu}} \equiv$$
$$\equiv \frac{\omega}{v_{s_1}}[i\zeta x_1 - (-)^\nu x_2 \alpha_\nu(\zeta)], \quad (\nu = 1, 2)$$

фазовых функций из представлений (21.21) для составляющих вектора смещений в новом (применяемом здесь) представлении, а также из формул (21.4) и (21.5) для потенциалов поля смещений в старом представлении из п. 1. При этом здесь использованы обозначения из (21.6) и (21.2).

Эта связь сводится к соотношениям

$$\zeta = \gamma_\nu \sin\theta_{p_\nu}, \quad \alpha(\zeta) = i\gamma_\nu \cos\theta_{p_\nu} \tag{21.29}$$

в случае продольных волн, и к соотношениям

$$\zeta = \delta_\nu \sin\theta_{s_\nu}, \quad \beta_\nu(\zeta) = i\delta_\nu \cos\theta_{s_\nu} \tag{21.30}$$

в случае волн поперечных. При этом, чтобы избежать комплексных значений $\cos\theta_{r_\nu}$, такими соотношениями следует пользоваться при достаточно малых значениях угла падения $\theta_r^{(0)}$ первичной волны.

После такого отступления следует возратиться к учету условий жесткого контакта (21.28) на границе раздела $x_2 = 0$ сред в задаче на отражение-преломление плоских волн.

6. В граничные условия (21.28) входят векторы смещений $\vec{u} = u_1\vec{i}_1 + u_2\vec{i}_2$ плоских волн трех типов и отвечающие им векторы

$$\vec{t}_2(\vec{u}) = \mu_\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\vec{i}_1 + \left[\lambda_\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda_\nu + 2\mu_\nu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]\vec{i}_2 \tag{21.31}$$

напряжений на площадках с нормалью $\vec{n} = \vec{i}_2$. При этом векторы смещений всех плоских волн ($\vec{u}^{\,(0)}, \vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{u}^{\,(1)}$) из (21.25), (21.26) и (21.21), (21.24), участвующие в процессе, имеют одинаковую структуру

$$\vec{u} = \vec{A} \exp i\omega(t - \vec{\kappa} \cdot \vec{x}) \tag{21.32}$$

и отличаются друг от друга лишь индексами при векторах $\vec{A}$ и $\vec{\kappa}$, отвечающих падающей (O), отраженным $(\nu = 2)$ и преломленным $(\nu = 1)$ волнам.

Также и результаты подстановки таких векторов смещений $\vec{u}$ в выражения $\vec{t}_2(\vec{u})$ из (21.31) приводят к представлениям одинаковой структуры вида

$$\begin{aligned} \vec{t}_2(\vec{u}) = -i\omega \exp i\omega(t - \vec{\kappa} \cdot \vec{x})\{\mu_\nu(A_1\kappa_2 + A_2\kappa_1)\vec{i}_1 + \\ + [\lambda_\nu A_1\kappa_1 + (\lambda_\nu + 2\mu_\nu)A_2\kappa_2]\vec{i}_2, \end{aligned} \tag{21.33}$$

отличающихся лишь индексами при составляющих векторов $\vec{A}$ и $\vec{\kappa}$.

Что же касается подстановки векторов смещений $\vec{u}^{\,0}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{u}^{\,(1)}$ в условия (21.28) при $x_2 = 0$ (которые должны выполняться тождественно относительно переменной x_1), то это приводит к равенствам, каждое слагаемое которых содержит множителем ту или иную экспоненту $\exp i\omega(t - \kappa_1 x_1)$, с соответствующим индексом при компоненте κ_1 вектора рефракции. Из тождественности относительно x_1 таких соотношений следует тождественное равенство друг другу самих экспонент, что приводит к равенствам (друг другу) первых составляющих κ_1 всех векторов рефракции из (21.33) и (21.24), участвующих в процессе отражения-преломления. А это дает соотношения Снеллиуса

$$\kappa_1 = \frac{\sin\theta_\rho^{(0)}}{v_\rho^{(2)}} = \frac{\sin\theta_r^{(2)}}{v_r^{(2)}} = \frac{\sin\theta_q^{(1)}}{v_q^{(1)}}, \tag{21.34}$$

в которых индексы ρ, r и q принимают значения p или s независимо друг от друга, в соответствии с типом рассматриваемых волн.

Получаемые из (21.28) соотношения (после подстановки в (21.28) векторов смещений $\vec{u}^{\,(0)}, \vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{u}^{\,(1)}$ и перехода от векторных равенств к равенствам в компонентах) следует сократить на входящие в их слагаемые общие множители, содержащие $\exp i\omega(t - \kappa_1 x_1)$.

В результате таких операций для амплитудных множителей a_ν и b_ν из (21.21) отраженных и преломленных волн получается следующая система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\kappa_{p_1}^{(1)}a_1+\kappa_{s_2}^{(1)}b_1-\kappa_{p_1}^{(2)}a_2-\kappa_{s_2}^{(2)}b_2=u_1^0,\\
&\kappa_{p_2}^{(1)}a_1-\kappa_{s_1}^{(1)}b_1-\kappa_{p_2}^{(2)}a_2+\kappa_{s_1}^{(2)}b_2=u_2^0,\\
&t_{p_1}^{(1)}a_1+t_{s_1}^{(1)}b_1-t_{p_1}^{(2)}a_2-t_{s_1}^{(2)}b_2=t_1^0,\\
&t_{p_2}^{(1)}a_1+t_{s_2}^{(1)}b_1-t_{p_2}^{(2)}a_2-t_{s_2}^{(2)}b_2=t_2^0.
\end{aligned}\tag{21.35}$$

Здесь $\kappa_{p_q}^{(\nu)}$ и $\kappa_{s_q}^{(\nu)}$ $(q=1,2)$ – составляющие векторов рефракции из (21.24), а $t_{p_q}^{(\nu)}$ и $t_{s_q}^{(\nu)}$ – принимают значения

$$\begin{gathered}
t_{p_1}^{(\nu)}=2\mu_\nu\kappa_{p_1}^{(\nu)}\kappa_{p_2}^{(\nu)},\quad t_{s_2}^{(\nu)}=-2\mu_\nu\kappa_{s_1}^{(\nu)}\kappa_{s_2}^{(\nu)},\\
t_{p_2}^{(\nu)}=\lambda_\nu(\kappa_{p_1}^{(\nu)})^2+(\lambda_\nu+2\mu_\nu)(\kappa_{p_2}^{(\nu)})^2,\\
t_{s_1}^{(\nu)}=\mu_\nu\big[(\kappa_{s_2}^{(\nu)})^2-(\kappa_{s_1}^{(\nu)})^2\big]
\end{gathered}\tag{21.36}$$

составляющих вектора напряжений из (21.33).

Что же касается правой части системы (21.35), то в нее следует подставлять значения

$$\begin{gathered}
u_1^{(0)}=a_0\kappa_{p_1}^{(0)},\quad u_2^{(0)}=a_0\kappa_{p_2}^{(0)},\quad t_1^{(0)}=a_0 2\mu_2\kappa_{p_1}^{(0)}\kappa_{p_2}^{(0)},\\
t_2^{(0)}=a_0[\lambda_2(\kappa_{p_1}^{(0)})^2+(\lambda+2\mu_2)(\kappa_{p_2}^{(0)})^2],
\end{gathered}\tag{21.37}$$

если границу $x_2=0$ раздела сред падает p-волна из (21.25), (21.26). Если же на границу $x_2=0$ падает s-волна из (21.25), (21.26), то в правую часть системы (21.35) следует подставлять выражения

$$\begin{gathered}
u_1^{(0)}=b_0\kappa_{s_2}^{(0)},\quad u_2^{(0)}=-b_0\kappa_{s_1}^{(0)},\quad t_2^{(0)}=-2b_0 2\mu_2\kappa_{s_1}^{(0)}\kappa_{s_2}^{(0)},\\
t_1^{(0)}=b_0\mu_2[(\kappa_{s_2}^{(0)})^2-(\kappa_{s_1}^{(0)})^2].
\end{gathered}\tag{21.38}$$

В связи с изложенным уместно еще отметить, что система уравнений (21.35) фактически оказывается эквивалентной системе уравнений (21.13). В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться соотношениями (21.20) и (21.30), связывающими углы падения $\theta_r^{(\nu)}$ из (21.23) и (21.24) плоских волн с велечинами ζ, $\alpha_\nu(\zeta)$ и $\beta_\nu(\zeta)$ из представлений (21.4) и (21.5) потенциалов плоских волн в нашем исходном представлении. Вследствие этого на обсуждении физических следствий из решения системы уравнений (21.35)–(21.38) нет необходимости здесь задерживаться.

7. В заключение параграфа следует отметить, во-первых, что систему уравнений (21.35) для коэффициентов отражения-преломления, решающих задачи на отражение-преломление (плоских) волн на плоской границе раздела $x_2 = 0$ двух изотропных упругих сред, физически интересно было бы сравнить с подобной же системой уравнений, решающих задачу на отражение-преломление волн в случаях анизотропии контактирующих сред. Во-вторых, что здесь, как и в любом конкретном случае задачи на отражение-преломление плоских волн можно было бы предложить физически-реальную модель процесса (возбуждаемого сосредоточенным сингулярным источником), в котором результаты решения задач для плоских волн соответствовали бы локальному изучению волновых полей в "малых окрестностях" некоторых характерных фронтов полей волн в модели. Внимательное рассмотрение таких моделей всегда облегчает проникновение в истинную сущность исследуемых явлений и способствует правильному восприятию результатов теории плоских волн. Подобную модель для распространения фронтов волн, возникающих при отражении-преломлении волн на плоской границе раздела двух сред, построить совсем не трудно.

§22. О поверхностных волнах Релея и Стоунли в плоских задачах теории упругости

В упругих средах существует класс волновых полей, распространяющихся вдоль границы раздела сред и таких, что их энергия, сосредоточенная в некоторых окрестностях границы раздела, быстро убывает по мере удаления от границ вглубь среды. Простейшие типы таких полей реализуются в плоских задачах для слоисто-однородных упругих сред с плоскими границами раздела, которые рассматриваются здесь в случае полупространств $y \geqslant 0$, а также – в случае двух различных полупространств, находящихся в жестком контакте друг с другом вдоль границы

$$y = 0. \tag{22.1}$$

Стационарные поверхностные волны в таких средах примыкают по аппарату их рассмотрения к плоским волнам из §20 и 21, причем они обнаруживают и некоторое сходство с неоднородными плоскими волнами, наблюдаемыми в областях запредельных углов падения первичной s-волны. Поэтому отнесение рассмотрения таких поверхностных волн к главе, посвященной плоским волнам, представляется оправданным.

1. В п. 7 §20 при обсуждении задач на отражение от границы $y = 0$ упругого полупространства $y \geqslant 0$ плоских p- или s-волн, представленных потенциалами (20.40) или (20.47), ставилось целью определить потенциалы (20.41) или (20.48) дополнительного поля, возникающего при отражении, так, чтобы суммарные поля в полупространстве $y \geqslant 0$ удовлетворяли условиям (20.43) на границе $y = 0$ (полупространства), свободной от напряжений. В результате для амплитудных множителей A_1 и B_1 искомых (дополнительных) полей были получены линейные уравнения (20.45) или (20.50), правые части которых содержали амплитудные множители A_0 или B_0 падающих волн.

В рассмотренных в §20 случаях переменная ζ из (20.42) (или (20.48)) принимала значения из промежутка $0 < \zeta < 1$, в котором детерминанты систем уравнений, совпадающие с левой частью уравнения Релея

$$R(\zeta) \equiv (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2\sqrt{\zeta^2 - 1}\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} = 0, \qquad (22.2)$$

не обращались в нуль.

Поэтому неоднородные уравнения (20.45) и (20.50) имели (единственные) решения, которые как раз и отвечали задаче на отражение плоских p- или s-волн от границы $y = 0$ упругого полупространства $y \geqslant 0$. При этом в случае падающей s-волны в области запредельных углов падения отраженная sp-волна проявлялась в форме неоднородной плоской волны (20.54). Такая волна также носила характер поверхностной волны, – однако лишь волны "индуцированной", скорость распространения которой и "коэффициент затухания с расстоянием y" существенно зависили от угла падения первичной s-волны, испытывающей отражение от границы $y = 0$.

Однако, если бы переменная ζ, входящая в систему уравнений (20.45), удовлетворяла уравнению (22.2), то задачи на отражение p- и s-волн не имели бы решений. Зато имели бы (ненулевые) решения однородные системы уравнений (20.45) или (20.50), отвечающие полю смещений в упругом полупространстве $y > 0$, описываемому (одними) потенциалами, например,

$$\varphi = \varphi_1(x, y, t), \quad \psi = \psi_1(x, y, t) \qquad (22.3)$$

при значениях φ_1 и ψ_1 из (20.41) без какой-либо падающей волны. Таким образом, оказывается, что вопрос о корнях уравнения (22.2) имеет прямое отношение к структуре волновых полей в упругом полупространстве.

2. Из-за присутствия радикалов $\alpha(\zeta)$ и $\beta(\zeta)$ из (20.39), имеющих точки ветвления $\zeta = \pm\gamma$ и $\zeta = \pm 1$, уравнение (22.2) определено на двулистной римановой (комплексной) поверхности (ζ) с разрезами, проведенными, например, между точками $\zeta = \gamma$ и $\zeta = 1$, а также точками $\zeta = -\gamma$ и $\zeta = -1$. При этом первый (основной) лист такой поверхности определяется условиями

$$\alpha(\zeta) = i|\alpha|, \quad \beta(\zeta) = i|\beta|, \quad \text{при} \quad (-\gamma < \zeta < \gamma), \tag{22.4}$$

а переход на второй лист осуществляется (однократным) пересечением одного из указанных разрезов.

Корни такого уравнения хорошо изучены, причем выяснено, что на основном листе плоскости (ζ) располагается лишь один (релеевский) корень

$$\zeta = \zeta_r > 1 \tag{22.5}$$

уравнения (22.2). (Он имеет значение $\zeta_r \approx 1.1$ в среде с параметрами $\lambda = \mu$.) Помимо этого, уравнение имеет еще два (комплексных) корня на втором листе римановой поверхности (ζ). Однако такие корни в теории распространения упругих волн практически не играют какой-либо роли.

3. Вследствие изложенного при значениях $\zeta = \zeta_r$ в формулах (20.41) потенциалы φ_1 и ψ_1 с амплитудами

$$A_1 = Cg(\zeta_r), \quad B_1 = -2Cgi\zeta_r\alpha(\zeta_r), \tag{22.6}$$

содержащие произвольный множитель C, удовлетворяют уравнениям движения упругой среды, равно как и однородным граничным условиям (20.43) (свободной от напряжений границы $y = 0$ упругого полупространства $y \geqslant 0$). В раскрытой форме такие потенциалы определяются выражениями

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} A_1 e^{-\kappa\alpha_r y} \\ B_1 e^{-\kappa\beta_r y} \end{matrix}\right\} \exp i\omega\left[t - \frac{x}{v_r}\right], \tag{22.7}$$

в которых обозначено

$$\alpha_r = \sqrt{\zeta_r^2 - \gamma^2}; \quad \beta_r = \sqrt{\zeta_r^2 - 1}; \quad v_r = \frac{v_s}{\zeta_r} < v_s; \quad \kappa = \frac{\omega}{v_s}, \tag{22.8}$$

причем амплитудные множители A_1 и B_1 имеют значения из (22.6).

Плоская релеевская волна из (22.7) представляет собой поле, распространяющееся без затухания в направлении оси Ox вдоль границы $y = 0$ полупространства с постоянной скоростью $v_r < v_s$, и имеющее амплитуду, затухающую экспоненциально как

$$\exp\left[-\frac{\omega y}{v_s}\right] = \exp\left[-\frac{2\pi y}{\lambda_s}\right] \tag{22.9}$$

по мере удаления от границы $y = 0$ во внутрь полупространства. В (22.9) λ_s – длина волны поля по поперечным волнам.

К изложенному здесь уместно еще добавить, во-первых, что исходя из представлений потенциалов искомого стационарного релеевского поля в форме (20.41), в правой части (22.7) появляется дополнительный постоянный множитель $\exp[-\omega h \alpha_r]$, который включен нами здесь в множитель C из (22.6). Если бы за исходное было выбрано представление исходных потенциалов в форме (20.48), то в правой части формулы (22.7) появился бы постоянный множитель $\exp[-\kappa h \beta_r]$, который также следовало бы присоединить к множителю C.

Во-вторых же, что в случае решения методом Лемба задачи на возбуждение упругого полупространства $y \geqslant 0$ сосредоточенным источником (20.56), как полагалось в п. 9 §20, указанного отнесения к чему-либо множителей в решении задачи не требовалось бы и производить. Все получалось бы автоматически методами контурного интегрирования. При этом выяснилось бы, что функциональные коэффициенты $A_1(\zeta,)$ и $B_1(\zeta,)$ в спектральных представлениях функций Φ_1 и Ψ_1 из (20.33), входящих в решение (20.32) задачи, конструируются из коэффициентов отражения K_{pp} и K_{ps} из (20.46), а также – из коэффициентов K_{sp} и K_{ss} из (20.51) и притом так, что окончательные представления функциональных коэффициентов $A_1(\zeta,)$ и $B_1(\zeta,)$ из (20.41) имеют структуру типа

$$A_1 = \frac{a(\zeta)}{R(\zeta)}, \quad B_1 = \frac{b(\zeta)}{R(\zeta)}. \tag{22.10}$$

Они содержат в знаменателях левую часть уравнения (22.2) Релея, а их числители образованы произведениями и суммами некоторых функций из следующих

$$\zeta, \ \alpha(\zeta), \ g(\zeta), \ \text{и} \ T(\zeta).$$

И вот, выясняется, что релеевская волна вида (22.7), возбуждаемая в полупространстве $y \geqslant 0$ сосредоточенным источником вида (20.56), вычисляется путем применения теоремы о вычетах к внутреннему интегралу из представления поля (потенциалов) повторными интегралами (20.32), (20.33), которые были записаны в п. 9 §20, ради наглядности, в форме (20.59). Подинтегральная функция таких интегралов имеет полюс 1-го порядка в корне $\zeta = \zeta_r$ уравнения Релея. При этом вычет в таком полюсе как раз и приводит к полю (плоской нестационарной) релеевской волны (22.7), (22.6), возбуждаемой в упругом полупространстве плоским источником вида (20.56).

Здесь уместно еще добавить, что осесимметричное воздействие, нормльное к границе $y = 0$ упругого полупространства $y > 0$, также возбуждает в последнем релеевскую осесимметричную волну. Однако, в отличие от (22.7), она характеризуется приближенно потенциалами вида (22.7), содержащими дополнительный множитель

$$\frac{1}{\sqrt{r}}, \quad (r \gg \lambda_s),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – эпицентрическое расстояние (вдоль границы $y = 0$) от источника до точки наблюдения (x, z) поля. При этом в формуле (22.7) фазовый множитель из правой части должен быть заменен на осесимметричный множитель

$$\exp i\omega \left(t - \frac{r}{v_r} \right). \tag{22.11}$$

4. Практически так же обстоит дело и с поверхностной волной, возбуждающейся на границе раздела $y = 0$ двух изотропных упругих полупространств $y > 0$, $(\nu = 1)$ и $y < 0$, $(\nu = 2)$, находящихся в жестком контакте друг с другом.

В п. 1 и 2 §21 рассматривалась задача на отражение-преломление плоских волн (21.3), падающих из полупространства $\nu = 2$ на границу раздела $y = 0$ (двух) полупространств. Потенциалы отраженных и преломленных волн в полупространствах $\nu = 2$ и $\nu = 1$ представлялись в виде (21.4) и (21.5), причем неизвестные амплитудные множители потенциалов a_ν и b_ν определялись из системы алгебраических уравнений вида (21.13), учитывающих условие (21.8) жесткости контакта полупространств $\nu = 1$ и $\nu = 2$ на границе $y = 0$ их раздела. Вследствие условий (21.16), выполняющихся в случае любых углов падения первичных (падающих) плоских волн (при которых справедливо (21.16)), система (21.13) однозначно разрешима, причем она определяет амплитудные множители a_ν и b_ν всех отраженно-преломленных волн из (21.4) и (21.5).

Если же переменная ζ, входящая в представления (21.4) и (21.5) типа плоских волн, оказывается корнем $\zeta = \zeta_0$ детерминанта системы уравнений (21.13), т.е. если оказывается

$$\Delta(\zeta_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} -i\zeta_0, & -\beta_1(\zeta_0), & i\zeta_0, & -\beta_2(\zeta_0) \\ \alpha_1(\zeta_0), & -i\zeta_0, & \alpha_2(\zeta_0), & i\zeta_0 \\ 2\sigma i\zeta_0\alpha_1(\zeta_0), & \sigma g_1(\zeta_0), & 2i\zeta_0\alpha_2(\zeta_0), & -g_2(\zeta_0) \\ \sigma g_1(\zeta_0), & -2\sigma i\zeta_0\beta_1(\zeta_0), & -g_2(\zeta_0), & -2i\zeta_0\beta_2(\zeta_0) \end{pmatrix} = 0, \tag{22.12}$$

где величины $\alpha_\nu(\zeta)$, $\beta_\nu(\zeta)$, $g_\nu(\zeta)$ и σ определены по (21.6), то неоднородная система уравнений типа (21.13) неразрешима, а однородная система уравнений

$$\begin{aligned} -i\zeta a_1 - \beta_1 b_1 + i\zeta a_2 - \beta_2 b_2 &= 0, \\ \alpha_1 a_1 - i\zeta b_1 + \alpha_2 a_2 + i\zeta b_2 &= 0, \\ 2\sigma i\zeta\alpha_1 a_1 + \sigma g_1 b_1 + 2i\zeta\alpha_2 a_2 - g_2 b_2 &= 0, \\ \sigma g_1 a_1 - 2\sigma i\zeta\beta_1 b_1 - g_2 a_2 - 2i\zeta\beta_2 b_2 &= 0, \end{aligned} \tag{22.13}$$

для амплитудных множителей a_ν и b_ν потенциалов из (21.4) и (21.5) имеет нетривиальные решения. Такие решения принадлежат к полям типа волновых мод, возбуждающиеся в средах в таких случаях, когда в аналитических представлениях полей смещений появляются особые точки типа полюсов в корнях дисперсионного уравнения задачи. Высказанные утверждения можно было бы пояснить в духе того, как мы пытались это сделать в п. 6 и 7 §20. Однако не обращаясь к этому лишь отметить, что уравнение (21.13), называемое уравнением Стоунли, имеет на полной 16-ти листной римановой поверхности комплексной переменной (ζ) всего 64 комплексных корня. Из множества таких корней только 1–2 нашли применение в практических задачах на распространение волн. При этом один из них, появляющихся на вещественной оси (ζ), не при любом наборе параметров γ_1, γ_2, δ_1, δ_2 среды может располагаться в области $\zeta > p\delta_\nu$. При этом он ведет себя подобно релеевскому корню в полупространстве.

ГЛАВА 8

Плоские и квазиплоские волны в анизотропных упругих средах

В этой главе мы возвращаемся к применениям математического формализма линейной теории упругости, изложенного в главе 1, и к простейшим примерам волновых полей, распространяющихся в слоисто-однородных произвольно-анизотропных упругих средах. При этом, как и в случае изотропных сред, к простейшим относятся (прежде всего) поля, зависящие от пространственных переменных x_k и времени t линейно и образующие класс решений типа плоских волн. Как и в изотропном случае, такие поля определяются заданием орта нормали $\vec{n}$ к фронту рассматриваемой плоской волны. Как и в случае изотропии путем наложения волн такого типа могут быть построены поля некоторой более общей структуры. Однако в конструировании решений типа плоских волн в анизотропных однородных упругих средах, равно как и в свойствах сконструированных волновых полей, обнаруживаются специфические особенности, с которыми полезно ознакомиться специально с достаточной подробностью. В этом можно видеть основную цель главы, при достижении которой уместно воспользоваться некоторыми результатами §4 и особенно результатами разделов п. 5–8 из §7.

§23. Общая теория плоских волн. Векторы поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$, фазовые $v^{(r)}(\vec{n})$ и лучевые $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ скорости распространения. Однородные и неоднородные плоские волны

Ради цельности изложения (и упрощения ссылок) основные результаты §7, относящиеся к плоским волнам, здесь дублируются, причем используемые формулы даются под двойными номерами: под порядковым номером в настоящем параграфе, а также под номером, под которым формула приведена в §7.

1. В §7 введено понятие о плоских монохроматических волнах с вектором смещений вида

$$\vec{u} = \operatorname{Re} \vec{A}^{(r)} \exp i\omega \Big[t - \vec{\kappa}^{(r)} \cdot \vec{x}\Big]; \quad \left(\vec{\kappa}^{(r)} = \frac{\vec{n}}{v_r}\right), \qquad (23.1)$$

распространяющихся в однородных анизотропных упругих средах, рассматриваемых как функции от орта $\vec{n}$ нормали к волновым фронтам

$$\left(\vec{\kappa}^{\,(r)} \cdot \vec{x}\right) = \text{const}, \qquad \vec{x} = \sum_{k=1}^{3} x_k \, \vec{i}_k.$$

При этом ставился вопрос: при каких значениях фазовой скорости $v_r \equiv v_r(\vec{n})$ и вектора поляризации $\vec{A}^{\,(r)}(\vec{n})$ могут существовать решения уравнения движения (4.1), (4.2) в форме волны вида (23.1), отвечающие произвольно-задаваемому значению орта нормали $\vec{n}$ к волновому фронту волны. Было показано, что для определения величин $\vec{A}^{\,(r)}(\vec{n})$ и $v_r(\vec{n})$ получается система алгебраических уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} - v_r^2 \, A_i^{(r)} = 0, \qquad \begin{matrix}(23.2)\\(7.15)\end{matrix}$$

с условием разрешимости в форме уравнений Кристоффеля (третьей степени относительно v_r^2)

$$\left| \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v_r^2 \delta_{iq} \right| = 0, \qquad \begin{matrix}(23.3)\\(7.18)\end{matrix}$$

и с симметричной приведенной матрицей вещественных параметров среды

$$\Lambda_{iq} = \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p = \Lambda_{qi}. \qquad (7.16)$$

Здесь обозначено

$$\lambda_{ik,pq} = \frac{1}{\rho} c_{ik,pq} \qquad \begin{matrix}(23.4)\\(7.5)\end{matrix}$$

при постоянных значениях плотности ρ и компонентов $c_{ik,pq}$ тензора упругих параметров, удовлетворяющих соотношениям симметрии вида

$$c_{ik,pq} = c_{ki,pq} = c_{ik,qp} = c_{pq,ik},$$

или

$$\lambda_{ik,pq} = \lambda_{ki,pq} = \lambda_{ik,qp} = \lambda_{pq,ik}. \qquad \begin{matrix}(23.5)\\(4.1)\end{matrix}$$

Уравнение Кристоффеля имеет положительные корни $v_r^2(\vec{n})$, всюду непрерывные (даже аналитические) относительно составляющих n_k орта $\vec{n}$, удовлетворяющие неравенствам вида

$$v_1^2(\vec{n}) > v_2^2(\vec{n}) \geqslant v_3^2(\vec{n}) > 0, \qquad (23.6)\ (7.19)$$

где знак "равно" возможен лишь на нескольких линиях, принадлежащих сфере

$$|\vec{n}| \equiv |\vec{n}(\theta, \varphi)| = 1. \qquad (23.7)$$

Таким образом, почти везде (т.е. вне упомянутых линий) оказывается

$$v_1^2(\vec{n}) > v_2^2(\vec{n}) > v_3^2(\vec{n}). \qquad (23.8)$$

При величине v_r^2 в (23.8), совпадающей с каждым из значений $v_r^2(\vec{n})$ из (23.8), однородная система уравнений (23.2) разрешима и приводит однозначно (с точностью до нормировочного множителя) к вещественным, непрерывным значениям векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$, $(r = 1, 2, 3)$. При этом векторы $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$ с различными индексами $r(= 1, 2, 3)$ оказываются взаимно ортогональными при каждом значении орта $\vec{n}$.

Распоряжаясь содержащимися в (ортогональных) векторах $\vec{A}^{(r)}$ произвольными множителями, эти векторы всегда подчиняются условиям ортонормировки:

$$\begin{aligned} &\text{в векторном виде} \qquad \left(\vec{A}^{(r)}(\vec{n}) \cdot \vec{A}^{(\rho)}(\vec{n})\right) = \delta_{r\rho}, \\ &\text{или – в компонентах} \qquad \sum_{k=1}^{3} A_k^{(r)} A_k^{(\rho)} = \delta_{r\rho}, \end{aligned} \qquad (23.9)$$

где $\delta_{r\rho}$ – символ Кронекера. К изложенному здесь уместно еще добавить, что условия ортогональности и нормировки очевидным образом распространяются (по непрерывности) и на случай произвольных ортов $\vec{n}$, при которых справедливы соотношения (23.6). Вследствие же непрерывности относительно $\vec{n}$ величин $v_r^2(\vec{n})$ и $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$, соотношения (23.6) и (23.9) легко позволяют различать численными методами корни $v_r^2(\vec{n})$ друг от друга по их индексам "r". К изложенному еще можно присовокупить, что решения $v_r^2(\vec{n})$ и $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$ уравнений (23.3) и (23.2) удовлетворяют свойству симметрии вида

$$f(\vec{n}) = f(-\vec{n}). \qquad (23.10)$$

2. Вещественные векторы

$$\vec{v}_r = v_r(\vec{n})\,\vec{n}, \tag{23.11}$$

определяемые в результате решения уравнений Кристоффеля при заданном орте $\vec{n}$ (из (23.7)), представляют фазовые скорости распространения плоских волн (23.1) в направлении нормали $\vec{n}$ к (плоскому) их фронту. Однако, в отличие от случаев изотропии, в анизотропных упругих средах существует и вторая скорость $\vec{\xi}^{\,(r)} \equiv \vec{\xi}^{\,(r)}(\vec{n})$ распространения волн, – лучевая скорость –, определяющая течение процесса распространения плотности энергии волнового поля плоской (или локально-плоской) волны. Она вещественна при вещественных значениях орта $\vec{n}$ из (23.7) и представляется выражениями

$$\vec{\xi}^{\,(r)} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{(r)}\,\vec{i}_k; \qquad (23.12)$$

$$\xi_k^{(r)} = \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_p^{(r)} A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \qquad (7.33)$$

где $\kappa_k^{(r)}$ – обозначают составляющие вектора рефракции волны типа “r”

$$\vec{\kappa}^{\,(r)} = \frac{\vec{n}}{v_r(\vec{n})} \tag{23.13}$$

по ортам $\vec{i}_k$ декартовой системы координат. При этом оказывается, что фазовая и лучевая скорости распространения плоской волны фиксированного типа “r” связаны друг с другом важными соотношениями

$$\left(\vec{n}\cdot\vec{\xi}^{\,(r)}\right) = v_r, \quad (r = 1, 2, 3), \tag{23.14}$$

или

$$\left(\vec{\kappa}^{\,(r)}\cdot\vec{\xi}^{\,(r)}\right) = 1, \tag{7.34}$$

где $\vec{\kappa}^{\,(r)}$ – векторы рефракции плоской волны из (23.13).

3. Говорят, что плоская волна распространяется в плоскости падения

$$x_3 = 0, \tag{23.15}$$

если у орта $\vec{n}$ ее нормали и у вектора рефракции из (23.13) равны нулю третьи составляющие

$$n_3 = 0; \quad \kappa_3^{(r)} = 0, \tag{23.16}$$

т.е. – векторы $\vec{n}$ и $\vec{\kappa}^{(r)}$ определяются выражениями вида

$$\vec{n} = n_1\vec{i}_1 + n_2\vec{i}_2; \quad \vec{\kappa}^{(r)} = \kappa_1^{(r)}\vec{i}_1 + \kappa_2^{(r)}\vec{i}_2. \tag{23.17}$$

При этом составляющие таких векторов можно представлять в форме

$$n_1 = \sin\theta, \quad n_2 = \cos\theta; \quad \kappa_1^{(r)} = \frac{\sin\theta}{v_r(\theta)}, \quad \kappa_2^{(r)} = \frac{\cos\theta}{v_r(\theta)} \tag{23.18}$$

через угол падения θ между векторами $\vec{n}$ и $\vec{i}_2$, отсчитываемый от орта $\vec{i}_2$ в положительном направлении (по часовой стрелке).

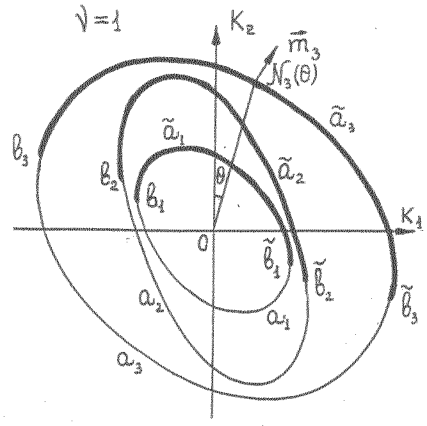

Рис. 6

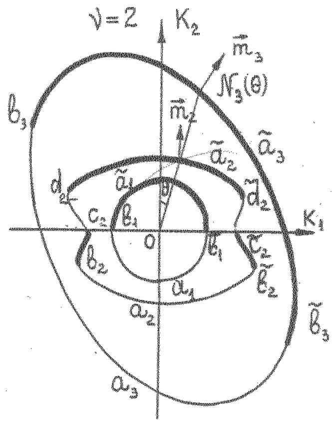

Рис. 7.

Приведенные представления позволяют характеризовать векторы рефракции $\vec{\kappa}^{(r)}(\theta)$ волн различных типов "r", ($r = 1, 2, 3$) кривыми R_r векторов рефракции, построенными как геометрические места концов векторов рефракции $\vec{\kappa}^{(r)}(\theta)$ из (23.17), (23.18), имеющих начало в (произвольно выбираемой) точке O и расположенных в плоскости X_1OX_2 падения плоской волны. Примеры таких кривых (находящих весьма полезные приложения) приведены на рис. 6 и 7.

Каждой точке $N_r(\theta)$ такой кривой отвечает радиус-вектор $\overrightarrow{ON_r}(\theta)$ (образующий с осью OX_2 угол θ), совпадающий по направлению с ортом $\vec{n}$ нормали к фронтам изучаемых плоских волн типов $r = (1, 2, 3)$. Однако вектор $\overrightarrow{ON_r}$, как правило, не ортогонален кривой R_r.

Подобным же образом по заданному орту нормали $\vec{n}$ из (23.17) могут быть вычислены составляющие $\xi_k^{(r)}(\theta)$ из (23.12) вектора лучевой скорости плоской волны

$$\vec{\xi}^{(r)} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{(r)}(\theta)\,\vec{i}_k, \tag{23.19}$$

в которых, как правило, оказывается $\xi_3^{(r)}(\theta) \neq 0$ (в отличие от составляющей $\vec{\kappa}_3^{(r)}(\theta) = 0$ вектора рефракции). По составляющим $\xi_k^{(r)}$ вектора (23.19) из общего начала O_1 могут быть построены кривые l_r лучевых скоростей, задаваемые параметрически в виде линий

$$\xi_k = \xi_k^{(r)}(\theta), \quad k = (1, 2, 3), \tag{23.20}$$

которые уже не располагаются в плоскости падения ($x_3 = 0$), причем их проекции в плоскость падения образуют (как правило) с осью OX_2 углы, отличные от угла θ из (23.18). Такие кривые принадлежат поверхностям Σ_r лучевых скоростей, определяемых как геометрические места концов векторов $\vec{\xi}^{(r)}(\theta, \varphi)$ лучевых скоростей (с началами в некоторой точке O'), отвечающих всевозможным направлениям орта $\vec{n}$ в пространстве. При этом основное свойство каждой такой поверхности Σ_r состоит в том, что нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ_r в каждой ее точке M в точности совпадает с ортом нормали $\vec{n}$, по которому вычислялся вектор $\vec{\xi}^{(r)}$ из (23.12), (23.19). (Сам же вектор $\vec{\xi}^{(r)} = \overrightarrow{O'M}$ с нормалью $\vec{n}$ по направлению не совпадает.)

Таким образом, учитывая замечания о характере распространения энергии волновых полей в анизотропных средах, а также – представление о локально-плоских волнах, можно утверждать, что при включении в точке O' однородной анизотропной упругой среды сосредоточенного сингулярного источника, порождающего разрывные возмущения, возникающие в среде волновые поля имеют при $t = 1$ фронты, совпадающие с поверхностями Σ_r лучевых скоростей всех типов $r = (1, 2, 3)$.

Здесь остается лишь заметить, что если вектор $\vec{\xi}^{\,(r)}(\theta)$ из (23.19), (23.12) спроектировать на плоскость падения и представить суммой касательной $\vec{\xi_{\|}}^{(r)}(\theta)$ и нормальной $\vec{\xi_{\perp}}^{(r)}(\theta)$ составляющих

$$\vec{\xi}^{\,(r)}(\theta) = \vec{\xi_{\|}}^{(r)}(\theta) + \vec{\xi_{\perp}}^{(r)}(\theta); \quad \left(\vec{\xi_{\perp}}^{(r)} = \xi_3^{(r)}\,\vec{i}_3\right), \tag{23.21}$$

то вектор $\vec{\xi_{\|}}^{(r)}(\theta)$, лежащий в плоскости падения, окажется (см. п. 2 §24) параллельным орту нормали $\vec{m}_r$ к кривой R_r вектора рефракции $\vec{\kappa}^{\,(r)}(\theta)$, построенному в точке $N_r(\theta)$ этой кривой. Заметим, что указанное свойство нормалей $\vec{m}_r(\theta)$ (см. п. 4 §24) играет существенную роль при учете условий излучения в задаче на отражение-преломление волн на плоской границе раздела двух анизотропных сред.

4. В предыдущем пункте плоские волны рассматривались здесь как функции основного параметра $\vec{n} = \vec{n}(\theta)$ – орта нормали к фронту исследуемой волны, задаваемого в (выбранной) плоскости $(x_3 = 0)$ ее падения.

В такой постановке проблема сводилась к алгебраической системе уравнений (23.2) и (23.3) с определенно положительной симметричной матрицей из (7.16), что и обусловило, в частности, вещественность решения задачи, т.е. вещественность всех величин

$$v_r(\theta), \quad \vec{\kappa}^{\,(r)}(\theta), \quad \vec{A}^{\,(r)}(\theta) \quad \text{и} \quad \xi_k^{(r)}(\theta).$$

При этом построенное решение позволило естественным образом ввести в теорию вектор рефракции $\vec{\kappa}^{\,(r)}$ из (23.13), в компонентах которого система уравнений (23.2) принимала вид

$$\sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(r)}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)} - A_i^{(r)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{23.22}$$

с условием разрешимости

$$\left|\sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(r)}\,\kappa_p^{(r)} - \delta_{iq}\right| = 0. \tag{23.23}$$

Полученная система уравнений допускает более общий подход к построению ее решений, при котором за независимый параметр задачи выбирается первая составляющая $\kappa_1 \equiv \kappa_1^{(r)} > 0$ векторов рефракции, а искомыми оказываются все возможные вторые их составляющие $\kappa_2 \equiv \kappa_2^{(r)}$. Уравнение (23.23) (являющееся условием разрешимости системы уравнений (23.22)) как алгебраическое уравнение 6-ой степени с вещественными коэффициентами имеет шесть корней, либо вещественных, либо – попарно комплексно-сопряженных. При этом все вещественные его корни $\kappa_2^{(r)}$ (являющиеся вторыми составляющими вектора рефракции $\kappa^{(r)}$ из (23.13)), оказываются в то же время корнями уравнения (23.3). Они могут быть построены графически путем пересечения прямыми вида

$$\kappa_1 = \widehat{c} > 0 \tag{23.24}$$

всех кривых R_r – векторов рефракции, представители которых приведены на рис. 6 и 7.

5. В качественном отношении решения систем уравнений (23.22) и (23.23) целесообразно связывать с наличием или с отсутствием пересечений прямых вида (23.24) с кривыми R_r векторов рефракции, построенных для рассматриваемой анизотропной среды.

В случае достаточно малых углов падения θ прямые (23.24) (у которых величина $\widehat{c}$ мала) пересекают кривые R_r в трех парах точек. Это соответствует шести вещественным корням κ_2 уравнения (23.23), определяющим (совместно со значением κ_1 из (23.24)) по паре вещественных векторов рефракции, с каждым из индексов $r = 1, 2, 3$. При этом на верхних участках кривых R_r из рис. 6 и 7, выполненных жирными линиями, нормали $\vec{m}_r$ к кривым R_r в их точках $N(\theta)$ образуют с осью OX_2 острые углы, т.е. оказывается $(\vec{m}_r \cdot \vec{i}_2) > 0$ или, что то же (см. §24), выполняются неравенства

$$\left(\vec{\xi}^{\,(r)} \cdot \vec{i}_2\right) = \left(\vec{\xi}_{\|}^{\,(r)} \cdot \vec{i}_2\right) > 0, \tag{23.25}$$

где $\vec{\xi}^{\,(r)}$ – вектор лучевой скорости волны типа r (отвечающей орту нормали $\vec{n}(\theta)$) из (23.19), (23.21). Если же значение $\kappa_1 > 0$ возрастает так, что прямая $\kappa_1 = \widehat{c}$ (продолжающая пересекать кривые R_2 и R_3 каждую в двух точках) перестает пересекать кривую R_1, то это означает, что вторая составляющая $\kappa_2^{(1)}$ вектора рефракции (с индексом $r = 1$)

$$\vec{\kappa}^{(1)} = \kappa_1^{(1)} \vec{i}_1 + \kappa_2^{(1)} \vec{i}_2 \tag{23.26}$$

стала комплексной

$$k_2^{(1)} = \widetilde{\kappa}_2^{(1)} \pm i\alpha_1, \quad (\alpha_1 > 0). \tag{23.27}$$

Появление комплексного вектора рефракции (23.26), (23.27) приводит к изменению структуры решения $\vec{u}^{(1)}$ из (23.1), которое из вещественной однородной плоской волны обращается в комплексное решение в виде затухающей (при $x_2 \to \infty$ или $x_2 \to \infty$) волны

$$\begin{aligned} &\vec{u}_1^{(1)} = e^{-\omega\alpha_2|x_2|} \operatorname{Re} \vec{A}^{(r)} \exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}_0^{(1)} \vec{x}\big], \\ \text{где} \quad &\vec{\kappa}_0^{(1)} = \kappa_1^{(1)} \vec{i}_1 + \widetilde{\kappa}_2^{(1)} \vec{i}_2, \quad \Big(\kappa_1^{(1)} = \widehat{c}\Big). \end{aligned} \tag{23.28}$$

Подобные затухающие (как говорят неоднородные) плоские волны играют существенную роль в задачах на отражение-преломление волн на границе раздела двух анизотропных полупространств. Они ответственны за явления “внутреннего отражения” волн и за экранирование волновых полей. При этом детали качественного описания таких явлений на фоне других плоских волн оказываются тесно связанными с особенностями пересечения прямыми вида (23.24) остальных кривых R_r векторов рефракции. Здесь остается лишь присовокупить, что в случае появления в процессе отражения-преломления неоднородных плоских волн, у которых составляющая $\kappa_2^{(r)}$ вектора рефракции $\vec{\kappa}^{(r)}$ комплексна, векторы поляризации $\vec{A}^{(r)}$ и лучевой скорости $\vec{\xi}^{(r)}$ также оказываются комплексными. Вследствие этого приходится, в частности, изменять вид условия ортонормировки (23.9) вектора поляризации, заменяя его соотношением

$$\Big(\vec{A}^{(r)} \cdot \overline{\vec{A}^{(\rho)}}\Big) = \sum_{k=1}^{3} A_k^{(r)} \overline{A_k^{(\rho)}} = \delta_{r\rho}, \tag{23.29}$$

где $\delta_{r\rho}$ – символ Кронекера.

§24. Поверхности и кривые векторов рефракции и лучевых скоростей плоских волн. Основные их свойства и прикладное значение

В п. 3 §23 введены понятия о кривых R_r векторов рефракции и кривых l_r – векторов лучевых скоростей плоских волн типов

$(r = 1, 2, 3)$, характеризуемых полями смещений вида (23.1), причем указаны и некоторые общие свойства таких кривых. Кривые R_r находят весьма полезные приложения при изучении процессов отражения-преломления плоских (и, что особенно важно, локально-плоских) волн на границе раздела двух анизотропных упругих сред. При этом подходы к рассмотрению таких процессов допускают непосредственное обобщение и на случаи описания волновых волей в рамках лучевого метода. Вследствие этого представляется полезным остановиться более подробно на установлении и формулировке важнейших свойств кривых R_r и l_r с разъяснением их физического смысла и прикладного значения.

1. Здесь уместно начать с общего предварительного замечания, касающегося сути обсуждаемых вопросов.

Пусть при описании волновых процессов выбрана некоторая декартова система координат $\{x_k\} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$, и для этой системы вычислены составляющие $\lambda_{ik,pq}$ тензора относительных упругих постоянных рассматриваемой анизотропной (однородной) среды. При произвольно-задаваемых значениях орта нормалей

$$\vec{n} \equiv \vec{n}(\theta, \varphi)$$

из полного их множества $\{\vec{n}(\theta, \varphi)\}$, где θ и φ – сферические координаты точек M среды, параметры плоской волны вида (23.1) определяются из системы уравнений (23.2) и условия (23.3) ее разрешимости, или же – из эквивалентной им системы уравнений (23.22) и (23.23), в которых вместо $\vec{n}$ в рассмотрение введены составляющие вещественного вектора рефракции

$$\vec{\kappa}^{(r)} = \frac{\vec{n}}{v_r(\vec{n})} \tag{24.1}$$

из (23.13). В результате решения указанных уравнений (сначала) определяются фазовые скорости $v_r^2(\vec{n})$ (и $v_r(\vec{n})$) распространения волн всех трех (возможных) типов $(r = 1, 2, 3)$ и их векторы поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$, подчиненные условиям ортонормировки

$$\left(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(\rho)}\right) = \delta_{r\rho}. \tag{24.2}$$

Затем же вычисляются и векторы рефракции (24.1), а также – векторы лучевых скоростей $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ из (23.12) с их составляющими

$$\xi_k^{(r)} = \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \quad (k=1,2,3). \tag{24.3}$$

При этом, очевидно, оказываются справедливыми следующие условия симметрии

$$\begin{gathered} v_r(\vec{n}) = v_r(-\vec{n}), \quad \vec{A}^{(r)}(\vec{n}) = \vec{A}^{(r)}(-\vec{n}), \quad (r=1,2,3), \\ \vec{\kappa}^{(r)}(\vec{n}) = -\vec{\kappa}^{(r)}(-\vec{n}), \quad \vec{\xi}^{(r)}(\vec{n}) = -\vec{\xi}^{(r)}(-\vec{n}) \end{gathered} \tag{24.4}$$

Из уравнений (23.22) с учетом нормировки (24.2) (или (24.9)) получаются и необходимые нам “исходные соотношения”

$$\sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(r)}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)} - A_i^{(r)} = 1, \tag{24.5}$$

переписываемые в форме

$$\left(\vec{\xi}^{(r)} \cdot \vec{\kappa}^{(r)}\right) = 1, \quad (r=1,2,3). \tag{24.6}$$

Пусть теперь значения орта $\vec{n}$ из множества $\{\vec{n}(\theta,\varphi)\}$ произвольно варьируются и пусть величины

$$d\vec{\kappa}^{(r)}, \quad d\vec{\xi}^{(r)} \quad \text{и} \quad d\vec{A}^{(r)}$$

обозначают соответственные вариации функций $\vec{\kappa}^{(r)}(\vec{n})$, $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ и $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$. Тогда из соотношений (24.6), а также из (развернутого) соотношения (24.5) при учете свойства (23.5) симметрии величин $\lambda_{ik,pq}$ и условия нормировки (24.2) получаются окончательные соотношения

$$\left(\vec{\xi}^{(r)} \cdot d\vec{\kappa}^{(r)}\right) + \left(\vec{\kappa}^{(r)} \cdot d\vec{\xi}^{(r)}\right) = 0 \tag{24.7}$$

и

$$2\sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)}\,A_i^{(r)}\,d\kappa_k^{(r)} + 2\sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(r)}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)}\,dA_i^{(r)} =$$

$$= 2\left(\vec{\xi}^{(r)} \cdot d\vec{\kappa}^{(r)}\right) = 0, \tag{24.8}$$

в которых второе слагаемое из (24.8) приводится с помощью системы уравнений (23.22) к форме

$$\sum_{k=1}^{3} A_i^{(r)}\, dA_i^{(r)} = 0$$

равной нулю, вследствие условий нормировки из (24.2). На основании же (24.8) и (24.7) следует и второе требующееся нам соотношение

$$\left(\vec{\kappa}^{\,(r)} \cdot d\vec{\xi}^{(r)}\right) = 0. \qquad (24.9)$$

2. При вычисленных значениях векторов рефракции $\vec{\kappa}^{\,(r)}(\vec{n})$ и векторов лучевых скоростей $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$, отвечающих любому значению орта $\vec{n}$ из множества $\{\vec{n}(\theta,\varphi)\}$, можно ввести понятие о поверхностях S_r векторов рефракции и поверхностях Ξ_r векторов лучевых скоростей как о геометрических местах концов векторов

$$\vec{\kappa}^{\,(r)}(\vec{n}) \equiv \vec{\kappa}^{\,(r)}(\theta,\varphi) \quad \text{и} \quad \vec{\xi}^{(r)}(\vec{n}) \equiv \vec{\xi}^{(r)}(\theta,\varphi),$$

начала которых отнесены к каким-то фиксированным точкам O и O_1. При таких построениях вариации

$$d\vec{\kappa}^{\,(r)} \quad \text{и} \quad dv\xi^{\,(r)},$$

отнесенные соответственно к точкам поверхностей S_r и Σ_r, оказываются “малыми” векторами, лежащими в касательных плоскостях соответственно к поверхностям S_r и Σ_r.

Таким образом, соотношения (24.8) означают, что вектор лучевой скорости $\vec{\xi}^{(r)}(N_r)$, вычисленный в произвольной точке $N_r \in S_r$ поверхности вектора рефракции (того же индекса r), совпадает по направлению с внешней нормалью $\vec{m}$ к этой поверхности в точке N_r. А соотношение (23.9) подобным же образом означает, что вектор рефракции $\vec{\kappa}^{\,(r)}(M_r)$, вычисленный по (24.1) в произвольной точке $M_r \in \Sigma_r$ поверхности лучевых скоростей, совпадает по направлению с (внешней) нормалью $\vec{n}$ к этой поверхности в точке M_r. Вследствие же этого оказывается, что нормаль $\vec{n}$ в точке $M_r \in \Sigma_r$ к поверхности лучевых скоростей совпадает с ортом нормали $\vec{n}$, по которому вычисляется вектор $\vec{\xi}^{(r)} \equiv \vec{\xi}^{(r)}(\vec{n})$ лучевой скорости из (24.3) (равно как и все прочие параметры поля смещений (23.1) плоских волн). Это обстоятельство находит свое (физическое) объяснение в рамках представлений о локально-плоских волнах (из п. 1 §8), получающих завершенную форму в формализме лучевого метода.

3. Как следует из §8, а в завершенном виде – из формализма лучевого метода, поверхности Σ_r лучевых скоростей играют важную роль при описании фронтов волн, возбуждаемых сосредоточенными источниками (в то время, как линии l_r лучевых скоростей не нашли пока физических приложений). Поверхности же S_r векторов рефракции не представляют (пока) самостоятельного интереса. Однако сечения поверхностей S_r "плоскостями падения", приводящие к кривым R_r векторов рефракции (из п. 3 §23) нашли весьма полезные приложения при описании процессов отражения-преломления волн на границах раздела анизотропных упругих сред. При этом в строгой форме такие процессы рассматриваются в рамках теории плоских волн, формализм которой допускает физически-очевидные (приближенные) обобщения на случаи локально-плоских волновых полей. Последние же приобретают окончательный (точный) смысл в формализме лучевого метода.

Имея в виду дальнейшие рассмотрения процессов отражения-преломления волн на границах раздела анизотропных упругих сред, представляется полезным познакомиться более подробно с кривыми R_r векторов рефракции всех типов ($r = 1, 2, 3$) и с основными их свойствами.

4. В п. 3 §23 рассматривались плоские волны вида (23.1), распространяющиеся в произвольно-выбираемой "плоскости падения" $x_3 = 0$, орты нормалей и векторы рефракции которых представляются в виде

$$\vec{n} = n_1\vec{i}_1 + n_2\vec{i}_2; \quad \vec{\kappa}^{(r)} = \kappa_1^{(r)}\,\vec{i}_1 + \kappa_2^{(r)}\,\vec{i}_2. \tag{24.10}$$

При этом составляющие таких векторов определялись выражениями

$$n_1 = \sin\theta, \quad n_2 = \cos\theta; \quad \kappa_1^{(r)}(\theta) = \frac{\sin\theta}{v_r(\theta)}, \quad \kappa_2^{(r)}(\theta) = \frac{\cos\theta}{v_r(\theta)} \tag{24.11}$$

через угол падения θ, отсчитываемый от оси $\overrightarrow{O\kappa_2}$ (орт $\vec{i}_2$) к оси $\overrightarrow{O\kappa_1}$ (орт $\vec{i}_1$) по ходу часовой стрелки.

Кривые R_r векторов рефракции из (24.1), определяемые параметрическими уравнениями

$$\kappa_1 = \kappa_1^{(r)}(\theta), \quad \kappa_2 = \kappa_2^{(r)}(\theta), \quad \kappa_3 = 0 \tag{24.12}$$

при значениях $\kappa_r^{(r)}$ из (24.10), располагаются, очевидно, в сечении поверхностей S_r векторов рефракции из п. 2 плоскостью $\kappa_3 = 0$. При этом вектор (пространственной) нормали $\vec{m}_r^0$ к поверхности S_r в ее точке N_r из плоскости падения представляется в виде

$$\vec{m}_r^0 = \vec{m}_{\|}^{(r)} + \vec{m}_3^{(r)}\,\vec{i}_3, \tag{24.13}$$

где $\vec{m}_{\|}^{(r)}$ – составляющая орта нормали $\vec{m}_r^0$ в плоскости падения $(x_3 = 0)$. Поэтому величина

$$\vec{m}_r = \frac{\vec{m}_{\|}^{(r)}}{\left|\vec{m}_{\|}^{(r)}\right|} \tag{24.14}$$

оказывается ортом нормали к (плоской) кривой R_r вектора рефракции.

Что же касается (важного) результата из п. 2 о параллельности вектора $\vec{\xi}^{(r)}(N_r)$ лучевой скорости в точке $N_r \in S_r$ орту нормалей $\vec{m}_r^0$ из (24.13), то он приводит к равенству

$$\vec{\xi}^{(r)}(N_r) = \left|\vec{\xi}^{(r)}\right|\vec{m}_r^0 \equiv \left|\vec{\xi}^{(r)}\right|\Big(\vec{m}_{\|}^{(r)} + \vec{m}_3^{(r)}\,\vec{i}_3\Big),$$

из которого вытекают требуемые нам соотношения вида

$$\Big(\vec{i}_2\,\vec{\xi}^{(r)}\Big) = \left|\vec{\xi}^{(r)}\right|\Big(\vec{i}_2\vec{m}_{\|}^{(r)}\Big) = \left|\vec{\xi}^{(r)}\right|\,\left|\vec{m}_{\|}^{(r)}\right|\Big(\vec{i}_2\cdot\vec{m}_r\Big) \tag{24.15}$$

при любых ортах $\vec{i}_1$ и $\vec{i}_2$ плоскости падения.

Из соотношений (24.15) следует, что факт наличия у вектора лучевой скорости $\vec{\xi}^{(r)}(N_r)$ составляющей, параллельной орту $\vec{i}_2$, строго определяется наличием такой составляющей у орта

$$\vec{m}_r(N_r)$$

(из (24.14)) нормали к плоской кривой R_r векторов рефракции. Таким образом, по направлению (внешних) нормалей $\vec{m}_r(N_r)$ к кривым R_r можно судить о том, распространяется ли волна (характеризуемая лучевой скоростью $\vec{\xi}^{(r)}(N_r)$) в сторону, определяемую ортом $\vec{i}_2$, или нет. А это означает, что кривые R_r векторов рефракции (в выбранной плоскости падения) представляет простой и наглядный способ учета условий излучения в случае анизотропных сред.

5. Обращаясь к более подробному рассмотрению кривых $R_r \equiv R_r(\theta)$ векторов рефракции из (24.12), прежде всего отметим, что вследствие очевидного свойства

$$v_r(\vec{n}\,) = v_r(-\vec{n}\,) \quad \text{или} \quad v_r(\theta) = v_r(\theta \pm \pi)$$

решений уравнений Кристоффеля (23.3), точки N_r кривых R_r на плоскости их падения располагаются симметрично относительно начальной их точки O. (От которой откладываются векторы $\vec{\kappa}^{\,(r)}(\theta)$ при построении кривых R_r.)

В простейших, но широко распространенных случаях (когда выполняются неравенства $v_1(\theta) > v_2(\theta) > v_3(\theta)$ и все кривые R_r выпуклые) кривые векторов рефракции располагаются так, как это изображено на рис. 6. Они охватывают друг друга без взаимных пересечений, причем прямые

$$\kappa_1 = \widehat{c} = \mathrm{const} \tag{24.16}$$

пересекают каждую из кривых R_r не более, чем в двух точках. В точках $\tilde{b}_r$ кривых координата $\kappa_1 = \kappa_1^{(r)}(\theta)$ принимает максимальные, а в точках b_r – минимальные значения. В промежуточных же углах падения θ, соответствующих участкам $\tilde{b}_r \tilde{a}_r b_r$ кривых рис. 6 (жирные линии) внешние нормали $\vec{m}_r$ к кривым имеют положительной (вторую) составляющую $(m_r)_2 > 0$ (т.е. $(\vec{m}_r \cdot \vec{i}_2) > 0$. Поэтому при указанных ушлах падения θ плоская волна (23.1) имеет лучевую скорость $\vec{\xi}^{\,(r)}(\theta)$, у которой $(\vec{\xi}^{\,(r)} \cdot \vec{i}_2) > 0$. А это означает, что волна распространяется в сторону возрастающих значений x_2. Напротив того, углам падения θ, отвечающим участкам $b_r a_r \tilde{b}_r$ кривых R_r из рис. 6 (тонкие линии), соответствуют плоские волны, распространяющиеся в сторону убывания значений x_2.

В общем же случае параметров среды дело обстоит много сложнее. Только внутренняя кривая R_1 обладает прежними свойствами и пересекается прямой типа (24.16) в двух точках (или ни в одной).

Что же касается кривых R_2 и R_3 векторов рефракции, то они могут пересекаться друг с другом в нескольких точках и иметь с прямыми (24.16) более двух пересечений. Наличие взаимных пересечений кривых R_2 и R_3 не сказывается на качественной картине явлений отражения-преломления плоских волн. Поэтому, ради сокращения описаний, мы ограничимся здесь лишь учетом пересечений кривых R_2 и R_3 с прямыми вида (24.16), причем будем считать, что кривые R_r, $(r = 1, 2, 3)$ охватывают друг друга.

Функция $\kappa_1 = \kappa_1^{(2)}(\theta)$ (отвечающая кривой R_2 вектора рефракции, заключенной между кривыми R_1 и R_3 на рис. 6 и 7) может иметь в области $\theta > 0$ или один максимум и нуль минимумов (точка $\tilde{b}_2$ на рис. 6), или же два максимума (в точках $\tilde{b}_2$ и $\tilde{d}_2$ рис. 7) и один минимум (в точке $\tilde{c}_2$ рис. 7). Функция же $\kappa_1^{(3)}(\theta)$ из (24.10), (24.11), отвечающая внешней кривой R_r на рис. 6 и 7, может иметь один максимум и нуль минимумов (как на рис. 6 и 7), или два максимума и один минимум. При этом все упоминавшиеся минимумы должны располагаться по отношению к максимумам соответствующей внутренней кривой R_r так, чтобы любая прямая (24.16) пересекалась со всеми тремя кривыми R_r не более чем в шести точках. Один из достаточно типичных случаев расположения кривых векторов рефракции R_r приведен на рис. 7. В нем участкам кривых, проведенных жирными линиями, отвечают промежутки углов θ, при которых волна (23.1) распространяется в сторону возрастающих значений x_2.

§25. Задача на отражение-преломление плоских волн на границах раздела анизотропных полупространств. Полное внутреннее отражение и неоднородные плоские волны

В задачах на отражение-преломление плоских волн на границе раздела анизотропных полупрострнств, как и в случае изотропных упругих сред, основные затруднения логического характера возникают при постановках задач. Истоки подобных затруднений одинаковы, причем в случае изотропных сред они обсуждались в §20. Поэтому здесь мы не будем на них останавливаться, а примем без дополнительной аргументации два достаточно правдоподобных утверждения. Первое из них выражает убеждение, что при отражении-преломлении на плоской границе раздела двух однородных анизотропных сред возбуждаются отраженные и преломленные волны, принадлежащие также к семейству плоских волн. Второе же гласит, что под падающей на границу раздела должна пониматься плоская волна, вектор лучевой скорости которой направлен в сторону границы раздела (т.е. имеет нормальную составляющую, направленную к границе). А под отраженными и преломленными границей волнами следует понимать плоские (однородные или неоднородные) волны, или уходящие от границы в указанном смысле, или же затухаюшие до нуля по мере удаления от границы на “бесконечность”. Подобные утверждения будут именоваться далее "условиями излучения".

Помимо изложенного уже здесь уместно условиться, что физический смысл придается далее лишь одной (например) вещественной части записей волновых полей в применяемой далее всюду комплексной форме.

1. Имея в виду дальнейшие приложения к задачам на отражение-преломление в рамках лучевого метода, целесообразно исходить из общих формулировок в постановках задач и уточнять их лишь по мере необходимости.

Пусть в системе координат $\{x_k\}$ с началом в точке O задана плоскость

$$\big(\vec{x}\cdot\vec{m}\big) = 0 \tag{25.1}$$

с ортом нормали $\vec{m}$, проходящая через точку O, разделяющая среду на два упругих анизотропных полупространства

$$\big(\vec{x}\cdot\vec{m}\big) > 0, \quad (\nu = 1); \qquad \big(\vec{x}\cdot\vec{m}\big) < 0, \quad (\nu = 2), \tag{25.2}$$

характеризуемых постоянными плотностями ρ_ν и упругими параметрами

$$\rho_\nu, \quad c^{(\nu)}_{ik,pq}, \quad \lambda^{(\nu)}_{ik,pq} = \frac{1}{\rho_\nu}\, c^{(\nu)}_{ik,pq}. \tag{25.3}$$

Предполагая, что полупространства находятся, например, в жестком контакте, допустим, что из полупространства $\nu = 2$ на границу раздела (25.1) падает однородная плоская волна

$$\vec{u}^{\,0} = a_0 \vec{A}^{(0)} \exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}^{\,0}\cdot\vec{x}\big]; \qquad \vec{\kappa}^{\,0} = \frac{\vec{n}^{\,0}}{v_0(\vec{n}^{\,0})} \tag{25.4}$$

некоторого фиксированного типа $r = r_0$. В результате взаимодействия ее с границей (25.1), в средах $\nu = 2$ и $\nu = 1$ возбуждаются отраженные и преломленные волны

$$\begin{gathered} \vec{u}_2 = \sum_{r=1}^{3} a_r \vec{A}^{(r)} \exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}^{(r)}\cdot\vec{x}\big], \\ \vec{\tilde{u}}_1 = \sum_{r=1}^{3} b_r \vec{\tilde{A}}^{(r)} \exp i\omega\big[t - \vec{\tilde{\kappa}}^{(r)}\cdot\vec{x}\big], \end{gathered} \tag{25.5}$$

(представляющиеся наложением плоских волн трех различных типов r), удовлетворяющие уравнениям движения в средах и условиям излучения, притом такие, что на границе раздела (25.1) выполняются (линейные) соотношения контакта

$$\vec{u}^{\,0} + \vec{u}_2 = \vec{\tilde{u}}_1; \quad \vec{t}_m^{\,(2)}(\vec{u}^{\,0} + \vec{u}_2) = \vec{t}_m^{\,(1)}\,\vec{\tilde{u}}_1) \tag{25.6}$$

при значениях $\vec{x}$ из (25.1). (Здесь $\vec{t}_m^{\,(\nu)}$ обозначает вектор напряжений поля на границе раздела.)

Как и в случае изотропных сред задача состоит в определении всех параметров отраженных и преломленных волн из (25.5) по известным значениям параметров падающей волны (25.4).

Таким образом, в логическом отношении постановка задачи в случае анизотропных контактирующих полупространств не отличается от случая изотропных. Различия, носящие технический характер, сводятся: 1) к способу выбора параметров $\vec{\kappa}$ и $\vec{A}$ плоской волны с тем, чтобы выражения вида (25.4) и (25.5) удовлетворяли уравнениям и их физическому смыслу; и 2) к тому факту, что в случае изотропной среды монохроматическое волновое поле сводится к волнам (p и s) двух независимых типов, а в случае анизотропии – трех типов ($r = 1, 2, 3$).

2. При сопоставлении, ради наглядности, подходов к решению задач указанного типа уместно заметить следующее:

В случае изотропных сред задание, например, первичной волны, падающей на границу (25.1) раздела сред из среды $\nu = 2$, сводится, как известно, к выбору орта нормали $\vec{n}^{\,0}$ к фронту (определяющего направление распространения волны), удовлетворяющего условия излучения

$$\big(\vec{n}^{\,0} \cdot \vec{m}\,\big) > 0, \tag{25.7}$$

а также – к выбору значений

$$\vec{\kappa}^{\,0} = \frac{\vec{n}^{\,0}}{v_p}, \quad \vec{A}^{\,0} = \vec{\kappa}^{\,0}, \quad \text{или} \quad \vec{\kappa}^{\,0} = \frac{\vec{n}^{\,0}}{v_s}, \quad \vec{A}^{\,0} = \big[\vec{m} \times \vec{\kappa}^{\,0}\big] \tag{25.8}$$

векторов рефракции и векторов поляризации в случае падающей p- или s-волны (п. 2 §20). При указанном выборе поля смещений вида (25.4) и (25.5) оказываются удовлетворяющими уравнениям движения среды, а по орту нормали $\vec{n}^{\,0}$ к фронту естественным образом учитываются и требуемые условия излучения.

В случае же анизотропии контактирующих упругих полупространств, при выбранной нормали $\vec{n}^{\,0}$ к фронту падающей волны (для удовлетворения уравнениям движения) сначала приходится решать систему уравнений (23.2) с условием разрешимости (23.3), или – эквивалентную им систему (23.22) и (23.23) для векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n}^{\,0})$ и вещественных векторов рефракции

$$\vec{\kappa}^{\,(r)} = \frac{\vec{n}^{\,0}}{v_r^{(2)}(\vec{n}^{\,0})}, \quad (r = 1, 2, 3) \tag{25.9}$$

в среде $\nu = 2$.

В результате этого определяются возможные значения векторов рефракции $\vec{\kappa}^{\,(r)}(\vec{n}^{\,0})$ и векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n}^{\,0})$ при $r = 1, 2, 3$, подчиненных условиям ортонормировки (23.9) или (24.2). Из найденных таким образом значений

$$\vec{\kappa}^{\,(r)}(\vec{n}^{\,0}) \ \text{ и } \ \vec{A}^{(r)}(\vec{n}^{\,0}), \quad (r = 1, 2, 3)$$

отбираются значения $\vec{\kappa}^{\,(r_0)}(\vec{n}^{\,0})$ и $\vec{A}^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0})$ выбранной падающей волны, и для нее строится вектор лучевой скорости $\vec{\xi}^{\,(r_0)} = \sum\limits_{r=1}^{3} \xi_k^{(r_0)}\,\vec{i}_k$ с составляющими

$$\xi_k^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0}) = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}^{(2)}\,\kappa_p^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0})\,\vec{A}_q^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0})\,\vec{A}_i^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0}) \tag{25.10}$$

для проверки выполнимости условия излучения

$$\left(\vec{\xi}^{(r_0)} \cdot \vec{m}\right) > 0. \tag{25.11}$$

Если такое условие при $\vec{n} = \vec{n}^{\,0}$ выполняется, то в представлении (25.4) падающей волны полагают

$$\vec{\xi}^{\,0} = \vec{\xi}^{\,(r_0)}(\vec{n}^{\,0}), \quad \vec{A}^{\,0} = \vec{A}^{(r_0)}(\vec{n}^{\,0}). \tag{25.12}$$

Если же в (25.11) обнаруживается знак $<$, то за нормаль (к фронту) падающей волны берут орт

$$\vec{n}^{\,(r_0)} = -\vec{n}^{\,0}.$$

Подобными же соображениями руководствуются и при выборе аналитических представлений из (25.5) для отраженных и преломленных волн.

Однако при определении параметров отраженных и преломленных волн из (25.5) первоочередным (как и в случае изотропии) оказывается выбор ортов нормалей $\vec{n}^{(r)}$ и $\vec{\tilde{n}}^{(r)}$ отраженно-преломленных волн по заданному орту $\vec{n}^{\,0}$ падающей волны. Решение такой проблемы производится на основании предварительного (качественного) учета граничных условий (25.6) задачи, который позволяет, кроме того, внести некоторые упрощения и в формулировку рассматриваемой задачи.

3. Из наиболее общего свойства граничных условий – их линейности относительно аргумента $\vec{u}$ выражения $\vec{t}_m^{(r)}[\,\vec{u}\,]$ векторов напряжения на границе раздела – следует, что при подстановке в (25.6) векторов смещений из (25.4) и (25.5) получаются однородные соотношения, в каждое из которых множителем входит выражение вида

$$\exp i\omega\big[t - (\vec{\kappa}\cdot\vec{x}\,)\big] \qquad (25.13)$$

при значениях $\vec{\kappa} = \big(\vec{\kappa}^{\,0}, \vec{\kappa}^{\,(r)}, \vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)}\big)$, содержащее переменную $\vec{x}$ границы раздела (25.1).

Условия контакта (25.6) должны выполняться тождественно относительно такой переменной $\vec{x}$, что возможно, очевидно, только при тождественном выполнении соотношений

$$\big(\vec{\kappa}^{\,(r)}\cdot\vec{x}\big) = \Big(\vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)}\cdot\vec{x}\Big) = \big(\vec{\kappa}^{\,0}\cdot\vec{x}\,\big) \qquad (25.14)$$

относительно векторов $\vec{x}$, лежащих в плоскости (25.1). А отсюда вытекают равенства

$$\Big(\big(\vec{\kappa}^{\,(r)} - \vec{\kappa}^{\,0}\big)\cdot\vec{x}\Big) = \Big(\big(\vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)} - \vec{\kappa}^{\,0}\big)\cdot\vec{x}\Big) \equiv 0,$$

выполняющиеся при всех $\vec{x}$ из (25.1), означающие параллельность векторов $\big(\vec{\kappa}^{\,(r)} - \vec{\kappa}^{\,0}\big)$ и $\big(\vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)} - \vec{\kappa}^{\,0}\big)$ орту нормали $\vec{m}$ из (25.1).

Таким образом, из соотношений (25.14) следуют представления для векторов рефракции

$$\vec{\kappa}^{\,(r)} = \vec{\kappa}^{\,0} + \alpha\vec{m}, \quad \vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)} = \vec{\kappa}^{\,0} + \beta\vec{m}, \quad (r = 1, 2, 3), \qquad (25.15)$$

где α и β любые вещественные числа, а также – равенства

$$\big[\vec{\kappa}^{\,(r)}\times\vec{m}\,\big] = \Big[\vec{\tilde{\kappa}}^{\,(r)}\times\vec{m}\,\Big] = \big[\vec{\kappa}^{\,0}\times\vec{m}\,\big] \equiv \vec{c}_0, \qquad (25.16)$$

выражающие, как выясняется (см. п. 4), закон Снеллиуса.

Соотношения (25.15) означают, что нормали $\vec{n}$ к фронтам всех волн (или – векторы рефракции всех волн, участвующих в процессе) лежат в одной и той же плоскости – в “плоскости падения”, построенной на векторах $\vec{\kappa}^{\,0}$ и $\vec{m}$.

Это обстоятельство позволяет упростить все исходные положения задачи путем введения естественной системы координат $\{x_k\}$, в которой границей раздела является, например, плоскость

$$x_2 = 0 \tag{25.17}$$

(с ортом нормали $\vec{m} = \vec{i}_2$), а плоскость $x_3 = 0$ – оказывается плоскостью падения в задаче на отражение-преломление волн. Здесь остается лишь отметить, во-первых, что в силу тождеств (25.14) и все множители вида (25.13) имеют тождественные значения, что позволяет их сокращать в соотношениях (25.6), учитывающих граничные условия (см. п. 5). Во-вторых же уместно подчеркнуть, что вывод о плоскости падения (25.15) и о соотношениях (25.16) Снеллиуса не зависят от типа рассматриваемых граничных условий, а являются лишь следствием их линейности.

4. Пусть задача на отражение-преломление первичной (падающей) волны из (25.14) ставится в выбранной естественной системе координат $\{x_k\}$, и пусть вектор рефракции падающей волны определяется выражением

$$\vec{\kappa}^{\,0} = \frac{\vec{n}^{\,0}}{v^{(2)}_{r_0}(\vec{n}^{\,0})} \equiv \frac{\sin\theta^0}{v^{(2)}_{r_0}(\theta^0)} + \frac{\cos\theta^0}{v^{(2)}_{r_0}(\theta^0)}\,\vec{i}_2, \tag{25.18}$$

заданным в плоскости $x_3 = 0$, принятой за плоскость падения (всех волн). При этом построение вектора рефракции $\vec{\kappa}^{\,0}$ и вектора поляризации $\vec{A}^{\,0}$ падающей волны (удовлетворяющей уравнениям движения и условиям излучения) производится на основе уравнений (23.2) и (23.3) так, как указано в п. 2.

Подлежащие же определению отраженные и преломленные волны, соответственно в средах $x_2 < 0$, $(\nu = 2)$ и $x_2 > 0$, $(\nu = 1)$, представляются в виде (25.5) при условии, что их векторы рефракции

$$\begin{aligned}
\vec{\kappa}^{\,(r)} &= \frac{\vec{n}_2^{(r)}}{v^{(2)}_r(\vec{n}_2^{(r)})} \equiv \frac{\sin\theta_r}{v^{(2)}_r(\theta_r)}\,\vec{i}_1 + \frac{\cos\theta_r}{v^{(2)}_r(\theta_r)}\,\vec{i}_2,\\
\vec{\widetilde{\kappa}}^{\,(r)} &= \frac{\vec{\widetilde{n}}_2^{(r)}}{v^{(1)}_r(\vec{\widetilde{n}}_1^{(r)})} \equiv \frac{\sin\widetilde{\theta}_r}{v^{(1)}_r(\widetilde{\theta}_r)}\,\vec{i}_1 + \frac{\cos\widetilde{\theta}_r}{v^{(1)}_r(\theta_r)}\,\vec{i}_2,
\end{aligned} \tag{25.19}$$

(имеющие лишь две составляющие) и векторы поляризации $\vec{A}^{(r)}$ и $\vec{\widetilde{A}}^{(r)}$ (имеющие в естественной системе координат все три составляющие) находятся (подобно тому, как указано в п. 2) из задачи для уравнений (23.2) и (23.3), отвечающих ортам нормалей

$$\vec{n}^{(r)} \equiv \sin\theta_r\,\vec{i}_1 + \cos\theta_r\,\vec{i}_2,$$
$$\vec{\widetilde{n}}^{(r)} \equiv \sin\widetilde{\theta}_r\,\vec{i}_1 + \cos\widetilde{\theta}_r\,\vec{i}_2, \tag{25.20}$$

указанных волн. При этом углы падения θ_r и $\widetilde{\theta}_r$ таких волн должны определяться (при учете условий излучения) из соотношений Снеллиуса (25.16), принимающих в естественной системе уоординат из п. 3 более наглядную форму

$$\kappa_1 = \kappa_1^0 = \frac{\sin\widetilde{\theta}_r}{v_r^{(2)}(\widetilde{\theta}_r)} = \frac{\sin\widetilde{\theta}_r}{v_r^{(1)}(\widetilde{\theta}_r)} = \frac{\sin\widetilde{\theta}^0}{v_{r_0}^{(2)}(\theta^0)}. \tag{25.21}$$

(Отличие от случаев изотропии сред состоит здесь лишь в зависимости фазовых скоростей распространения волн различных типов ($r = 1, 2, 3$) от ортов нормалей к волновым фронтам соответственных волн.)

Что же касается учета условий излучения для отраженных и преломленных волн из (25.5), то он производится различным образом в зависимости от того, реализуются ли отражения и преломления в виде однородных плоских волн (25.5), или же та или иная волна оказывается (при рассматриваемом значении параметра $\kappa_1 > 0$) уже неоднородной.

В первом случае для отраженных и преломленных однородных плоских волн

$$\vec{u}_2^{(r)} = a_r \vec{A}^{(r)} \exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}^{(r)}\cdot\vec{x}\big],$$
$$\vec{\widetilde{u}}_1^{(r)} = b_r\,\vec{\widetilde{A}}^{(r)} \exp i\omega\big[t - \vec{\widetilde{\kappa}}^{(r)}\cdot\vec{x}\big] \tag{25.22}$$

с индексами $r = 1, 2, 3$ следует (как указано в п. 2) вычислить векторы лучевых скоростей $\vec{\xi}_2^{(r)}(\theta_r)$ и $\vec{\widetilde{\xi}}_1^{(r)}(\widetilde{\theta}_r)$, и выбор значений углов падения θ_r и $\widetilde{\theta}_r$ из соотношений (25.21) производить при одновременном удовлетворении соответствующего неравенства из следующих условий излучения

$$\Big(\vec{\xi}_2^{(r)}(\theta_r)\cdot\vec{i}_2\Big) < 0; \quad \Big(\vec{\widetilde{\xi}}_1^{(r)}(\widetilde{\theta}_r)\cdot\vec{i}_2\Big) > 0. \tag{25.23}$$

(Заметим, что на основании свойства центральной антисимметрии кривых векторов рефракции из (25.4) ясно, что такой выбор всегда приводит к однозначному результату.)

В противном случае – неоднородности какой-либо волны из (25.22), при вещественном значении $\kappa_1 = \kappa_1^0 > 0$ из (25.21) 1-ой компоненты вектора рефракции

$$\vec{\kappa} = \kappa_1^0 \, \vec{i}_1 + \kappa_2 \, \vec{i}_2, \tag{25.24}$$

вторая его компонента в (результате решения уравнения (23.23)) оказывается комплексной

$$\kappa_2 = \kappa_2^0 \pm i\alpha, \quad (\alpha > 0). \tag{25.25}$$

Тогда, в соответствии с равенством

$$\exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\,\big] = \exp(\pm\omega\alpha x_2)\cdot \exp i\omega\big[t - \vec{\widetilde{\kappa}}\cdot\vec{x}\,\big]$$

где обозначено

$$\vec{\widetilde{\kappa}} = \kappa_1^0 \, \vec{i}_1 + +\kappa_2^0 \, \vec{i}_2,$$

в случае отраженной в область $x_2 < 0$, $(\nu = 2)$ волны следует выбирать корень $\vec{\kappa}^{(r)} = \vec{\kappa}$ из (25.24) и (25.25) при значении $+i\alpha$ в (25.25). В случае же преломленной в область $x_2 > 0$, $(\nu = 1)$ волны следует выбирать корень $\vec{\widetilde{\kappa}}^{(r)} = \vec{\kappa}$ при значении $-i\alpha$.

5. После выбора аналитических представлений (25.4), (25.5) и (25.22), удовлетворяющих уравнениям движения, учитывающим соотношения Снеллиуса и условия излучения, следует возвратиться к окончательному учету граничных условий (25.6) рассматриваемой задачи. В п. 3 было учтено лишь свойство линейности таких условий, из которого следовали соотношения Снеллиуса, а также – факт существования в задаче плоскости падения. Остается воспользоваться граничными условиями (25.6) для определения неизвестных еще амплитудных множителей a_r и b_r из (25.5) отраженных и преломленных волн. Обращаться к этому следует в естественной системе координат из п. 4, когда можно воспользоваться формулой из (2.6) для вектора напряжений $\vec{t}_m[\vec{u}]$ на площадке с нормалью $\vec{m} = \vec{i}_2$ через поле смещений $\vec{u}$. В такой системе (для плоского поля $\vec{u}$, рассматриваемого в плоскости падения $x_3 = 0$) выражения (2.6) сводятся, очевидно, к следующим соотношениям

$$\vec{t}_m^{(\nu)}[\vec{u}\,] \equiv \vec{t}_2^{(\nu)}[\vec{u}\,] = \sum_{k=1}^{3} t_{2k}^{(\nu)}[\vec{u}\,]\,\vec{i}_k,$$
$$\vec{t}_{2k}^{(\nu)}[\vec{u}\,] = \sum_{p,q=1}^{3} c_{2k,pq}^{(\nu)}\frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \quad \left(c_{ik,pq}^{(\nu)} = \rho_\nu\,\lambda_{ik,pq}^{(\nu)}\right). \tag{25.26}$$

Так, в результате подстановки выражений $\vec{u}^{\,0}$, $\vec{u}_2$ и $\vec{\tilde{u}}_1$ из (25.4) и (25.5) в первое векторное условие (25.6), после сокращения всех слагаемых на общий множитель

$$\exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\,\big] \tag{25.27}$$

из (25.13) и (25.14) (см. конец п. 3) получается первое векторное уравнение

$$\sum_{r=1}^{3}\Big[b_r\,\vec{\tilde{A}}^{(r)} - a_r\,\vec{A}^{(r)}\Big] = a_0\,\vec{A}^{\,0}$$

для (шести) амплитудных множителей a_r и b_r из (25.5). При переходе к проекциям на оси естественной системы координат (из п. 4) оно приводится к системе трех уравнений первой группы

$$\sum_{r=1}^{3}\Big[b_r\,\widetilde{A}_k^{(r)} - a_r\,A_k^{(r)}\Big] = a_0\,A_k^0, \quad (k = 1,2,3) \tag{25.28}$$

для упомянутых множителей

Остается учесть соотношения вида

$$t_{2k}\Big[\vec{B}\exp i\omega\big(t - \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\big)\Big] = -i\omega\exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\big]\sum_{p,q=1}^{3} c_{2k,pq}\,\kappa_p\,B_q,$$

в которых $\vec{B}$ – обозначает тот или иной постоянный вектор, получающиеся при подстановке выражений $\vec{u}^{\,0}$, $\vec{u}^{\,(r)}$ и $\vec{\tilde{u}}^{\,(r)}$ во второе граничное условие из (25.6). После сокращения в них всех слагаемых на общий множитель вида

$$i\omega\exp i\omega\big[t - \vec{\kappa}\cdot\vec{x}\,\big],$$

аналогичный множителю из (25.27), в компонентах на оси естественной системы координат из п. 4 будем иметь дополнительную систему из трех уравнений

$$\sum_{r=1}^{3}\left\{b_r \sum_{p,q=1}^{3} c_{2k,pq}^{(1)}\widetilde{\kappa}_p^{(r)}\,\widetilde{A}_q^{(r)} - a_r \sum_{p,q=1}^{3} c_{2k,pq}^{(2)}\,\kappa_p^{(r)}\,A_q^{(r)}\right\} =$$

$$= a_0 \sum_{p,q=1}^{3} c_{2k,pq}^{(2)}\,\kappa_p^0\,A_q^0, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{25.29}$$

второй группы для шести амплитудных множителей a_r и b_r, $(r = 1, 2, 3)$. При этом из энергетических соображений (подобных соображениями из п. 3 §26) следует, что определитель системы (25.28), (25.29) (при подстановке в него истинных значений величин $\vec{\kappa}^{(r)}$, $\widetilde{\vec{\kappa}}^{(r)}$, $\vec{A}^{(r)}$ и $\widetilde{\vec{A}}^{(r)}$) всегда отличен от нуля. Вследствие этого численные значения амплитудных множителей a_r и b_r их (25.5) определяются однозначно из полученной системы алгебраических уравнений (25.28) и (25.29).

6. Изложенным уже исчерпывается формализм численного решения задачи на отражение-преломление заданной плоской волны на плоской границе раздела двух анизотропных однородных упругих полупространств. Однако здесь естественно возникает и вторая задача на качественное рассмотрение явлений отражения-преломления таких волн при непрерывно-изменяющихся углах падения исходной волны в допустимых их пределах $-\pi < \theta < \pi$. Содеражние такой задачи имеет очевидный физический смысл, а решение – допускает предельно-наглядные пояснения, использующие свойства кривых векторов рефракции из §24.

Допустим для определенности, например, что средам $x_2 < 0$ $(\nu = 2)$ и $x_2 > 0$ $(\nu = 1)$ отвечают соответственно рис. 6 и 7.

Падающая волна (25.4) всегда задается в виде однородной плоской волны некоторого типа r, характеризующейся одной из кривых рефракции на рис. 6. По углу падения θ этой волны определим значение $\kappa_1^0(\theta) = \sin\theta / v_0(\theta)$ и на рис. 6 и 7 проведем прямые $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$. Если $r = 1$ (или же $r = 2$, $r = 3$, но угол падения θ достаточно мал), то указанная прямая пересекает на рис. 6 участки кривых рефракции, проведенные тонкими линиями, в трех точках, соответствующих углам падения θ_1, θ_2 и θ_3

отраженных волн всех трех типов. Подобные же точки пересечения прямой на рис. 7 с участками кривых рефракции, проведенные жирными линиями, определяют углы падения $\widetilde{\theta}_1$, $\widetilde{\theta}_2$ и $\widetilde{\theta}_3$ преломленных волн. При этом пока предполагалось, что

$$\max \widetilde{\kappa}_1^{(1)} > \kappa_1^{(0)}(\theta), \tag{25.30}$$

т.е. что максимум абсциссы $\widetilde{\kappa}_1^{(1)}(\theta)$ кривой рефракции с номером $r = 1$ на рис. 7 превосходит значение $\kappa_1^0(\theta)$ падающей волны. По значениям найденных углов θ_ν и $\widetilde{\theta}_\mu$ определяются все кинематические параметры отраженных и преломленных (25.22) однородных плоских волн и, следовательно, определяются все (вещественные) коэффициенты системы уравнений (25.28) и (25.29) для амплитудных множителей a_ν и b_ν (которые также оказываются вещественными).

При изменении угла падения θ величина первой компоненты $\kappa_1^0(\theta)$ вектора рефракции падающей волны может увеличиваться, вследствие чего может изменяться и характер пересечния прямыми $\kappa_1 = k_1^0(\theta)$ кривых рефракции при $r = 1, 2, 3$, изображенных на рис. 6 и 7. В прямой зависимости от этого изменяется число вещественных и комплексных корней уравнения (23.23) из §23 п. 3 и, следовательно, характер протекания процесса отраженияпреломления. Не обращая сначала внимания на явления, связанные с отраженными волнами, будем считать, что имеется возможность увеличивать (как это делается далее) значение $\kappa_1^0(\theta)$ за счет увеличения угла падения θ, и в рамках такого допущения обсудим вопросы, касающиеся возбуждения преломленных волн.

7. Если $\kappa_1^0(\theta)$ возрастает так, что начинает выполняться нервенство

$$\max \widetilde{\kappa}_1^{(1)} < \kappa_1^{(0)}(\theta), \tag{25.30$'$}$$

обратное (25.30), то в среде начинают возникать явления полного внутреннего отражения, заключающиеся в следующем. Существует первый предельный угол падения

$$\max \widetilde{\kappa}_1^{(1)} = \kappa_1^0\big(\theta_{\text{пр}}^{(1)}\big) \tag{25.31}$$

и такой, что при углах падения θ из промежутка $0 < \theta < \theta_{\text{пр}}^{(1)}$ процесс протекает в точности так же, как и случае неравенства

(25.30). При углах же $\theta > \theta_{\text{пр}}^{(1)}$ прямая $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$ уже не пересекает на рис. 7 кривой рефракции с номером $r = 1$.

Если при $\theta > \theta_{\text{пр}}^{(1)}$ еще выполняется неравенство

$$\kappa_1^0(\theta) < \min \widetilde{\kappa}_1^{(2)} \tag{25.32}$$

(где $\min \widetilde{\kappa}_1^{(2)}$ обозначает абсциссу кривой рефракции с номерами $r = 2$ на рис. 7 в точке $\widetilde{c}_2$ ее минимума), то упомянутая прямая пересекает на рис. 7 участки, изображенные жирными линиями, каждой из кривых рефракции с номерами $r = 2$ и $r = 3$ только в одной точке, отвечающей соответственно углам падения $\widetilde{\theta}_2$ и $\widetilde{\theta}_3$. (Как следует из §23 п. 5, уравнение (23.23) при $\kappa_3 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$ имеет в таком случае четыре вещественных и два комплексно-сопряженных корня). По значениям углов $\widetilde{\theta}_2$ и $\widetilde{\theta}_3$ однозначно определяются параметры ($\widetilde{\kappa}^{(\mu)}$ и $\widetilde{\vec{A}}^{(\mu)}$) двух квазипоперечных волн из (25.5) с номерами $r = 2$ и $r = 3$.

Что же касается квазипродольной волны, т.е. волны из (25.5) с номером $r = 1$, то она реализуется в виде неоднородной плоской волны, распространяющейся вдоль границы раздела $x_2 = 0$ и имеющей амплитуду, экспоненциально убывающую до нуля при возрастании $x_2 > 0$. Составляющие вектора поляризации такой волны определяются из системы уравнений (23.22) (выписанной для среды $\nu = 1$), в которую вместо $\kappa_p^{(1)}$ следует подставлять значения $\kappa_3^{(1)} = 0$, $\kappa_1^{(1)} = \kappa_1^0(\theta)$ и $\kappa_2^{(1)} = \kappa_2$, где κ_2 – соответствующий комплексно-сопряженный корень уравнения (25.23).

В результате определяются все параметры волн из (25.5), причем их коэффициенты оказываются уже комплексными. Вследствие этого комплексными оказываются и значения a_μ, b_μ амплитудных множителей из (25.5).

В тех же случаях, когда имеется возможность увеличивать значение $\kappa_1^0(\theta)$ так, что неравенство (25.32) уже не выполняется, приходится говорить о втором предельном угле $\theta_{\text{пр}}^{(2)}$, определяемом равенством

$$\kappa_1^0(\theta_{\text{пр}}^{(2)}) = \min \widetilde{\kappa}_1^{(2)}. \tag{25.33}$$

(Заметим, что так как мы условились функцию $\kappa_1^0(\theta)$ считать возрастающей лишь за счет увеличения угла θ, то оказывается $\theta_{\text{пр}}^{(1)} < \theta_{\text{пр}}^{(2)}$. При углах падения $\theta < \theta_{\text{пр}}^{(2)}$ процесс протекает так же, как и в случае неравенства (25.32). При значениях же угла падения $\theta > \theta_{\text{пр}}^{(2)}$, но таких, что еще

$$\kappa_1^0(\theta) < \inf\left[\max \widetilde{\kappa}_1^{(2)}\right] \qquad (25.34)$$

(где $\inf\left[\max \widetilde{\kappa}_1^{(2)}\right]$ обозначает наименьшее из двух максимальных значений $\widetilde{\kappa}_1^{(2)}$ в точках $\widetilde{b}_2$ и $\widetilde{d}_2$ из рис. 7), разыгрывается новое явление, не имеющее аналога в случае изотропных сред. Оно заключается в том, что упоминавшаяся неоднородная (поверхностная) квазипродольная волна исчезает, а вместо нее появляется вторая однородная квазипоперечная волна (25.5) с номером $r = 2$, отвечающая точке пересечения прямой $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$ с участком $\tilde{c}_2\tilde{b}_2$, изображенным жирной линией на рис. 7. Таким образом, при углах падения θ, при которых выполняются неравенства

$$\min \widetilde{\kappa}_1^{(2)} < \kappa_1^0(\theta) < \inf\left[\max \widetilde{\kappa}_1^{(2)}\right],$$

все три преломленные волны оказываются однородными и квазипоперечными. При дальнейшем возрастании $\kappa_1^0(\theta)$ появляются третий, четвертый и пятый предельные углы полного внутреннего отражения на преломленных волнах. Третий предельный угол, определяемый равенством

$$\kappa_1^0\big(\theta_{\text{пр}}^{(3)}\big) = \inf\left[\max \widetilde{\kappa}_1^{(2)}\right],$$

характеризуется тем, что при углах падения θ, удовлетворяющих неравенству $\theta_{\text{пр}}^{(3)} < \theta < \theta_{\text{пр}}^{(4)}$, где $\theta_{\text{пр}}^{(4)}$ определяется условием

$$\kappa_1^0\big(\theta_{\text{пр}}^{(4)}\big) = \sup\left[\max \widetilde{\kappa}_1^{(2)}\right],$$

одна из упоминавшихся двух квазипоперечных волн с номером $r = 2$ становится неоднородной поверхностной волной. При этом остальные преломленные волны по-прежнему реализуются в виде однородных квазипоперечных волн с номерами $r = 3$ и $r = 2$. (Им отвечают, очевидно, точки пересечения прямой $x_1 = k_1^0(\theta)$ с участками кривых рефракции, проведенных на рис. 7 жирными линиями, отмеченными точками $\widetilde{b}_3\, \widetilde{a}_3\, b_3$ на кривой R_3 и точками участка $\tilde{\tilde{d}}_2\tilde{\tilde{b}}_2$ кривой R_2, где точка $\tilde{\tilde{d}}_2$ является точкой пересечения (жирной) кривой $\widetilde{c}_2\widetilde{b}_2$ с прямой $k_1 = k_1(\widetilde{d}_2)$, проходящей через точку $\widetilde{d}_2$ (конец жирного участка $b_2\widetilde{a}_2\widetilde{d}_2$ кривой R_2 на рис. 7).

Если угол θ возрастает так, что выполняются неравенства

$$\sup\big[\max\widetilde{\kappa}_1^{(2)}\big] < \kappa_1^0(\theta) < \max\widetilde{\kappa}_1^{(3)},$$

то прямая $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$ пересекает на рис. 7 (в двух точках) лишь кривую рефракции с номером $r = 3$. По точке пересечения, расположенной на участке $\widetilde{b}_3\widetilde{a}_3b_3$ кривой, проведенной жирной линией, определяется преломленная квазипоперечная однородная плоская волна с номером $r = 3$. Остальные же две преломленные волны (отвечающие комплексно-сопряженным корням κ_2 уравнения (23.23), у которых $\operatorname{Im}\kappa_2 > 0$) реализуются в виде неоднородных поверхностных волн. Векторы поляризации $A_i^{(r)} \equiv \widetilde{A}_i^{(r)}$ таких волн определяются из системы уравнений (23.22), выписанной для среды $\nu = 1$, в которую вместо $\kappa_p^{(r)}$ подставляются значения $\kappa_3^{(r)} = 0$, $\kappa_1^{(r)} = \kappa_1^0(\theta)$ и $\kappa_2^{(r)} = \kappa_2^{(1,2)}$, где $\kappa_2^{(1,2)}$ – два (из четырех) комплексно сопряженных корня уравнения (23.23), выбранных так ($\operatorname{Im}\kappa_2^{(1,2)} > 0$), чтобы в среде $\nu = 1$ ($x_2 > 0$) удовлетворялись условия издучения.

Наконец, если выполняются неравенства

$$\kappa_1^0(\theta) > \kappa_1^0\big(\theta_{\text{пр}}^{(5)}\big) \equiv \max\widetilde{\kappa}_1^{(3)},$$

то все преломленные волны реализуются в виде неоднородных поверхностных волн, и т.д.

8. Изложенное в п. 7, по-видимому, уже достаточно полно освещает существо обсуждаемого вопроса, так что нет необходимости обращаться к рассмотрению явлений полного внутреннего отражения на отраженных волнах. Наличие или отсутствие тех или иных явлений такого рода теснейшим образом увязывается с особенностями формы и расположения на плоскости падения x_1Ox_2 (в естественной для процесса отражения-преломления координатной системе из п. 4) кривых векторов рефракции, построенных для плоских волн всех типов ($r = 1, 2, 3$), распространяющихся в средах с параметрами упругих полупространств $x_2 > 0$ ($\nu = 1$) и $x_2 < 0$ ($\nu = 2$). Выявление таких особенностей в обсуждаемой задаче, как мы видели в п. 7 на примере преломленных волн, производится на основе сечения кривых векторов рефракции прямыми $\kappa_1 = \kappa_1^0(\theta)$, что сразу же приводит к качественным заключениям относительно вещественных и комплексных корней уравнения (23.23) и, следовательно, относительно однородности или неоднородности каждой из отраженных и преломленных волн. А это полностью определяет в качественном отношении физическую картину, в рамках которой реализуется процесс отражения-преломления.

В алгоритмическом же отношении во всех без исключения случаях дело сводится к следующему: 1) к нахождению шести корней κ_2 уравнения (23.23), выписываемого для каждой из сред $\nu = 1$ и $\nu = 2$, в котором полагается $\kappa_3^{(r)} = 0$, $\kappa_1^{(r)} = \kappa_1^0(\theta)$, $\kappa_2^{(r)} = \kappa_2$; 2) к отбору из этих корней трех корней $\widetilde{\kappa}_2^{(r)}$ в случае $\nu = 1$ (трех корней $\kappa_2^{(r)}$ в случае $\nu = 2$), где $r = 1, 2, 3$, так, чтобы в среде $\nu = 1$ (в среде $\nu = 2$) удовлетворялись условия излучения; 3) к нахождению нормированных по (23.29) решений $\widetilde{A}_i^{(r)}$ при $\nu = 1$ (решений $A_i^{(r)}$ при $\nu = 2$), $(r = 1, 2, 3)$, системы уравнений (23.22), выписанной для среды $\nu = 1$ (для среды $\nu = 2$), в которую подставляются значения $\kappa_3^{(r)} = 0$, $\kappa_1^{(r)} = \kappa_1^0(\theta)$ и значение $\widetilde{\kappa}_2^{(r)}$ при $\nu = 1$ (значение $\kappa_2^{(r)}$ при $\nu = 2$), отобранные в соответствии с условиями излучения, наконец, 4) к подстановке в системы уравнений (25.28) и (25.29) найденных значений параметров $A_i^{(r)}$, $\kappa_i^{(r)}$ и $\widetilde{A}_i^{(r)}$, $\widetilde{\kappa}_i^{(r)}$, $(r = 1, 2, 3)$ отраженных и преломленных волн (равно как и аналогичных параметров для падающей волны) и к решению получающейся системы уравнений.

Следует подчеркнуть, во-первых, что вследствие нормированности на единицу векторов поляризации падающей, отраженных и преломленных волн амплитудные множители a_μ и b_μ из (25.5), определяемые в результате решения системы уравнений (25.28) и (25.29) имеют смысл коэффициентов отрадения-преломления волн. При этом, так как падающая волна (25.4) может относиться к трем различным типам плоских волн, в случае анизотропных сред приходится употреблять 18 коэффициентов отраженияпреломления вместо восьми коэффициентов типа SV и двух типа SH в случае изотропных сред. И, во-вторых, что при рассмотрении явлений полного внутреннего отражения в случае конкретно выбранного типа $r = r^0$ падающей волны (25.4) следует учитывать ограниченность величины $\kappa_1^0(\theta)$. Последняя может изменяться лишь в пределах, отвечающих участку кривой рефракции со значком $r = r_0$ (построенной для среды $\nu = 2$), согласующемуся с фактом падения волны (25.4) на границу $x_2 = 0$ из полупространства $x_2 < 0$. На рис. 6 и 7 такие участки кривых воспроизведены в виде жирных линий.

§26. О поверхностных волнах на границах раздела однородных анизотропных упругих полупространств

Как и в случае изотропных сред к теории плоских волн в однородных анизотропных средах примыкают задачи на распространение поверхностных волн вдоль границы полупространства, или – границ раздела двух контактирующих полупространств. В идейном отношении такие задачи не отличаются от аналогичных же задач в случае изотропных упругих сред. Однако в общем случае анизотропии их решение оказывается неизмеримо более громоздким, причем оно допускает лишь численную реализацию.

Вследствие громоздкости – с подходом к решению таких задач целесообразно знакомиться на простейшем примере задачи для полупространства, в которой суть подхода не подвергается каким-либо ограничениям.

1. Исходным в задаче на распространение поверхностных монохроматических волн вдоль границы $x_2 = 0$ однородного анизотропного полупространства $x_2 > 0$, характеризуемого тензором $\lambda_{ik,pq} = \mathrm{const}$ относительных упругих постоянных и плотностью $\rho = \mathrm{const}$ (аналогичной задаче Релея в изотропном случае), также является задача на отражение от свободной границы $x_2 = 0$ полупространства заданной падающей плоской волны

$$\vec{u}_0 = \mathrm{Re}\,\alpha_0 \vec{A}^{(0)} \exp i\omega\big(t - \vec{r}\cdot\vec{\kappa}^{(0)}\big). \tag{26.1}$$

Здесь

$$\vec{\kappa}^{(0)} = \frac{\vec{n}_0}{v_0(\theta_0)}, \quad \vec{n}_0 = \sin\theta_0\,\vec{i}_1 + \cos\theta_0\,\vec{i}_2, \tag{26.2}$$

вектор рефракции падающей волны, заданной в плоскости падения $x_3 = 0$, $v_0(\theta_0)$ – ее фазовая скорость, а $\vec{A}^{(0)}$ – ее вектор поляризации. При этом вектор рефракции выбран так, что вектор лучевой скорости $\vec{\xi}^{(0)}(\theta_0)$ волны удовлетворяет условию

$$\big(\vec{\xi}^{(0)}\,\vec{i}_2\big) \equiv \xi_2^{(0)} = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{i2,pq}\kappa_p^0\, A_q^{(0)}\, A_i^{(0)} < 0, \tag{26.3}$$

выражающему факт падения волны $\vec{u}_0$ из (26.1) на границу $x_2 = 0$ полупространства $x_2 > 0$.

Отраженные границей $x_2 = 0$ волны представляются выражениями

$$\vec{u}^{\,(\mu)} = \operatorname{Re} a_\mu \vec{A}^{\,(\mu)} \exp i\omega\big[t - \vec{r}\cdot\vec{\kappa}^{\,(\mu)}\big], \quad (\mu = 1, 2, 3), \tag{26.4}$$

в которых векторы рефракции

$$\vec{\kappa}^{\,(\mu)} = \frac{\vec{n}^{\,(\mu)}}{v_\mu(\theta_\mu)}, \quad \vec{n}^{\,(\mu)} = \sin\theta_\mu\,\vec{i}_1 + \cos\theta_\mu\,\vec{i}_2 \tag{26.5}$$

выбираются таким образом, чтобы (в случае вещественных значений $n_2^{(\mu)} = \cos\theta_\mu$) для лучевых скоростей волн $\vec{u}^{\,(\mu)}$ выполнялись соотношения

$$\xi_2^{(\mu)} = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{i2,pq}\kappa_p^{(\mu)}\,A_q^{(\mu)}\,A_i^{(\mu)} > 0. \tag{26.6}$$

В случае же мнимых значений составляющих $\kappa_2^{(\mu)}$ вектора рефракции знак выражения

$$\cos\theta_\mu = \pm i\mid \cos\theta_\mu \mid$$

выбирается так, что вектор $\vec{u}^{\,(\mu)}$ из (26.4) убывает экспоненциально при возрастании расстояния $x_2 > 0$ от границы $x_2 = 0$ полупространства до рассматриваемой точки поля.

При этом, в соответствии с §23, здесь подразумевается, что значения $\vec{\kappa}^{\,(\mu)}$ и $\vec{A}^{\,(\mu)}$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(\mu)}\,\kappa_p^{(\mu)}\,A_q^{(\mu)} - A_i^{(\mu)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{26.7}$$

с условием разрешимости

$$\left|\sum_{i,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq}\,\kappa_k^{(\mu)}\,\kappa_p^{(\mu)} - \delta_{iq}\right| = 0 \tag{26.8}$$

вида (23.22) и (23.23), в которых за независимый параметр берется значение $\kappa_1 = \kappa_1^{(\mu)}$.

2. В случае свободной от напряжений границы $x_2 = 0$ суммарное поле смещений

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{\mu=1}^{3} \vec{u}^{\,(\mu)}$$

в полупространстве $x_2 \geqslant 0$ должно удовлетворять условиям

$$\left[t_i(\vec{u}_0) + \sum_{\mu=1}^{3} t_i(\vec{u}^{(\mu)})\right]_{x_2=0} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{26.9}$$

при $x_2 = 0$ – отсутствия напряжения на границе полупространства. При этом i-я составляющая вектора напряжений $\vec{t}_2(\vec{u})$ на границе $x_2 = 0$ определяется выражением

$$t_i(\vec{u}) = \sum_{p,q=1}^{3} \rho\lambda_{i2,pq} \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

вида (25.26).

Подстановка полей смещений $\vec{u}_0$ и $\vec{u}^{(\mu)}$ из (26.1) и (26.4) в граничные условия (26.9) при $x_2 = 0$ приводит к линейным соотношениям, слагаемые которых содержат множители вида

$$\exp i\omega\big(t - x_1\kappa_1^0\big) \quad \text{и} \quad \exp i\omega\big(t - x_1\kappa_1^{(\mu)}\big), \tag{26.10}$$

причем соотношения должны выполняться тождественно относительно переменных x_1 и t. Отсюда, как и обычно, следуют кинематические соотношения

$$\kappa_1^{(\mu)} = \kappa_1^0, \quad (\mu = 1, 2, 3), \quad \text{или} \quad \frac{\sin\theta_\mu}{v_\mu(\theta_\mu)} = \frac{\sin\theta_\mu}{v_0(\theta_0)} \tag{26.11}$$

(Снеллиуса) для процесса отражения.

При учете их, после сокращения соотношений (26.9) на множители из (26.10) (а также – на $i\omega$), получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=1}^{3} a_\mu \sum_{p,q=1}^{3} \lambda_{i2,pq}\kappa_p^{(\mu)} A_q^{(\mu)} = \\ &= -a_0 \sum_{p,q=1}^{3} \lambda_{i2,pq}\kappa_p^0 A_q^0, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{26.12}$$

из которой определяются амплитудные множители a_μ из (26.4) задачи на отражение плоской волны из (26.4) от границы $x_2 = 0$ полупространства $x_2 > 0$.

3. Для существования решения системы уравнений (26.12) необходимо, чтобы детерминант систем

$$| \Delta_{i\mu} | \neq 0 \tag{26.13}$$

с элементами

$$\Delta_{i\mu} = \sum_{p,q=1}^{3} \lambda_{i\mu,pq} \kappa_p^{(\mu)} A_q^{(\mu)}, \quad (i, \mu = 1, 2, 3) \tag{26.13'}$$

был отличен от нуля.

В противном же случае равенства нулю такого детерминанта

$$| \Delta_{i\mu} | = 0 \tag{26.14}$$

неоднородная система уравнений (26.12) неразрешима, а однородная система (26.12) (в которой $a_0 = 0$) должна иметь нетривиальные релшения. При этом очевидно, что такие решения должны представляться в форме, обеспечивающей отсутствие потока энергии поля вглубь среды $x_2 > 0$. Последнее же реализуется (как это следует из анализа системы уравнений (26.7) с точки зрения свойств кривых векторов рефракции, построенных для рассматриваемой упругой среды (см. §24)), только в случаях, когда все составные элементы $\vec{u}^{(\mu)}$ поля из (26.4) оказываются неоднородными плоскими волнами.

В случае правой части системы уравнений (26.12), заданной в форме любой однородной плоской волны (26.1), падающей на границу $x_2 = 0$ полупространства и, следовательно, удовлетворяющей неравенству (26.3), среди отраженных плоских волн $\vec{u}^{(\mu)}$ из (26.4) обязательно должна присутствовать, хотя бы лишь одна, однородная плоская волна, удовлетворяющая неравенству (26.6), т.е. – обладающая потоком энергии, оттекающим от границы $x_2 = 0$ вглубь среды $x_2 > 0$. Поэтому в таком случае должен существовать и какой-то приток энергии к границе $x_2 = 0$, возможный лишь за счет падающей однородной плоской волны. Таким образом, разрешимая система уравнений (26.12) должна быть неоднородной ($a_0 \neq 0$) и должно выполняться условие (26.13).

Раверство же (26.14), обеспечивающее существование решения однородной системы уравнений (26.12), может иметь место лишь при значениях κ_1^0 из (26.11), при которых уравнение (26.8) (относительно значений вторых составляющих $\kappa_2^{(\mu)}$ векторов рефракции $\vec{\kappa}^{(\mu)}$) не имеет уже вещественных корней. Для этого необходимо, чтобы оказалось

$$\kappa_1^{(\mu)} \geqslant \kappa_{1\,\max}^0, \tag{26.15}$$

где $\kappa_{1\,\max}^0$ обозначает максимальное значение составляющей κ_1 из всех трех кривых векторов рефракции из рис. 6 и 7.

Таким образом, поверхностные волны в полупространстве $x_2 \geqslant 0$ могут возбуждаться лишь в случаях векторов рефракции $\vec{\kappa}^{(\mu)}$, первая составляющая κ_1 которых удовлетворяет неравенству (26.15) и оказывается такой, что удовлетворяется равенство (26.14). Поиск подобных составляющих среди точек вещественной оси плотности (κ), удовлетворяющих неравенству (26.15), удобно производить по Ньютону. При этом в случае успеха он приводит к условию разрешимости однородной системы уравнений (26.12), из решения которой как раз и определяются амплитудные множители a_μ, $(\mu = 1, 2, 3)$ поверхностной волны в анизотропном упругом полупространстве.

ГЛАВА 9

Лучи и фронты объемных волн. Описание волновых полей в прифронтовых зонах лучевым методом

Сначала приводится сводка результатов §8 и §13, касающихся задач на построение лучей и фронтов волн любого типа, распространяющихся в произвольных анизотропных упругих средах. Затем обсуждается принципиальная схема естественного алгоритма построения лучей и фронтов волн. В основных же разделах главы приводятся результаты, относящиеся к количественному изучению волновых упругих полей в прифронтовых их зонах в рамках нулевого приближения лучевого метода. Лучевой метод в случае анизотропных упругих сред впервые был рассмотрен в работе В. М. Бабича[1] Однако он не был доведен до состояния, допускающего практические применения. Современная вычислительная техника легко позволяет устранить этот пробел.

[1]Бабич В. М. “Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды,” В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 5. Изд-во ЛГУ, 1961, стр. 36–46.

§27. Лучи и фронты объемных волн в анизотропных упругих средах

1. Как следует из п. 5 §8 и п. 11 §13, если поверхность волнового фронта определять уравнением

$$\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0 \tag{27.1}$$

относительно (правовинтовой) декартовой системы координат x_1, x_2, x_3, то функция τ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$H \equiv \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \tag{27.2}$$

обобщающему уравнение эйконала (13.35) на случай анизотропии. Здесь $p_k = \partial\tau/\partial x_k$, $\lambda_{ik,pq} \equiv \lambda_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3)$ – составляющие тензора относительных упругих постоянных из (7.5), зависящие от рассматриваемой точки (x_k) среды, а функции $A_i^{(r)} \equiv A_i^{(r)}(p, x_k)$ определяются соответственно типу r изучаемой волны по перечисляемым здесь алгоритмам, совпадающим с алгоритмами теории локально-плоских волн.

Пусть в точке (x_k) анизотропной упругой среды задается по произволу орт $\vec{n}$ с составляющими n_k и рассматривается однородная система уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q^{(r)} = v_r^2 A_i^{(r)}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{27.3}$$

для величин $A_i^{(r)}(\vec{n}, x_k)$ с условием разрешимости

$$\left| \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v_r^2 \delta_{iq} \right| = 0. \tag{27.4}$$

Пусть, кроме того, $v_r(\vec{n}, x_k)$ обозначает решение уравнения (27.4), отвечающее квазипродольной или квазипоперечной волне типа r, выбранное с соблюдением всех требований из п. 7 §8. Тогда под $A_i^{(r)}(\vec{p}, x_k)$ из (27.2) следует понимать подчиненное условию нормировки

$$\sum_{i=1}^{3} |A_i^{(r)}|^2 = 1 \tag{27.5}$$

и отвечающее упоминавшемуся значению $v_r(\vec{n}, x_k)$ решение $A_i^{(r)}(\vec{n}, x_k)$ системы уравнений (27.3), в котором аргумент $\vec{n}$ заменен на $\vec{p}$. Пользуясь терминологией теории локально-плоских волн, мы будем называть величины $v_r(\vec{n}, x_k) \equiv v_r(\vec{n})$ и $A_i^{(r)}(\vec{n}, x_k) \equiv A_i^{(r)}(\vec{n})$ (зависящие в случае неоднородных сред также и от координат (x_k) рассматриваемой точки среды) соответственно фазовой скоростью и составляющими вектора поляризации.

Следует отметить, что решения $v_r(\vec{n})$ и $A_i^{(r)}(\vec{n})$ уравнений (27.4) и (27.3) оказываются однородными функциями от $\vec{n}$ соответственно первой и нулевой степени. Поэтому при любом значении λ справедливы равенства

$$v_r(\lambda\vec{n}) = \lambda v_r(\vec{n}), \quad A_i^{(r)}(\lambda\vec{n}) = A_i^{(r)}(\vec{n}). \tag{27.5$'$}$$

Именно это обстоятельство и позволяет в (27.2) под $A_i^{(r)}$ подразумевать функции $A_i^{(r)}(\vec{n})$, в которых вместо аргумента $\vec{n}$ используется дифференциальный вектор $\vec{p}$ с соответствующими $p_k = \partial\tau/\partial x_k$. По той же причине уравнения (27.3) и (27.4) можно переписать в виде

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} = A_i^{(r)}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{27.3$'$}$$

и

$$\left| \sum_{k,p=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p - \delta_{iq} \right| = 0, \tag{27.4$'$}$$

если полагать $n_k = v_r(\vec{n}) p_k$ или

$$p_k \equiv \frac{\partial\tau}{\partial x_k} = \frac{n_k}{v_r(\vec{n})}, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{27.6}$$

и подразумевать под n_k составляющие орта нормалей к поверхности (27.1) волнового фронта. Вектор $\vec{p}$ с составляющими из (27.6) будем называть вектором рефракции, хотя и не будем обозначать его посредством $\vec{\kappa}$. В соответствии с (27.6) этот вектор (равно как и функция $\tau(x_1, x_2, x_3)$ из (27.1), определяющая фронт волны) зависит от индекса $r = (1, 2, 3)$, обозначающего тип рассматриваемой волны. Это всегда следует иметь в виду, хотя такой индекс часто опускается, чтобы не загромождать формулы индексами.

2. Для нахождения волновых фронтов (27.1) (как поверхностей, на которых поле может иметь разрывы непрерывности или в смещениях, или же в их частных производных) следует построить решения уравнения (27.2), удовлетворяющие соответствующим начальным данным. Как следует из §12, такую задачу можно решать методом характеристик, в котором вместо (27.2) рассматривается характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, дополненная подходяще-выбранными начальными условиями.

Упомянутая характеристическая система была получена в п. 11 §13 и записывалась в виде (13.43), т.е.

$$\frac{dx_m}{d\tau} = \xi_m, \quad \frac{dp_m}{d\tau} = \eta_m, \quad (m = 1, 2, 3), \tag{27.7}$$

где

$$\xi_m \equiv \xi_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = \sum_{i,p,q=1}^{3} \lambda_{im,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{27.8}$$

$$\eta_m \equiv \eta_m^{(r)}(\vec{n}, x_k) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \tag{27.9}$$

причем ξ_m являются составляющими лучевой скорости (локально-плоской) волны, вычисленной для точки (x_k) и орта нормалей $\vec{n}$ с составляющими из (27.6). Прежде чем выписывать начальные условия для системы уравнений (27.7) (о чем также шла речь в §13), полезно сопоставить эту систему с системой (13.44), т.е. с системой уравнений

$$\frac{dx_m}{d\tau} = v^2 p_m, \quad \frac{dp_m}{d\tau} = -\frac{v_{x_m}}{v}, \quad (m = 1, 2, 3) \tag{27.10}$$

для лучей волн в изотропной упругой среде со скоростью распространения $v = v(x_k)$ (не зависящей от направления).

3. Если считать известной функций $\tau(x_1, x_2, x_3)$ из уравнения вида (27.1) для фронта волны в изотропной среде, то можно воспользоваться формулами (13.41), где $n_k = vp_k = v\partial\tau/\partial x_k$ – составляющие орта нормалей к фронту. При этом первая группа уравнений (27.10) переписывается в виде $dx_m/d\tau = vn_m$, что выражает, во-первых, факт распространения волны вдоль луча со скоростью $\vec{v} = v\vec{n}$ и, во-вторых, факт ортогональности луча к фронту в каждой точке их пересечения.

Соответственно этому первая группа уравнений (27.7) также выражает факт распространения волны вдоль луча с некоторой скоростью, а именно с лучевой скоростью $\vec{\xi} = \vec{\xi}^{(r)}(\vec{n}, x_k)$, отвечающей точке x_k и орту нормалей $\vec{n}$, совпадающему с нормалью к волновому фронту в точке его пересечения с лучом. При этом касательная к лучу, совпадающая по направлению с вектором $\vec{\xi}$, уже не ортогональна фронту, так как направления фазовой скорости $v_r(\vec{n}, x_k)\vec{n}$ и лучевой скорости $\vec{\xi}^{(r)}(\vec{n}, x_k)$ в анизотропных средах (почти всегда) не совпадают друг с другом.

Из уравнения (27.10) лучей в изотропной среде вытекает существование первого интеграла $v^2 \sum p_k^2 = \mathrm{const}$, соответствующего уравнению эйконала (13.36), которое и является уравнением в частных производных для волновых фронтов. Совершенно так же из уравнений (27.7) вытекает существование первого интеграла $H = \mathrm{const}$, где H имеет значение из (27.2).

Если по-прежнему считать известной функцию $\tau(x_1, x_2, x_3)$, входящую в уравнение (27.1) волнового фронта, и продифференцировать по x_m уравнение (13.36) и уравнение (27.2), то получаются соответственно равенства

$$-\frac{v_{x_m}}{v} = \sum_{k=1}^{3} v^2 p_k \frac{\partial p_k}{\partial x_m} \equiv \sum_{k=1}^{3} v n_k \frac{\partial p_k}{\partial x_m}, \qquad (27.11)$$

$$\eta_m = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = \\ = \sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} A_q^{(r)} A_i^{(r)} \frac{\partial p_k}{\partial x_m} = \sum_{k=1}^{3} \xi_k^{(r)} \frac{\partial p_k}{\partial x_m}, \qquad (27.11')$$

левые части которых совпадают с правыми частями вторых групп уравнений из (27.10) и (27.7). Что же касается правых частей этих равенств, то они также обнаруживают тождественность структуры, так как в них множителями при $\partial p_k / \partial x_m$ в суммы по k входят составляющие $v n_k$ и $\xi_k^{(r)}$ скорости распространения вдоль луча соответственно из (27.10) и (27.7). Таким образом, структура систем уравнений (27.7) и (27.10) вполне аналогична. Различие же состоит лишь в том, что скорости распространения волны вдоль луча и распространения волнового фронта в изотропных средах совпадают, а в случае анизотропии отличаются друг от друга. При этом волновой фронт S в анизотропной среде распространяется в направлении своих нормалей $\vec{n}(N)$, где $N \in S$, с фазовыми скоростями $v_r(\vec{n}, N)$, а вдоль луча волна распространяется с лучевой скоростью из (27.8). Заметим в заключение, что при выводе равенства (27.11′) было учтено тождество

$$\sum_{i,k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} \frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_m} = \sum_{i=1}^{3} A_i^{(r)} \frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_m} = 0,$$

вытекающее из (27.3′) и (27.5).

4. Для того, чтобы система обыкновенных дифференциальных уравнений (27.7) для лучей получила определенность в обсуждаемой задаче о волновых фронтах, необходимо дополнить ее начальными условиями. Начальные условия для случая точечного источника уже приводились в п. 12 §13. Они могут быть записаны в виде

$$x_m\big|_{\tau=0} = x_m^0, \quad p_m\big|_{\tau=0} = p_m^0 \equiv \frac{n_m^0}{v_r^0}, \quad (m = 1, 2, 3), \tag{27.12}$$

где n_m^0 – составляющие произвольно выбираемого в точке (x_m^0) орта $\vec{n}^{\,0}$, т.е.

$$n_1^0 = \alpha, \quad n_2^0 = \beta, \quad n_3^0 = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 \leqslant 1)$$

при произвольных α и β, а $v_r^0 \equiv v_r(\vec{n}^{\,0}, x_k^0)$ – значение фазовой скорости волны типа r в точке (x_m^0), отвечающее орту $\vec{n}^{\,0}$.

В случае же задач "на продолжение волнового фронта", когда положение волнового фронта в моменты времени $t > 0$ определяется по известному его положению S_0

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{27.13}$$

в момент $t = 0$, начальные данные, очевидно (см. п. 8 и 9 §12) следует задавать в виде

$$x_m\big|_{\tau=0} x_m(\alpha, \beta), \quad p_m\big|_{\tau=0} = \frac{n_m(\alpha, \beta)}{v_r(\alpha, \beta)}, \quad (m = 1, 2, 3). \tag{27.14}$$

Здесь α и β – произвольные параметры, координаты точек N на поверхности S_0 из (27.13). Первая группа уравнений из (27.14) фактически является параметрическим заданием точек поверхности (27.13), относительно которой предполагается, что она имеет непрерывную (лучше дифференцируемую) нормаль $\vec{n}(\alpha, \beta)$ в каждой своей точке. Что же касается функции $v_r(\alpha, \beta)$ из (27.14), то она совпадает с фазовой скоростью v_r волны типа r, вычисленной по (27.4) для точки $x_m^0(\alpha, \beta) \in S_0$ соответственно орту нормалей $\vec{n}(\alpha, \beta)$. Очевидно, что начальные данные из (27.14) удовлетворяют всем условиям внутреннего согласования из п. 8 §12.

5. Если составляющие $\lambda_{ik,pq}(x_1, x_2, x_3)$ тензора относительных упругих постоянных среды оказываются достаточно гладкими функциями от координат (x_k) (например, такими, что $\lambda_{ik,pq}$ непрерывны вместе со всеми их частными производными первого и второго порядка), то система дифференциальных уравнений (27.7)–(27.9) имеет единственное решение

$$x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta), \quad p_m = p_m(\tau, \alpha, \beta), \quad (m = 1, 2, 3) \tag{27.15}$$

при начальных условиях (27.12) или (27.14). При этом такое решение оказывается непрерывным вместе со всеми его частными производными первого порядка по переменным τ, α и β.

Что же касается функции $\tau(x_1, x_2, x_3)$, входящей в уравнение (27.1) фронта рассматриваемой волны, то для ее нахождения, как следует из п. 9 §12, нужно выразить значение $\tau(x_1, x_2, x_3)$ из первой группы функциональных соотношений (27.15) или же произвести иную функционально эквивалентную этому операцию (например, найти на основе уравнений $x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta)$ геометрические места точек (x_m), отвечающих значениям $\tau = \text{const}$ при произвольных изменениях параметров α и β). Но вследствие сложности выражений (27.8) и (27.9) для правых частей системы (27.7), равно как и замечаний из п. 3 и 5 §8 о практической невозможности (и бесполезности) получения аналитических выражений для $A_i^{(r)}(\vec{p})$, ясно, что решения системы уравнений (27.7) возможно получать лишь численными способами. Поэтому и при нахождении уравнений фронтов (27.1) требующегося типа ($r = 1, 2, 3$) приходится применять численные подходы, подобные построению геометрических мест точек.

При численных решениях, как известно, система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка заменяется некоторой разностной системой алгебраических соотношений (получаемых на основе замены производной $f'(\tau)$ конечным отношением $[f(\tau+h)-f(\tau)] : h$ с некоторым шагом $\Delta\tau = h$), позволяющих строить приближенные значения искомых функций в точках сетки значений τ

$$\tau_\nu = \nu h, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{27.16}$$

с шагом $h > 0$. Существует несколько разностных схем решения системы уравнений вида (27.7), отличающихся друг от друга скоростью стремления приближенного решения к точному при $h \to 0$, за которую приходится платить ценой вычисления на каждом шаге правых частей уравнений (27.7) в большом числе точек.

Ради простоты изложения алгоритма таких вычислений мы выберем здесь простейшую разностную схему Эйлера, требующую вычисления правых частей уравнений лишь в узлах сетки (27.16). Имеются основания (в том числе и физического характера) полагать, что точность такой схемы окажется более чем достаточной для приложений в сейсмике уж по крайней мере в обозримом будущем.

6. Обозначая посредством $x_m^{(\nu)} = x_m(\nu h)$ и $p_m^{(\nu)} = p_m(\nu h)$ значения искомых функций в узлах сетки (27.16), переписываем систему дифференциальных уравнений (27.7), отвечающих волне рассматриваемого типа r в разностной форме

$$x_m^{(\nu+1)} = x_m^{(\nu)} + h\xi_m(\nu), \quad p_m^{(\nu+1)} = p_m^{(\nu)} + h\eta_m(\nu), \tag{27.17}$$

где $m = 1, 2, 3$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, а под $\xi_m(\nu)$ и $\eta_m(\nu)$ подразумеваются последовательно вычисляемые значения правых частей уравнений (27.7) в узловых точках сетки (27.16).

Вычисления по такой схеме должны производиться последовательными шагами в излагаемом ниже порядке с использованием операций $O_r(n, x^{(\nu)})$. При этом под операцией $O_r(n, x^{(\nu)})$ подразумевается: 1) выписывание уравнений (27.3) и (27.4) для узловой точки $x^{(\nu)}$ и для текущего орта нормали $\vec{n} = \vec{n}(\nu)$; 2) нахождение их решений $v_r(n, x^{(\nu)})$ и $\vec{A}^{(r)}(n, x^{(\nu)})$, отвечающих волне рассматриваемого типа r; 3) вычисление составляющих $p_m^{(r)}(n, x^{(\nu)}) = n_m / v_r(n, x^{(\nu)})$ вектора рефракции вида (27.6) и, наконец, 4) вычисление функций $\xi_m(\nu)$ и $\eta_m(\nu)$ из (27.8) и (27.9) по найденным значениям величин $A_i^{(r)}(n, x^{(\nu)})$ и $p_m^{(r)}(n, x^{(\nu)})$. Что же касается последовательных шагов, то их целесообразно нумеровать значениями $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ и подразделять на две группы, а именно: на предварительный шаг с номером ν (Пν) и на шаг с номером ν (Шν).

Итак, построение лучей волны типа r производится по разностной схеме (27.17) уравнений (27.7) в следующей последовательности шагов (Пν) и (Шν):

(Ш0). На основании начальных данных (x_m^0, n_m^0) из (27.12) или (27.14) выполняется операция $O_r(n^0, x^0)$. В результате,для начальной узловой точки $\nu = 0$ получают значения: $v_r(n^0, x^0)$, $\vec{A}^{(r)}(n^0, x^0)$, p_m^0, $\xi_m^0(0)$ и $\eta_m(0)$.

(П1). На основании (27.17) для узловой точки $\nu = 1$ находят: 1) значение координаты точки $x_m^{(1)} = x_m^0 + h\xi_m(0)$ и 2) предварительные значения $\widetilde{p}_m^{(1)} = p_m^0 + h\eta_m(0)$, по которым вычисляются значения составляющих орта нормали

$$n_m^{(1)} = \frac{\widetilde{p}_m^{(1)}}{\sqrt{\sum(\widetilde{p}_m^{(1)})^2}}.$$

(Ш1). При найденных значениях $x_m^{(1)}$ и $n_m^{(1)}$ в узловой точке $\nu = 1$ применяется операция $O_r(n^{(1)}, x^{(1)})$, приводящая к значениям $v_r(n^{(1)})$, $\vec{A}^{(r)}$, $(n^{(1)}, x^{(1)}, p_m^{(1)}$, $\xi_m^{(1)}$ и $\eta_m^{(1)})$.

(П2). На основании (27.17) для точки $\nu = 2$ находят значения

$$x_m^{(2)} = x_m^{(1)} + h\xi_m(1), \quad \widetilde{p}_m^{(2)} = p_m^{(1)} + h\eta_m(1),$$

причем по предварительным значениям $\widetilde{p}_m^{(2)}$ составляющих вектора рефракции вычисляются составляющие орта нормали

$$n_m^{(2)} = \frac{\widetilde{p}_m^{(2)}}{\sqrt{\sum(\widetilde{p}_m^{(2)})^2}}.$$

(Ш2). При найденных значениях $x_m^{(2)}$ и $n_m^{(2)}$ в узловой точке $\nu = 2$ применяется операция $O_r(n^{(2)}, x^{(2)})$, приводящая к значениям $v_r(n^{(2)}, x^{(2)})$, $\vec{A}^{(r)}(n^{(2)}, x^{(2)})$, $p_m^{(2)}$, $\xi_m^{(2)}(2)$ и $\eta_m(2)$.

(П3). На основании (27.17) для точки $\nu = 3$ находят значения

$$x_m^{(3)} = x_m^{(2)} + h\xi_m(2), \quad \widetilde{p}_m^{(3)} = p_m^{(2)} + h\eta_m(2)$$

и т.д.

Весь процесс продолжается рекуррентно до конечной точки $N = (x_n^{(\nu_0)})$, отвечающей сетке (27.16) со значениями $\nu =$

$0, 1, 2, \ldots, \nu_0$. При этом для того, чтобы "попасть" в конечную точку N, расположенную, например, на некоторой поверхности S, может оказаться необходимым уменьшить шаг h на последнем этапе расчетов.

В связи с изложенным уместно отметить, во-первых, что для построения фронта волны (если такая задача возникает) приходится строить множество лучей, выходящих из точки (x_m^0) по различным направлениям $\vec{n}^{\,0}$, и продолжать лучи до точек $x_m^{(\nu_0)}(\vec{n})$, отвечающих одинаковым значениям τ_{ν_0} из (27.16). Упомянутые точки должны (приближенно) располагаться на искомом волновом фронте, а направления орта нормалей $\vec{n}^{\,(\nu_0)}$ в них должны совпадать с нормалью к фронту в этих точках.

Во-вторых же, что в описанном процессе приближенного интегрирования системы дифференциальных уравнений (27.7) вдоль любого (определяемого ею) луча во всех узловых точках выбранной сетки (27.16) определяются значения: 1) координат $x_m^{(\nu)}$ точки луча (отвечающей узлу сетки); 2) орта нормалей $\vec{n}^{\,(\nu)}$, определяющего нормаль к поверхности волнового фронта в точке $(x_m^{(\nu)})$ в момент его прохождения через эту точку; 3) фазовой скорости $v_r(\vec{n}^{\,(\nu)}, x_m^{(\nu)})$ распространения фронта волны (в момент прохождения его через точку $(x_m^{(\nu)})$); 4) вектора рефракции $\vec{p}^{\,(r)} = n^{(\nu)}/v_r(\vec{n}^{\,(\nu)}, x^{(\nu)})$; 5) составляющих $A_i^{(r)}(\vec{n}^{\,(\nu)}, x_m^{(\nu)})$ вектора поляризации (как нормированного решения системы уравнений (27.3) в точке $(x_m^{(\nu)})$ при значениях $\vec{n} = \vec{n}^{\,(\nu)}$, $v_r = v_r(\vec{n}^{\,(\nu)}, x_m^{(\nu)})$; 6) составляющих $\xi_m^{(r)}(\vec{n}^{\,(\nu)}, x_m^{(\nu)})$ вектора лучевой скорости (направленной вдоль луча), определяющей скорость перемещения вдоль луча точки пересечения этого луча с распространяющимся волновым фронтом.

Поэтому если, в частности, луч доходит, например, до точки $N = (x_m^{(\nu)})$ границы раздела двух сред с нормалью $\vec{m}(N)$, то по ортам $\vec{m}(N)$ и $\vec{n}^{\,(\nu_0)}$ определяется плоскость падения локально-плоской волны, связанной с лучом и характеризуемой ортом нормалей $\vec{n}^{\,(\nu_0)}$, а также скоростями распространения $v_r(\vec{n}^{\,(\nu_0)}, x_m^{(\nu_0)})$ и $\vec{\xi}^{\,(r)}\,(\vec{n}^{\,(\nu_0)}, x_m^{(\nu_0)})$. В такой плоскости как раз и происходит процесс отражения-преломления падающей волны (протекающей фактически так же, как и в случае локально-плоской волны из §25), а вместе с ним и процесс отражения-преломления падающего луча, в результате которого определяются начальные данные типа (27.14) для систем уравнений (27.7) в каждой из задач по продолжению луча падающей волны лучом отраженной или преломленной волны одного из трех возможных типов $r = 1, 2, 3$.

7. В заключение раздела целесообразно привести ряд вспомогательных представлений и понятий (нужных для последующего), связанных с семейством лучей, представленных в виде функций (27.15) от лучевых координат τ, α и β, построенных в результате интегрирования системы уравнения (27.7)–(27.9) при начальных условиях (27.12) или (27.14).

Каждый луч $l_{\alpha\beta}$, входящий в семейство (27.15), характеризуется значениями своих параметров α и β, причем в случае достаточной гладкости функций из правых частей уравнений (27.7)–(27.9) семейство образует (в некоторой окрестности области задания начальных данных) поле лучей. Последнее означает, что через каждую точку $\vec{x}$ поля проходит некоторый луч $l_{\alpha\beta}$ семейства и притом только один.

В области поля лучей соответствие (27.15) между декартовыми (x_1, x_2, x_3) и лучевыми (τ, α, β) координатами поля

$$\tau \equiv \zeta_1, \quad \alpha \equiv \zeta_2, \quad \beta \equiv \zeta_3 \tag{27.18}$$

(обозначаемых здесь и далее, ради удобства суммирований, через посредство переменных ζ_k) оказывается взаимно однозначным. Вследствие этого существуют взаимно-обратные системы функций

$$\begin{gathered} x_k = x_k(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad (k = 1, 2, 3), \\ \zeta_k = \zeta_k(x_1, x_2, x_3), \end{gathered} \tag{27.19}$$

первая группа из которых совпадает с первой группой функций из (27.15).

В математическом отношении условие взаимной обратимости функций из (27.19) записывается, как из вестно, в виде

$$J\begin{pmatrix} x \\ \zeta \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \neq \begin{cases} 0, \\ \infty \end{cases}, \tag{27.20}$$

где функциональные определители (детерминанты)

$$J\begin{pmatrix} x \\ \zeta \end{pmatrix} \text{ и } J\begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} = \left[J\begin{pmatrix} x \\ \zeta \end{pmatrix}\right]^{-1} \tag{27.20$'$}$$

определяются обычно соотношениями вида

$$J\begin{pmatrix}\zeta \\ x\end{pmatrix} = \sum_{(\alpha\beta\gamma} (-)^{[\alpha\beta\gamma]} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial x_3}, \tag{27.21}$$

в которых суммирование производится по всем перестановкам $(\alpha, \beta\gamma)$ чисел $1, 2, 3$, а $[\alpha\beta\gamma]$ обозначает число беспорядков в такой перестановке[2]

Однако более удобным оказывается тензорное определение понятия "определитель" через посредство антисимметричного псевдотензора $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ Леви–Чивита. Элементы такого тензора определяются перестановками трех индексов α, β и γ так, что $\varepsilon_{123} = 1$, а величины $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ – антисимметричны относительно перестановки любых двух их индексов (например, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}$ и т.д.).

Исходя из классического определения (27.21) нетрудно убедиться, что эквивалентное ему определение функционального определителя может быть записано в виде

$$e_{abc} J\begin{pmatrix}\zeta \\ z\end{pmatrix} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \zeta_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_b}{\partial x_\beta} \frac{\partial \zeta_c}{\partial x_\gamma} \tag{27.22}$$

при любых значениях a, b и c из 1, 2, 3. (Бóльшее удобства такой записи проистекает из того, что суммирование здесь совершается по значениям α, β и γ независимым образом).

Если обе части равенства (27.22) умножить на производную $\partial x_k / \partial \zeta_c$ из (27.15) (при учете обозначений (27.18)), а результат просуммировать по индексу "c", то получится соотношение

$$\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_c} J\begin{pmatrix}\zeta \\ z\end{pmatrix} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta k} \frac{\partial \zeta_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_b}{\partial x_\beta}$$

в силу равенства

$$\sum_{c=1}^{2} \frac{\partial \zeta_c}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_c} = \delta_{k\gamma} = \left\{\begin{matrix} 1, & k = \gamma \\ 0, & k \neq \gamma \end{matrix}\right\}$$

для производной от сложной функции $x_k(\zeta_c(x_\gamma))$ из (27.19).

[2]см. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. т. 3, ч. 1.

Дифференцирование такого равенства по x_k с последующим суммированием по значку "k" дает значение нуль

$$\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \sum_{k=1}^{3} \frac{d}{dx_k} \left[J \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_c} \right] = \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \zeta_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_b}{\partial x_\beta} \right] =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,k=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta k} \left[\frac{\partial^2 \zeta_a}{\partial x_k \partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta_b}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \zeta_a}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial x_k \partial x_\beta} \right] = 0 \qquad (27.23)$$

в силу равенств

$$\sum_{\alpha,k=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta k} \frac{\partial^2 \zeta_a}{\partial x_k \partial x_\alpha} = 0 \text{ и } \sum_{\beta,k=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta k} \frac{\partial^2 \zeta_b}{\partial x_k \partial x_\beta} = 0,$$

справедливых вследствие антисимметрии по значкам α и k (по значкам β и k) тензора $\varepsilon_{\alpha\beta k}$ и симметрии по таким же значкам выражений второй производной.

Остается умножить (27.23) на ε_{abp} и просуммировать результат по a и b. Это приводит к равенству

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[J \begin{pmatrix} \zeta \\ x \end{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_c} \right] = 0, \quad (c = 1, 2, 3), \qquad (27.24)$$

которым придется воспользоваться в §28. При этом на основании изложенного можно утверждать, что подобное же соотношение

$$\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \zeta_p} \left[J \begin{pmatrix} x \\ \zeta \end{pmatrix} \frac{\partial \zeta_p}{\partial x_c} \right] = 0, \quad (c = 1, 2, 3), \qquad (27.24')$$

справедливо и для функционального определителя из (27.20′), обратного определителю $J \begin{pmatrix} \zeta \\ z \end{pmatrix}$.

8. Замечая, что скалярно-векторное произведение допускает запись

$$|(\vec{a}[\vec{b} \times \overline{c})]| = \left| \sum_{k,p,q=1}^{3} e_{kpq} a_k b_p c_q \right| \qquad (27.25)$$

через посредство тензора Леви–Чевита, обсудим вопросы, связанные с лучевыми трубками поля лучей и с их геометрическими расхождениями.

Оставаясь в рамках обозначений ζ_k из (27.18) для лучевых координат $\tau = \zeta_1$, $\alpha = \zeta_2$ и $\beta = \zeta_3$, построим координатные векторы

$$\vec{\rho}_1 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_1} \vec{i}_k, \quad \vec{\rho}_2 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_2} \vec{i}_k, \quad \vec{\rho}_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta_3} \vec{i}_k \tag{27.26}$$

лучевой системы и назовем бесконечно-тонкой лучевой трубкой множество лучей $l_{\alpha\beta}$, (угловые параметры) лучевые координаты $\alpha \equiv \zeta_2$ и $\beta \equiv \zeta_3$ которых лежат в бесконечно-малых промежутках

$$\alpha_0 < \alpha < \alpha_0 + d\alpha, \quad \beta_0 < \beta < \beta_0 + d\beta. \tag{27.27}$$

При вычислении векторов $\vec{\rho}_2$ и $\vec{\rho}_3$ из (27.26) лучевая координата $\tau \equiv \zeta_1$ сохраняет постоянное значение, равное значению $\tau = \tau(x_1, x_2, x_3)$ из уравнения (27.1) фронта волны. Поэтому векторы $\vec{\rho}_2$ и $\vec{\rho}_3$ из (27.26) оказываются касательными к элементу ds волнового фронта, вырезаемого рассматриваемой лучевой трубкой. При этом площадь такого элемента, очевидно, определяется (с точностью до малых высшего порядка) выражением

$$ds = |[\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3]| d\zeta_2 d\zeta_3 \equiv |[\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3]| d\alpha d\beta. \tag{27.28}$$

Однако элемент ds фронта, ортогональный орту нормали $\vec{n}$ (к фронту), не ортогонален “центральному” лучу лучевой трубки касательной, параллельной лучевой скорости $\vec{\xi}$ (в точках центрального луча). Поэтому для площади $d\Sigma$ нормального сечения лучевой трубки получается представление

$$\begin{aligned} d\Sigma = ds \cos \widehat{n\xi} &= |(\vec{\xi}[\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3])| \frac{d\alpha d\beta}{|\vec{\xi}|}, \\ &= |(\vec{\rho}_1[\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3])| \frac{d\alpha d\beta}{|\vec{\xi}|}, \end{aligned} \tag{27.29}$$

в котором для компонент вектора $\vec{\rho}_1$ из (27.26) использованы выражения

$$\frac{\partial x_k}{\partial \zeta_1} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial \tau} = \xi_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

вытекающие из первой группы уравнений системы дифференциальных уравнений (27.7) луча. Для получения же окончательного выражения площади $d\Sigma$ нормального сечения лучевой трубки остается воспользоваться соотношением

$$(\vec{\rho}_1[\vec{\rho}_2 \times \vec{\rho}_3]) = \sum_{k,p,q} \varepsilon_{kpq} \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \frac{\partial x_p}{\partial \alpha} \frac{\partial x_q}{\partial \beta} =$$

$$= \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\tau, \alpha, \beta)} \equiv J(\tau, \alpha, \beta), \tag{27.30}$$

вытекающим из (27.25). В результате получается равенство

$$d\Sigma = \frac{|J(\tau, \alpha, \beta)|}{|\vec{\xi}(\tau, \alpha, \beta)|} d\alpha d\beta, \tag{27.31}$$

полагаемое в основу математического представления о геометрическом расхождении пучка лучей.

Что же касается формального определения, то наиболее физично было бы связать квадрат геометрического расхождения пучка лучей, выделяемого неравенствами (27.27), с отношением

$$\frac{d\Sigma(\tau)}{d\Sigma(\tau_0)} \tag{27.32}$$

площадей нормальных сечений лучевой трубки в текущей точке $\tau > \tau_0$ ее центрального луча к – подобной же площади – в некоторой фиксированной (или начальной) точке τ_0 того же луча. При этом выбор начальной точки луча – логически безразличен; он обуславливается лишь частными условиями рассматриваемой задачи.

Поэтому геометрическое расхождение L пучка лучей можно определять простым выражением

$$L(\tau, \alpha, \beta) = c_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{d\Sigma(\tau)}{d\alpha d\beta}} = c_0(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{|J(\tau, \alpha, \beta)|}{|\vec{\xi}(\tau, \alpha, \beta)|}}, \tag{27.33}$$

содержащим несущественную постоянную $c_0(\alpha, \beta)$.

§28. О лучевом методе количественной оценки волновых полей

В главе 2 было показано, что если в упругой среде возбуждаются волновые поля сигнального типа, имеющие разрывы в составляющих вектора смещений, или в составляющих его производных, то такие поля распространяются в среде в рамках представлений о волновых фронтах как о поверхности разрыва поля смещений. Определение таких поверхностей на основе решения соответствующих задач для систем дифференциальных уравнений обсуждалось в §27, где затрагивались и вопросы, уточняющие представления о характере разрывов поля смещений на волновых фронтах. Однако общий вопрос о количественных оценках полей в прифронтовых зонах все еще оставался без внимания.

Теперь назрела необходимость обратиться к его обсуждению, в основу которого полагается также априорное представление о существенно более высоких скоростях изменения поля вдоль нормальных к фронту направлений, чем его изменения вдоль касательных направлений (к фронту). При этом учет такого представления формализуется математически допущением, что в прифронтовой зоне искомое поле смещений допускает разложение в ряд по (некоторой) системе функций $f_n[t-\tau(x_k)]$, имеющих (одинаковые) разрывы непрерывности в производных порядка $n+2$, возрастающего с ростом индекса n членов ряда.

1. В лучевом методе решения уравнений движения (2.9) в общем случае неоднородной анизотропной упругой среды представляют в окрестности волнового фронта выбранного типа $r(=1,2,3)$

$$t-\tau(x_1,x_2,x_3)=0, \quad (t \geqslant 0)$$

из (27.1) в форме разложений

$$u_q=\sum_{n=0}^{\infty} V_q^{(n)}(x_1,x_2,x_3) f_n[t-\tau(x_1,x_2,x_3)], \quad (q=1,2,3) \qquad (28.1)$$

по специальной системе “разрывных” функций $f_n(t)$, связанных друг с другом соотношениями

$$f_n'(t)=f_{n-1}(t), \quad (n \geqslant 1). \qquad (28.2)$$

При этом задание системы функций $f_n(t)$ осуществляется, например, путем выбора функции $f_0(t)$, непрерывной с первой производной $f_0'(t)$ при $t \geqslant 0$ и с разрывной второй производной $f_0''(t)$. Ради наглядности можно считать, что эти функции представляются в виде интегралов Фурье

$$f_n(t)=\int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\psi(\omega)}{(-i\omega)^{n+2}}\, e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\omega_0 \gg 1), \qquad (28.3)$$

или же – вещественных их частей.

Предполагая, что ряд (28.1) допускает почленное дифференцирование и пользуясь соотношениями (28.2), можно подставить его в уравнение (3.4) и вычислить все входящие в него производные. В результате, уравнение сведется к равенству

$$\sum_{n=-2}^{\infty} L_i^{(n)} f_n(t-\tau) \equiv 0, \quad (i=1,2,3), \tag{28.4}$$

в котором обозначено

$$L_i^{(n)} = \rho \Lambda_i \vec{V}^{\,(n+2)} - M_i \vec{V}^{\,(n+1)} + N_i \vec{V}^{\,(n)}, \tag{28.5}$$

где

$$\Lambda_i \vec{V} \equiv \sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p V_q - V_i,$$

$$M_i \vec{V} \equiv \sum_{k,p,q=1}^{3} \left\{ c_{ik,pq} p_k \frac{\partial V_q}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial x_k} [c_{ik,pq} p_p V_q] \right\}, \tag{28.6}$$

$$N_i \vec{V} \equiv \sum_{k,p,q=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[c_{ik,pq} \frac{\partial V_q}{\partial x_p} \right],$$

$$\vec{V} = \sum_{q=1}^{3} V_q \vec{i}_q, \quad p_k = \frac{\partial \tau}{\partial x_k}, \quad \lambda_{ik,pq} = \frac{1}{\rho} c_{ik,pq}, \tag{28.7}$$

причем предполагается, что $V_q^{(-2)} = V_q^{(-1)} = 0$.

Если ряд (28.4) допускает почленное дифференцирование по t любое число раз, то для компенсации разрывов в тождестве (28.4) (относительно переменной t) и в его производных по t необходимо и достаточно требовать выполнения последовательности равенств

$$L_i^{(n)} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (n=-2,-1,0,1,\ldots). \tag{28.8}$$

В лучевом методе как раз и предполагается, что такие равенства имеют место. При этом их называют амплитудными соотношениями (лучевого метода), так как рассмотрение их при последовательно возрастающих номерах $n \geqslant 2$ приводит к уравнениям, из которых (при дополнительных условиях типа начальных данных) последовательно определяются значения всех амплитудных векторов $\vec{V}^{(n)}$ из разложения (28.1).

Полагая $n = -2, -1, 0$ и т.д. из (28.8), (28.5) и (28.6), последовательно получаем: однородную систему уравнений

$$\Lambda_i \vec{V}^{(0)} \equiv \sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p V_q^{(0)} - V_i^{(0)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{28.9}$$

для составляющих нулевого амплитудного вектора $\vec{V}^{(0)}$ из (28.1); неоднородную систему

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k p_p V_q^{(1)} - V_i^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \sum_{k,p,q=1}^{3} \left\{ c_{ik,pq} p_k \frac{\partial V_q^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial x_k} [c_{ik,pq} p_p V_q^{(0)}] \right\}, \tag{28.10}$$

записывающуюся символически в виде

$$\Lambda_i \vec{V}^{(1)} = \frac{1}{\rho} M_i \vec{V}^{(0)}, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{28.10$'$}$$

для амплитудного вектора $\vec{V}^{(1)}$, и неоднородные системы уравнений

$$\Lambda_i \vec{V}^{(2+n)} = \frac{1}{\rho} M_i \vec{V}^{(1+n)} - \frac{1}{\rho} N_i \vec{V}^{(n)}, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (n \geqslant 0) \tag{28.11}$$

для всех прочих векторов $\vec{V}^{(n+2)}$, $(n \geqslant 0)$ из (28.1).

Такие системы, как выясняется, позволяют последовательно определять (в окрестности рассматриваемых элементов поверхности (27.1) волнового фронта) все амплитудные векторы $\vec{V}^{(n)}$ из (28.1). При этом на n-ом шаге построений этот вектор представляется в виде выражения

$$\vec{V}^{(n)} = c_n(\alpha, \beta) \varphi_n(\tau, \dots) + \vec{V}^{(n)}(\tau, \dots), \tag{28.12}$$

содержащего произвольную функцию $c_n(\alpha, \beta)$ от лучевых координат, которую приходится определять на этом же шаге для того, чтобы можно было совершить следующий шаг в построении разложения (28.1). К обсуждению этого вопроса мы обратимся в п. 6, после рассмотрения формализма определения амплитудных векторов $\vec{V}^{(n)}$ лучевого метода. При этом сначала проделаем это в нулевом приближении метода, который играет главенствующую роль в теории.

2. Система уравнений (28.8) в точности совпадет с системой уравнений (27.3′), условие разрешимости (27.4′) которой приводит, как показано в §3, к трем различным дифференциальным уравнениям в частных производных вида (27.2) (при $r = 1, 2, 3$) для функций $\tau(x_1, x_2, x_3) \equiv \tau^{(r)}(x_1, x_2, x_3)$, входящих в уравнения (27.1) для фронтов волн того или иного (рассматриваемого) типа r.

Будем далее считать: 1) что поле смещений (28.1) изучается в окрестности некоторого участка S_{t_0} фронта волны типа r, где r фиксировано; 2) что каждой точке $N \in S_{t_0}$ соответствует луч, рассматриваемый как кривая $L_N^{(r)}$, отвечающая интегралу вида (27.15) системы уравнений (27.7)–(27.9); 3) что на некотором своем протяжении лучи $l_N^{(r)}$, отвечающие всем точкам $N \in S_{t_0}$, образуют в области D (принадлежащей некоторой окрестности S_{t_0}) поле лучей[3], т.е. что они не пересекаются друг с другом и через каждую точку области D проходит один (и только один) луч (типа $r = 1, 2, 3$)

$$x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta), \quad (m = 1, 2, 3)$$

из семейства $l_N^{(r)}$; 4) что через точку любого луча из области D прходит поверхность фронта (27.1) волны типа r, соответствующая некоторому моменту времени $t > t_0$. При таких условиях, в частности, каждая точка области D однозначно определяется значениями τ, α и β лучевых координат точек поля (волны типа r).

Как уже упоминалось, условие разрешимости системы дифференциальных уравнений (28.9), имеющее вид (27.4′), сводится к дифференциальному уравнению (27.2), из которого (например, в соответствии с п. 2–6 §27) определяется функция $\tau(x_1, x_2, x_3)$, входящая в уравнение (27.1) фронта S_t волны рассматриваемого типа r. При этом значениям частных производных p_k из (28.9) (от функции $\tau(x_1, x_2, x_3)$ из (27.1)), входящим в уравнение (27.2),

[3]подобно полю экстремалей из п. 11 §11

отвечают составляющие орта $\vec{n}$ нормалей (к фронту (27.1)) и фазовая скорость $v_r(\vec{n})$ распространения фронта, связанные соотношениями (27.6), которые, равно как и любые другие величины (например, составляющие $A_i^{(r)}$ вектора поляризации, лучевую скорость $\vec{\xi}^{(r)}$ и т.д.) можно рассматривать в области D как известные функции или декартовых x_1, x_2, x_3, или же лучевых τ, α, β координат.

Сопоставление системы уравнений (28.9) с системой (27.3$'$) приводит к соотношению

$$V_i^{(0)} = \varphi(x_1, x_2, x_3) A_i^{(r)}(\vec{n}, x_k), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{28.13}$$

где $A_i^{(r)}$ – нормированное решение системы уравнений (27.3$'$), а φ – неизвестная пока еще функция от координат точек области D. Этим вся информация, содержащаяся в системе (28.9) оказывается исчерпанной.

Так как функция $\tau(x_1, x_2, x_3)$ из (27.1) уже определена (из условия разрешимости системы уравнений (28.9)), то система (28.10) оказывается неоднородной алгебраической системой уравнений относительно $V_i^{(1)}$ с определителем, равным нулю. Условие разрешимости такой системы сводится, как известно, к ортогональности вектора из правой части (28.10) собственному вектору однородной системы, т.е. в рассматриваемом случае вектору поляризации $\vec{A}^{(r)}$ с составляющими из (28.13).

Если в правую часть (28.10) или (28.10$'$) вместо $V_i^{(0)}$ подставить их значения из (28.13), то упомянутое условие запишется в виде

$$I(\varphi) \equiv (\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{M}(\varphi \vec{A}^{(r)})) = \sum_{ik,pq} A_i^{(r)} \Big\{ c_{ik,pq} p_k \frac{\partial(\varphi A_q^{(r)})}{\partial x_p} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} [c_{ik,pq} p_p \varphi A_q^{(r)}] \Big\} = 0. \tag{28.14}$$

Но слагаемые левой части допускают представления

$$\sum_{ik,pq} A_i^{(r)} c_{ik,pq} p_k \frac{\partial(\varphi A_q^{(r)})}{\partial x_p} = \sum_{ik,pq} \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} c_{ik,pq} p_k A_q^{(r)} A_i^{(r)} + \\ + \sum_{ik,pq} \varphi c_{ik,pq} p_k A_i^{(r)} \frac{\partial A_q^{(r)}}{\partial x_p},$$

и

$$\sum_{ik,pq} A_i^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_k}[c_{ik,pq} p_p \varphi A_q^{(r)}] = \sum_{ik,pq} \frac{\partial}{\partial x_k}[c_{ik,pq} p_p \varphi A_q^{(r)} A_i^{(r)}] -$$

$$- \sum_{ik,pq} \varphi c_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} \frac{\partial A_i^{(r)}}{\partial x_k},$$

в которых последние слагаемые (в силу свойств симметрии (4.1) составляющих $c_{ik,pq}$ тензора упругих параметров среды) равны друг другу и отличаются лишь знаком. Что же касается первых слагаемых, то в них выделяются представления для составляющих $\rho\xi_p^{(r)}$ и $\rho\xi_k^{(r)}$ лучевой скорости (умноженный на ρ), вследствие чего сумма из (28.14) (равная нулю) сводится к соотношению

$$\sum_{p=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \rho \xi_p^{(r)} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi f \xi_k^{(r)}) = 0. \qquad (28.15)$$

Для дальнейшего его преобразования остается лишь воспользоваться первым уравнением $dx_m/d\tau = \xi_m^{(r)}$ из системы дифференциальных уравнений (27.7) для луча волны типа r, а также – равенством

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial x_k}{\partial \tau}\right) = \frac{1}{J}\left[-\frac{1}{J}\frac{dJ}{d\tau} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau}\right)\right] = 0, \qquad (28.16)$$

вытекающим из соотношений (27.24), где

$$J = J_r = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\tau, \alpha, \beta)} \qquad (28.17)$$

обозначает функциональный определитель из (27.20) системы соотношений

$$x_k = x_k(\tau, \alpha, \beta), \quad (k = 1, 2, 3)$$

из (27.19) для лучей волны рассматриваемого типа r (связывающих лучевые координаты $\tau = \zeta_1$, $\alpha \equiv \zeta_2$ и $\beta \equiv \zeta_3$ с декартовыми координатами точек поля). При этом соотношение (28.15) последовательно принимает вид

$$I(\varphi) = \sum_{p=1}^{3} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\varphi\frac{dx_k}{d\tau}\right) = \rho\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial \tau} +$$

$$+\rho\varphi\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial x_k}{d\tau}\right)=\frac{1}{\varphi J}\,\frac{d}{d\tau}(\rho J\varphi^2)=0. \tag{28.18}$$

Таким образом, в результате прямых преобразований соотношений (28.14) приводится к выражению

$$(\vec{A}^{(r)}\cdot\vec{M}(\varphi\vec{A}^{(r)}))\equiv\frac{1}{\varphi J_r}\,\frac{d}{d\tau}(\rho J_r\varphi^2)=0, \tag{28.19}$$

из которого для искомой функции φ из (28.13) получается представление

$$\varphi=\frac{c_0(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J_r(\tau,\alpha,\beta)}} \tag{28.19$'$}$$

где $c_0(\alpha,\beta)$ – не известная пока функция, зависящая от разрывных (во времени) свойств поля, представляемого лучевым разложением.

Наконец, на основании формул (28.1), (28.13) и (28.19$'$) для составляющих поля смещений в прифронтовой зоне получается в нулевом приближении лучевого метода окончательные выражения

$$u_q=\frac{c_0(\alpha,\beta)A_q^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho|J(\tau,\alpha,\beta)|}}\,f_0[t-\tau(x_1,x_2,x_3)]=$$

$$=\frac{c_0(\alpha,p)A_q^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho|\vec{\xi}^{(r)}|\mathcal{L}(\tau,\alpha,\beta)}}\,f_0[t-\tau(x_1,x_2,x_3)],\quad (q=1,2,3), \tag{28.19}$$

в которых

$$\mathcal{L}=\sqrt{\frac{J(\tau,\alpha,\beta)}{|\vec{\xi}^{(r)}(\tau,\alpha,\beta)}} \tag{28.20}$$

обозначает геометрическое расхождение пучка лучей типа r, а $c_0(\alpha,\beta)$ – произвольный (пока) множитель, определяемый из соответствующих дополнительных условий. Здесь остается лишь подчеркнуть, что в п. 2 везде подразумевалось, что рассматриваются лучи волн некоторого фиксированного типа r.

Возможно, было бы правильнее все встречающиеся здесь величины x_m, p_m, $\vec{p}$, $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ и т.д. снабжать значками r и писать $x_m^{(r)}$, $\rho_m^{(r)}$, $\vec{\rho}^{\,r}$ и т.п. Однако это усложняло бы формулы, чего хотелось избежать.

3. В связи с изложенным уместно еще раз обратить внимание на одно из основных требований, которые приходится предъявлять к слагаемым лучевого разложения (28.1), чтобы получить амплитудные соотношения (28.8). Оно сводится к (подавляющей) медленности изменения функций $V_q^{(n)}(x_1,\ldots)$ и $\tau(x_1,\ldots)$, равно как и их производных первого и второго порядков, по сравнению с функциями $f_n[t-\tau(x_1,\ldots)]$. Это обстоятельство учитывалось качественно допущением о существовании у функций $f_n(y)$ разрывов (при одновременном предположении о гладкости всех прочих функций) и требованием компенсации разрывных слагаемых в левой части тождества (28.8), равно как и в тождествах, получающихся из (27.8) дифференцированием по t. Однако, если пользоваться представлениями функций $f_n(y)$ в виде интегралов Фурье (27.2) и учитывать очевидный факт, что разрывам функций $f_n(y)$ отвечает интегрирование из (27.2) в области высоких частот, то качественные результаты удается дополнить и некоторыми количественными соотношениями, допускающими полезное физическое толкование.

Полагая

$$f_0(y) = \mathrm{Re}\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(\omega)e^{-i\omega y}\,d\omega, \tag{28.21}$$

где $0<\omega_0<\omega_1$, причем ω_1 достаточно велико, выберем точку (x_k^0, t) волнового фронта и будем рассматривать поле (28.18) в такой окрестности

$$|x_k - x_k^0| < \delta \tag{28.22}$$

точки (x_k^0), что остаточный и линейный члены в разложении

$$\tau(x_1,x_2,x_3) = \tau_0 + \sum_{k=1}^{3} p_k^0(x_k - x_k^0) + O(\Delta x_k^2), \tag{28.23}$$

где $\tau_0(x_1^0,\ldots)$, $p_k^0 = \tau'_{x_k}(x_1^0,\ldots)$, удовлетворяют оценкам

$$\omega_1|O(\Delta x_k^2)| = q < \pi/2, \quad \omega_0\left[\sum_{k=1}^{3}(p_k^0)^2\right]^{1/2}\delta = 2\pi N \gg 1. \tag{28.24}$$

Если, например, принять (как это обычно бывает), что остаточный член в (28.23) оценивается соотношением

$$|O(\Delta x_k^2)| < c\delta^2, \quad c \sim \sup\left|\frac{\partial^2\tau}{\partial x_k \partial x_r}\right|,$$

то из (28.24) получились бы порядковые равенства

$$\delta = \sqrt{\frac{q}{c\omega_1}}, \quad \omega_0 \sqrt{\frac{q}{c\omega_1}} \left[\sum_{k=1}^{3} (p_k^0)^2 \right]^{1/2} = 2\pi N, \tag{28.24$'$}$$

показывающие, что в области достаточно высоких частот всегда может быть выбран такой (даже не узкий) промежуток интегрирования в (28.21), что окажутся выполненными оба неравенства (28.24). Но при этом в окрестности (28.22) точки (x_k^0) допустимо пренебрегать остаточным членом в (27.23) и применять для функции f_0 из (28.19) приближенное представление

$$f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \approx f_0[t - \tau_0 - (\vec{p}^{\,0} \cdot \vec{r})] =$$
$$= \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\omega_1} \psi(\omega) e^{-i\omega[t - \tau_0 - (\vec{p}^{\,0} \cdot \vec{r})]} d\omega \tag{28.25}$$

типа плоской волны, где обозначено $\vec{r} = (x - x_1^0)\vec{i}_1 + \ldots + (x_3 - x_3^0)\vec{i}_3$. Наконец, если обозначить посредством $\Phi_q(x_1, \ldots)$ множители при функции $f_0[t - \tau(x_1, \ldots)]$ из правой части (28.19) и выбрать значения ω_0 и δ в (28.21) и (28.22) так, чтобы выполнялись неравенства вида

$$\left| \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_k} \right| \ll \omega_0 \left| \frac{\partial \tau}{\partial x_k} \right|, \qquad \left| \frac{\partial \Phi_q}{\partial x_k} \right| \delta \ll |\Phi_q|,$$

то при рассмотрении поля (28.19) в окрестности (28.22) точки $x_k = x_k^0$, $t_0 = \tau_0$ волнового фронта это поле можно заменять полем плоской волны

$$u_q = B A_q^{(r)} f_0[t - t_0 - (\vec{p}^{\,0} \cdot \vec{r})],$$

где $B = \text{const}$ и $A_q^{(r)} = \text{const}$.

Итак, из лучевого метода вытекает возможность любую достаточно высокочастотную часть поля смещений представлять (в оцениваемой по размерам) окрестности волнового фронта в форме локально-плоской волны. При этом из изложенного следует, во-первых, что в области (28.24) при $\delta = \text{const}$ погрешность от замены в поле (28.19) функции $f_0[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]$ на функцию из правой части соотношения (28.25) для плоской волны стремится к нулю при $\omega_0 \to \infty$ и $\omega/\omega_0 = \text{const}$. И, во-вторых, что если $\vec{r}$ изменяется в области (28.22), то множитель $\exp i\omega[t - t_0 - (\vec{p}^{\,0} \cdot \vec{r})]$ подынтегральной функции в (28.25) успевает совершить (сколь угодно) большое число $N \to \infty$ полных колебаний. Таким образом, при указанных условиях размеры области (28.22) во много раз превосходят среднюю длину волны рассматриваемого поля, что и оправдывает применение здесь понятия о локально-плоской волне. Приведенные соображения, в частности, указывают на то, что в нулевом приближении лучевого метода процессы отражения-преломления волн на границе раздела двух анизотропных сред должны протекать так же, как и в теории локально-плоских волн. Однако прежде, чем обращаться к детальному обсуждению подобных вопросов, целесообразно познакомиться с формализмом построения последовательных приближений лучевых разложений из (28.1), а также – затронуть вопрос об естественных условиях (типа начальных данных), позволяющих определять неизвестные коэффициенты типа $c_0(\alpha,\beta)$ из (28.19$'$), появляющиеся в лучевых разложениях при их построении.

4. Оставаясь в рамках прежних допущений из §27 об упругой анизотропной среде, а также о свойствах систем лучей, которые строятся предварительно при представлении волновых полей в форме лучевого метода, будем (ради упрощения записей) обозначать цифрой $r=1$ тип волны, лучевое разложение которой далее рассматривается. Волны же двух других (дополнительных) типов будем обозначать символами $r=2$ и $r=3$ независимо от того о квазипродольной или о квазипоперечных волнах идет речь. В соответствии с этим везде далее считается, что величины $\vec{n}^{(1)}$, v_1, $\vec{p}^{(1)}$ и др. отвечают выбранной волне типа "1" независимо от того квазипродольна или квазипоперечна эта волна. Помимо этого делается допущение, что в близкой окрестности точки 0 фронта

$$\tau^{(1)}(x_1,x_2,x_3)-t=0 \qquad (28.26)$$

рассматриваемой волны ($r=1$) нет фронтов дополнительных волн типов $r=2$ и $r=3$.

Начальные данные для лучей (или для волновых фронтов) будем задавать в форме (27.14), т.е.

$$x_m = x_m^{(1)}\big|_{\tau=0} = x_m^0(\alpha,\beta), \quad p_m^{(1)}\big|_{\tau=0} = \frac{n_m^{(1)}(\alpha,\beta)}{v_1(\alpha,\beta)}, \quad (m=1,2,3), \qquad (28.27)$$

где "внешним образом" задаются лишь функции $x_m^0(\alpha,\beta)$ и $n_m^{(1)}(\alpha,\beta)$, определяющие соответственно положение начальных точек лучей и составляющих ортов нормалей $\vec{n}^{(1)}(\alpha,\beta)$ к фронту (28.26) при $t=0$, что же касается фазовой скорости $v_1(\alpha,\beta)$, то она вычисляется известным образом (как в §27) на основе уравнений Кристоффеля

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k^{(1)} n_p^{(1)} A_q^{(1)} - v_1^2 A_i^{(1)} = 0, \quad (i=1,2,3), \tag{28.28}$$

определяющих по значениям $n_m^{(1)}$ из (28.27) кроме фазовой скорости $v_1(\alpha,\beta)$ еще и значения составляющих вектора поляризации $A^{(1)}(\vec{n})$ волны (типа "1"), которую мы условились рассматривать. Однако по составляющим $n_m^{(1)}$ орта нормалей $\vec{n}^{(1)}$ из (28.27) при помощи системы уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k^{(1)} n_p^{(1)} A_q^{(r)} - v_r A_i^{(r)} = 0, \quad (r=1,3) \tag{28.29}$$

можно вычислять и значения

$$v_r = v_r(\tau,\alpha,\beta), \quad \vec{A}^{(r)} = \vec{A}^{(r)}(\tau,\alpha\beta) \tag{28.30}$$

фазовых скоростей и векторов поляризации волн двух других типов r (дополнительных волне "1"). Такие значения также относятся к окрестности точки 0 (а отнюдь не к фронтам волн типов $r=2$ и $r=3$). При этом в окрестности точки 0 найденные значения всех векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}(\overline{n})$ оказываются взаимно ортогональными и нормированными так, что выполняются соотношения

$$(\vec{A}^{(r)} \cdot \vec{A}^{(\rho)} = \delta_{r\rho}, \quad (r,\rho=1,2,3). \tag{28.31}$$

А дополнительные векторы поляризации $\overline{A}^{(r)}$ с индексами $r=2$ и $r=3$ удовлетворяют кроме того полезным соотношениям

$$\Lambda_i \vec{A}^{(r)} \equiv \sum_{k,p,q}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k^{(1)} p_p^{(1)} A_q^{(r)} - A_i^{(r)} =$$
$$= \begin{cases} 0, & (r=1) \\ \frac{v_r^2 - v_1^2}{v_1^2} \cdot A_i^{(r)}, & (r=2,3), \end{cases} \tag{28.32}$$

в которых здесь предполагается, что $v_r^2 \neq v_1^2$.

5. Основываясь на результатах §27, а также на соображениях, изложенных в п. 4, рассмотрим последовательно амплитудные уравнения (28.9)–(28.11) лучевого метода во всех его приближениях. Несмотря на то обстоятельство, что в п. 2 уже приведен вывод соотношений нулевого приближения лучевого метода мы пойдем на некоторое повторение, чтобы подчеркнуть ряд моментов, оставшихся несколько в тени.

Построения производятся вдоль системы лучей

$$x_m = x_m^{(1)}(\tau, \alpha, \beta), \quad p_m = p_m^{(1)}(\tau, \alpha, \beta), \quad (m = 1, 2, 3), \qquad (28.33)$$

определяемых как решение системы дифференциальных уравнений (27.7)–(27.9) при начальных условиях (27.14) (или условиях (28.27)) для волны типа "1", как было условлено в начале п. 4. При этом лучевые разложения (28.1) (с членами "высших порядков" строятся поэтапно (в порядке возрастающих индексов $n > 0$) в рамках последовательных приближений в системах уравнений (28.9)–(28.11), рассматриваемых как алгебраические системы неоднородных уравнений Кристоффеля, в правые части которых входят дифференциальные выражения из (28.5)–(28.7).

В нулевом приближении рассматривается система уравнений

$$\Lambda_i \vec{V}^{\,0} \equiv \sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} p_k^{(1)} p_p^{(1)} V_q^0 - V_i^0 = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

с общим решением

$$\vec{V}^{\,0} = \varphi_0(\tau, \alpha, \beta) \vec{A}^{\,(1)}(\tau, \alpha, \beta), \qquad (28.34)$$

где $\vec{A}^{\,(1)}$ – вектор поляризации волны типа "1", а φ_0 – функция, определяемая из условия разрешимости

$$(\vec{A}^{\,(1)} \cdot \vec{M}(\varphi_0 \vec{A}^{\,(1)}) = 0 \qquad (28.35)$$

системы (неоднородных) уравнений

$$\Lambda_i \vec{V}^{\,(1)} = \frac{1}{\rho} M_i(\varphi_0 \vec{A}^{\,(1)}), \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (28.36)$$

первого приближения.

Вследствие установленного в п. 2 тождества (28.14), (28.19), т.е.

$$(\vec{A}^{\,(1)} \cdot \vec{M}(\varphi \cdot \vec{A}^{\,(1)})) \equiv \frac{1}{\varphi J} \frac{d}{d\tau}(\rho J \varphi^2), \qquad (28.37)$$

где J – обозначает функциональный определитель

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\tau, \alpha, \beta)} \tag{28.37'}$$

системы уравнений $x_m = x_m^{(1)}(\tau, \alpha, \beta)$ луча из (28.33) (связывающей декартовы координаты точки среды с лучевыми –), а ρ – плотность среды, из условия (28.35) для функции φ_0 из (28.34) получается выражение

$$\varphi_0 = \frac{c_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{\rho J(\tau, \alpha, \beta)}}, \tag{28.19'}$$

где $c_0(\alpha, \beta)$ – "постоянная". Кроме же этого для правой части уравнения (28.36) первого приближения получается разложение

$$\frac{1}{\rho}\vec{M}(\varphi_0 \vec{A}^{(1)}) = a_2^0 \vec{A}^{(2)} + a_3^0 \vec{A}^{(3)} \tag{28.38}$$

с коэффициентами

$$a_q^0 = \frac{1}{\rho}(\vec{A}^{(q)} \cdot \vec{M}(\varphi_0 \vec{A}^{(1)})), \quad (q = 2, 3) \tag{28.38'}$$

в форме скалярного произведения с дополнительными векторами поляризации из полного ортонормированного (алгебраического) базиса $\{\vec{A}^{(r)}\}$.

При учете разложения (28.38) уравнение (28.36) первого приближения переписывается в виде

$$\Lambda_i \vec{V}^{(1)} = a_2^0 A_i^{(2)} + a_3^0 A_i^{(3)}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{28.36'}$$

где учтено, что составляющая вектора $\vec{M}(\varphi_0 \vec{A}^{(1)})$ на орт $\vec{A}^{(1)}$ равна нулю вследствие равенства (28.35).

6. Общее решение системы уравнений (28.36′) имеет очевидную структуру

$$\vec{V}^{(1)} = \varphi_1(\tau, \alpha, \beta)\vec{A}^{(1)}(\tau, \alpha, \beta) + \overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(1)}(\tau, \alpha, \beta), \tag{28.39}$$

где

$$\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(1)} = \sum_{q=2}^{3} \frac{a_q^0 v_1^2}{v_q^2 - v_1^2}\, \vec{A}^{(q)}(\tau, \alpha, \beta) \tag{28.39'}$$

– частное решение неоднородной системы уравнений (28.36′), при получении которого было использовано (28.32).

Что же касается функции φ_1, то она должна определяться из условия

$$(\vec{A}^{(1)} \cdot \vec{M}(\vec{V}^{(1)})) - (\vec{A}^{(1)} \cdot \vec{N}(\vec{V}^{(0)})) = 0 \tag{28.40}$$

разрешимости системы уравнений второго приближения

$$\vec{\Lambda}\vec{V}^{(2)} = \frac{1}{\rho}\vec{M}(\vec{V}^{(1)}) - \frac{1}{\rho}\vec{N}(\vec{V}^{(0)}), \tag{28.41}$$

записанного в векторной форме.

В соответствии с выражениями (28.40), (28.39) и (28.34), а также – с тождеством (28.37), условие (28.40) приводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$\frac{1}{J\varphi_1}\frac{d}{d\tau}(\rho J\varphi_1^2) = f_1 \equiv (\vec{A}^{(1)} \cdot \vec{N}(\varphi_0\vec{A}^{(1)}) - (\vec{A}^{(1)} \cdot \vec{M}(\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(1)})) \tag{28.42}$$

для функции φ_1 из (28.39), из которого следует

$$\varphi_1 = \frac{c_1(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho J}}\int\limits_0^\tau \sqrt{\frac{J}{\rho}}\, f_1(\tau,\alpha,\beta)d\tau, \tag{28.43}$$

где $c_1(\alpha,\beta)$ – (пока) произвольная постоянная (вдоль луча).

Помимо же этого, вследствие равенства (28.40), а также – полноты базиса $\{\vec{A}^{(r)}\}$, для правой части уравнения (28.41) второго приближения справедливо разложение

$$\frac{1}{\rho}\vec{M}(\vec{V}^{(1)} - \frac{1}{\rho}\vec{N}(\vec{V}^{(0)}) = a_2^{(1)}\vec{A}^{(2)} + a_3^{(1)}\vec{A}^{(3)}, \tag{28.44}$$

где обозначено

$$a_q^{(1)} = \frac{1}{\rho}\{(\vec{A}^{(q)} \cdot \vec{M}(\vec{V}^{(1)})) - (\vec{A}^{(q)} \cdot \vec{N}(\vec{V}^{(0)}))\}. \tag{28.44′}$$

При учете такого разложения уравнение (28.41) переписывается в векторном виде

$$\vec{\Lambda}\vec{V}^{(2)} = a_2^{(1)}\vec{A}^{(2)} + a_3^{(1)}\vec{A}^{(3)}, \tag{28.41′}$$

допускающем (при учете (28.32)) следующее общее решение

$$\vec{V}^{(2)} = \varphi_2\vec{A}^{(1)} + \overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(2)}; \quad \overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(2)} = \sum_{q=2}^{3}\frac{a_q^{(1)}v_1^2}{v_q^2 - v_1^2}\,\vec{V}^{(q)}. \tag{28.45}$$

Входящая сюда не известная еще функция $\varphi_2(\tau,\alpha,\beta)$, как и обычно определяется из условия разрешимости уравнения (очередного) третьего приближения

$$\vec{\Lambda}\vec{V}^{(3)} = \frac{1}{\rho}\vec{M}(\vec{V}^{(2)} - \frac{1}{\rho}\vec{N}(\vec{V}^{(1)}), \tag{28.46}$$

в котором значения $\vec{V}^{(1)}$ и $\vec{V}^{(2)}$ берутся из (28.39) и (28.45).

При учете этого, а также тождества (28.37), условие разрешимости примет вид

$$(\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{M}(\varphi_2\vec{A}^{(1)})) + (\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{M}(\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(2)})) - (\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{N}(\varphi_1\vec{A}^{(1)}))-$$
$$-(\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{N}\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(1)}) = \frac{1}{J\varphi_2}\frac{d}{d\tau}(\rho J\varphi_2^2) - f_2(\tau,\alpha,\beta) = 0, \tag{28.47}$$

где обозначено

$$f_2 = -(\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{M}(\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(2)})) + (\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{N}(\varphi_1 A^{(1)})) + \vec{A}^{(1)}\cdot\vec{N}\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(1)}). \tag{28.47$'$}$$

Отсюда следует выражение

$$\varphi_2 = \frac{c_2(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho J}}\int\limits_0^\tau \sqrt{\frac{J}{\rho}}\, f_2(\tau,\alpha,\beta)d\tau, \tag{28.48}$$

тождественное по форме выражению φ_1 из (28.43), равно как тождественное и всем выражениям такого же рода для последующих приближений метода.

При этом в n-ом приближении метода получается представление

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{V}^{(n)} = \varphi_n\vec{A}^{(1)} + \overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(n)},\\
&\varphi_n = \frac{c_n(\alpha,\beta)}{\sqrt{\rho J}} + \frac{1}{2\sqrt{\rho J}}\int\limits_0^\tau \sqrt{\frac{J}{\rho}}\, f_n(\tau,\alpha,\beta)d\tau,\\
&f_n = (\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{N}(\varphi_{n-1}A^{(1)}))\\
&\;+ (\vec{A}\cdot\vec{N}\cdot\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{n-1}) - (\vec{A}^{(1)}\cdot\vec{M}(\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(n)}),
\end{aligned}\right\} \tag{28.49}$$

величины $\overset{\circ}{\vec{V}}{}^{(n)}$ в котором определяются рекуррентным образом – путем продолжения приведенных здесь трех шагов процесса построения последовательных приближений.

7. Чтобы завершить изложение формальной схемы реализации лучевого метода, основанного на разложении полей в ряды вида (28.1) с "разрывными" базисными функциями $f_n(t)$ (подчиненными соотношениям (28.2), допускающими почленное дифференцирование любое число раз, остается прежде всего отметить, что величины $c_n(\alpha, \beta)$ из (28.49) играют при построении лучевых рядов вдоль центральных лучей $l^{(r)}$ роль произвольных постоянных, которые должны определяться из каких-либо дополнительных условий задачи. Они входят в (каждый) амплитудный вектор $\vec{V}^{(n)}(\tau, \alpha, \beta)$ не только в форме слагаемого $c_n(\alpha, \beta)/\sqrt{\rho J}$ с тем же индексом n, но и через посредство слагаемых совсем другой породы, содержащих множителями величины $c_{n_0}(\alpha, \beta)$ с различными индексами $n_0 \leqslant n-1$. Такое утверждение допускает простое предметное уточнение на основе материала, приведенного в п. 4–6.

Следует обратить серьезное внимание также на простоту алгоритмической реализации нулевого приближения лучевого метода и на резкое усложенение ее при переходе к последующим приближениям метода даже – лишь только к первому. Такое усложнение – следствие не только заметного увеличения числа операций при переходе к реализации приближений выше нулевого. Число операций, конечно, заметно увеличивается, но что особенно существенно, появляются (в значительном количестве) "плохие" для расчетов численными методами операций дифференцирования в форме громоздких операторов $\vec{M}$ и $\vec{N}$ из (28.6). Затруднения в расчетах настолько возрастают, что даже лишь одно только лучевое продолжение поля вдоль центрального луча какой-либо волны становится проблемой. Если же учесть, что для получения количественных закономерностей в поведении полей в заданной области необходимы лучевые продолжения полей по достаточно представительным множествам центральных лучей, то сразу возникнет острый вопрос о познавательной оправданности такой (вычислительной) работы. Он еще усугубляется, если принять во внимание физически плохо-оправдываемые исходные положения лучевого метода, приводящие к столь простой изначальной схеме вывода структуры лучевых рядов.

В результате этих (равно как и других, упоминающихся далее) соображений представляется несомненным, что только расчетам полей в нулевом приближении лучевого метода можно при-давать известный физический смысл. При этом такое заключение распространяется не только на анизотропные, но и на реально-неоднородные изотропные сейсмические среды.

§29. О возможностях лучевого метода в задаче на отражение-преломление волн на криволинейной границе раздела двух однородных анизотропных упругих сред

Пусть в декартовой системе координат $L(x_1, x_2, x_3)$ задана безграничная незамкнутая поверхность Σ_0, определяемая уравнением

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{29.1}$$

с непрерывно дифференцируемым ортом нормали $\vec{m}(N)$, $(N \in \Sigma_0)$, разделяющая все пространство на части ε_1, $(\psi > 0)$ и ε_2, $(\psi < 0)$, заполненные однородными анизотропными средами с параметрами $\rho(\varepsilon)$ и $c^{(\varepsilon)}_{ik,pq}$. Предполагая наличие между средами жесткого контакта, допустим, что из среды $\varepsilon = 2$ вдоль некоторого центрального луча $l^{(0)}$, проходящего через точку $O \in \Sigma_0$, падает волна типа r_0 $(1, 2, 3)$, заданная (в проекциях на оси координат) своим лучевым разложением

$$u^0_q = \sum_{n=0}^{\infty} V^{(n)}_q f^0_n \Big[t - \tau^0(x_1, \dots)\Big], \quad (q = 1, 2, 3). \tag{29.2}$$

При этом считается, что все члены лучевого разложения уже определены в точках луча $l^{(0)}$ (а по непрерывности – и в некоторой его окрестности). Под действием падающей волны (29.2) в среде возбуждаются отраженные и преломленные волны. Требуется поставить задачу на отражение-преломление (объемных) волн и оценить возможности в ее решении как в общем случае, так и в случае нулевого приближения лучевого метода.

Отраженные и преломленные волны должны зарождаться в области $\Delta\Sigma_0$ границы, прилегающей непосредственно к точке 0 встречи границы с лучем $l^{(0)}$ падающей волны, характеризующейся ее волновым фронтом $t - \tau^0(x_1, x_2, x_3) = 0$. При этом рассмотрения отраженно-преломленных волн в рамках лучевого метода должны начинаться с построения их волновых фронтов $t - \tau_\nu(x_1, x_2, x_3) = 0$ и $t - \tau_\mu(x_1, x_2, x_3) = 0$ с одновременным построением систем соответствующих лучей, продолжающих лучевую трубку падающей волны.

Здесь естественно полагать, что все подобные предварительные построения уже выполнены. Тогда составляющие полей смещений отраженных и преломленных волн в окрестности точки 0 границы раздела Σ_0 должны представляться в виде сумм

$$u_{q2} = \sum_{\nu=1}^{3} u_q^{(\nu)}(x_1, \ldots), \quad \widetilde{u}_{q1} = \sum_{\mu=1}^{3} \widetilde{u}_q^{(\mu)}(x_1, \ldots), \tag{29.3}$$

слагаемые которых, отвечающие волнам трех возможных типов r в средах $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 1$, разыскиваются в форме лучевых разложений

$$\begin{aligned} u_q^{(\nu)} &= \sum_{n=0}^{\infty} V_q^{(n,\nu)}(x_1, \ldots) f_n \Big[t - \tau^{(\nu)}(x_1, \ldots)\Big], \quad (q, \nu = 1, 2, 3), \\ \tilde{u}_q^{(\mu)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{V}_q^{(n,\mu)}(x_1, \ldots) \tilde{f}_n \Big[t - \tau^{(\mu)}(x_1, \ldots)\Big], \end{aligned} \tag{29.4}$$

аналогичных разложению (29.2). При этом, в соответствии с сущностью лучевого метода, определение всех элементов лучевых разложений производится на основе решения двух вспомогательных задач, а именно, задачи на определение по падающей волне (29.2) локальных значений полей отраженных и преломленных волн (в окрестности $\Delta\Sigma_0$ упоминавшегося центрального луча) таких, которые могли бы быть использованы в качестве исходных данных для последующего построения разложений вида (29.4), и задачи на непосредственное построение упомянутых разложений для отраженных и преломленных волн. Здесь мы рассмотрим лишь первую группу таких задач, причем интересоваться будем, прежде всего, возможностью (т.е. простотой или сложностью) их решения, а не самими такими решениями.

1. Напомним предварительно, во-первых, что функции $\tau^0(x_1, \ldots)$, $\tau^{(\nu)}(x_1, \ldots)$ и $\widetilde{\tau}^{(\mu)}(x_1, \ldots)$ из (29.2), и (29.4), играющие роль функций $\tau(x_1, \ldots)$ в уравнениях вида (27.1) для фронтов падающей, отраженных и преломленных волн, связаны с составляющими соответствующих векторов рефракции $\vec{p}$ и орта $\vec{n}$ нормали к волновому фронту формулами вида (27.6), т.е.

$$p_m = \frac{\partial \tau}{\partial x_m} = \frac{n_m}{v_r(\vec{n})}, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Во-вторых, что лучевые ряды всегда строятся вдоль лучей, рассматриваемых как решение (27.15) системы дифференциальных уравнений (27.7)–(27.9) для лучей, подчиненных начальным условиям вида (27.14). При этом первая группа решений $x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta)$ определяет собственно лучи $l^{(r)}$ как пространственные кривые, первая (лучевая) координата τ которых определяет положение фронта, пересекающего луч в точке (x_m) при $t = \tau$. И, наконец, в-третьих, что, при помощи алгоритмов построения лучей в каждой точке $x_m = x_m(\tau, \alpha, \beta)$ луча $l^{(r)}$ одновременно определяются: значения ортов нормали $\vec{n} = \vec{n}(\tau, \alpha, \beta)$ к фронту $t = \tau$; значения фазовых скоростей $v_r = v_r(\vec{n})$ распространения фронта; значения составляющих векторов поляризации $\vec{A}^{(r)}(\vec{n})$ и значения составляющих лучевой скорости $\vec{\xi}(\vec{n})$ распространения волн (см. п. 6 §27).

Обращаясь к задаче на отражение-преломление волн, будем интересоваться окрестностью $\Delta\Sigma_0$ точки 0 встречи центрального луча $l^{(0)}$ падающей волны (29.2) с границей Σ_0. Каждой точке $N \in \Sigma_0$ отвечает орт нормали $\vec{m}(N)$ к Σ_0 и орт $\vec{n}(N)$ к фронту падающей волны. Исключая из рассмотрения случай $[\vec{m} \times \vec{n}] = 0$ (который фактически содержится в наших дальнейших исследованиях как предельный), построим плоскость $\Pi(N)$, содержащую в себе орты нормалей $\vec{m}(N)$ и $\vec{n}(N)$, называемую плоскостью падения луча в точке N. Наконец, полагая $\vec{j}_2(N) = \vec{m}(N)$, построим в точке N орты $\vec{j}_1(N) \in \Pi(N)$ и $\vec{j}_3(N) \perp \vec{j}_1(N)$ касательных к Σ_0 и притом так, чтобы $\vec{j}_1(N)$, $\vec{j}_2(N)$ и $\vec{j}_3(N)$ составляли правую (ортогональную) систему.

В результате указанных построений получаем на поверхности Σ_0 два взаимно ортогональных поля касательных направлений $\vec{j}_1(N)$ и $\vec{j}_3(N)$, определяющих (в случае достаточной гладкости поверхности Σ_0, равно как и фронта падающей волны) два взаимно ортогональных семейства кривых, $y_1(N) = \mathrm{const}$ и $y_3(N) = \mathrm{const}$. Выбирая такие семейства за координатные линии криволинейной ортогональной системы координат (y_1, y_3) на поверхности Σ_0 и добавляя к ним еще координату y_2, изменяющуюся вдоль нормали $\vec{m}(N) \equiv \vec{j}_2(N)$ к Σ_0, получаем пространственную ортогональную криволинейную (локальную) систему координат (y_1, y_2, y_3) с ортами $\vec{j}_1(y_1, y_3)$, $\vec{j}_2(y_1, y_3)$ и $\vec{j}_3(y_1, y_3)$, естественную для исследования граничных условий в задаче на отражение-преломление волн. При известном уравнении (29.1) поверхности

Σ_0 (из которого вытекают и ее свойства кривизны) в принципе нетрудно вывести взаимно обратные (и дифференцируемые) формулы преобразований $x_k \leftrightarrow y_\alpha$

$$y_\alpha = y_\alpha(x_1, x_2, x_3), \quad x_k = x_k(y_1, y_2, y_3), \quad (\alpha, k = 1, 2, 3), \tag{29.5}$$

связывающие (в окрестности Σ_0) координаты x_k и y_α друг с другом. На основании же таких преобразований стандартным образом определяются базисные координатные векторы

$$\vec{\rho}_\alpha = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha} \vec{i}_k, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{29.6}$$

локальной системы $\{y_1, y_2, y_3\}$, ее метрические (фундаментальные) тензоры

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}\ \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} = (\vec{\rho}_\alpha \cdot \vec{\rho}_\beta), \quad g^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_k}\ \frac{\partial y_\beta}{\partial x_k} \tag{29.7}$$

и т.п.; т.е. определяются все элементы, необходимые для перезаписи в переменных y_1, y_2, y_3 локальной системы всех соотношений теории упругости, записанных в декартовых координатах x_1, x_2, x_3 исходной системы L. Мы не выписываем здесь соответствующих формул в явном виде, так как для реализации лучевого метода в его нулевом приближении они нам не потребуются.

2. В предположении жесткости контакта граничные условия для полей (29.3) и (29.4) падающей, отраженных и преломленных волн записываются в виде двух векторных равенств

$$\vec{u} + \sum_{\nu=1}^{3} \vec{u}^{\,(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{3} \vec{\tilde{u}}^{\,(\mu)},$$

$$\vec{t}_m(\vec{u}) + \sum_{\nu=1}^{3} \vec{t}_m(\vec{u}^{\,(\nu)}) = \sum_{\mu=1}^{3} \vec{t}_m(\vec{\tilde{u}}^{\,(\mu)}), \tag{29.8}$$

выражающих условия непрерывности при переходе через границу Σ_0 суммарных векторов смещений и напряжений.

В компонентах относительно исходной декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) предыдушие соотношения переписываются в форме шести равенств

$$u_q + \sum_{\nu=1}^{3} u_q^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{3} \widetilde{u_q}^{(\mu)}, \quad (q = 1, 2, 3), \tag{29.9}$$

$$t_{mr}(\vec{u}) + \sum_{\nu=1}^{3} t_{mr}(\vec{u}^{(\nu)}) = \sum_{\mu=1}^{3} t_{mr}(\vec{\tilde{u}}^{(\mu)}), \quad (r = 1, 2, 3), \tag{29.10}$$

в которых под составляющими векторов напряжений, в соответствии с (1.5), (1.4) и (1.11), следует понимать выражения вида

$$t_{mr}(\vec{u}) = (\vec{t}_r \cdot \vec{m}) = \sum_{k,p,q=1}^{3} c_{rk,pq}^{(\varepsilon)} m_k \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \tag{29.11}$$

где m_k – составляющие орта $\vec{m}$ нормали к Σ_0, а $c_{rk,pq}^{(\varepsilon)}$ – составляющие тензора упругих постоянных сред $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ в точках N^+ и N^-, непосредственно прилегающих с обеих сторон к границе Σ_0.

Что же касается перезаписи таких соотношений в локальной криволинейной системе координат (y_1, y_2, y_3), то она может осуществляться, например, следующим образом: во-первых, переходом по формулам

$$u'_\alpha = \sum_{q=1}^{3} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_q} u_q, \quad m'_\alpha = \sum_{q=1}^{3} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_q} m_q \tag{29.12}$$

к новым составляющим (контравариантных) векторов $\vec{u}$ и $\vec{m}$, а также переходом по формулам

$$c'_{\rho\chi,\alpha\beta} = \sum \frac{\partial x_r}{\partial y_\rho} \frac{\partial x_k}{\partial y_\chi} \frac{\partial x_p}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_q}{\partial y_\beta} c_{rk,pq} \tag{29.13}$$

к новым составляющим (ковариантного представления) тензора упругих постоянных сред $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$; во-вторых, заменой в соотношениях (29.9)–(29.11) координат x_k на координаты y_k, а величин u_q, m_k и $c_{rk,pq}$ на величины u'_q, m'_k и $c'_{rk,pq}$ из левых частей равенств (29.12) и (29.13), выбираемых с такими же индексами, что и индексы у заменяемых величин. При этом в новом равенстве (29.11) производная $\partial u'_q/\partial y_p$ должна быть заменена, как известно, на ковариантную производную, определяемую формулами

$$\nabla_p u'_q = \frac{\partial u'_q}{\partial y_p} + \sum_{\sigma=1}^{3} \Gamma^q_{p\sigma} u'_\sigma, \quad \Gamma^q_{p\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{3} g^{q\alpha} \Gamma_{p\sigma,\alpha},$$
$$\Gamma_{p\sigma,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial p_{\sigma\alpha}}{\partial y_p} - \frac{\partial g_{p\sigma}}{\partial y_\alpha}\right), \tag{29.14}$$

в которых использованы метрические тензоры из (29.7).

В результате выполнения указанных операций приходят в локальной системе координат (y_1, y_2, y_3) к граничным условиям, представляющимся равенствами (29.9) и (29.10), в которых все буквы u заменены на u', а под $t_{mr}(\vec{u}\,')$ $\big($при $\vec{u}\,' = \vec{u}\,'$, $\vec{u}\,' = \vec{u}\,'^{(\nu)}$ и $\vec{u}\,' = \tilde{\vec{u}}\,'^{(\mu)}\big)$ подразумеваются выражения вида

$$t_{mr}(\vec{u}\,') = \sum_{k,p,q=1}^{3} c'^{(\varepsilon)}_{rk,pq} m'_k \nabla_p u'_q \tag{29.15}$$

при значениях $\nabla_p u'_q$ из (29.14).

3. Анализ граничных условий следует начинать с соотношений (29.9), которые при учете (29.2), (29.4) и при отбрасывании ради упрощения записей штрихов сверху (долженствующих обозначать, что рассмотрения производятся в локальной системе координат) переписываются символически в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ V_q^{(n,0)} f_n^0 \big[t - \mathring{\tau}(y_1, y_3)\big] + \sum_{\nu=1}^{\infty} V_q^{(n,\nu)} f_n \big[t - \tau^{(\nu)}(y_1, y_3)\big] -$$
$$- \sum_{\mu=1}^{\infty} \widetilde{V}_q^{(n,\mu)} \widetilde{f}_n \big[t - \widetilde{\tau}^{(\mu)}(y_1, y_3)\big] \Big\} = 0, \quad (q = 1, 2, 3), \tag{29.16}$$

где обозначено

$$\mathring{\tau}(y_1, y_3) = \mathring{\tau}\big[x_1(y_1, y_2, y_3), \ldots\big]\Big|_{y_2=0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{29.17}$$
$$\widetilde{\tau}^{(\mu)}(y_1, y_3) = \widetilde{\tau}^{(\mu)}\big[x_1(y_1, y_2, y_3), \ldots\big]\Big|_{y_2=0}.$$

Соотношения (29.16) должны выполняться тождественно относительно t, y_1 и y_3, причем каждая из систем функций $\{f_n^0\}$, $\{f_n\}$

и $\{\widetilde{f}_n\}$ должна удовлеворять соотношениям вида (28.2), а функции $\hat{f}_n^0$ из разложения падающей волны должны иметь разрывы непрерывности в производных порядка $n+2$. Нетрудно видеть, что при таких условиях из (29.16) с необходимостью следуют, во-первых, равенства

$$f_n^0(t) = f_n(t) = \hat{f}_n(t), \tag{29.18}$$

$$\tau^{(\nu)}(y_1, y_3) = \widetilde{\tau}^{(\mu)}(y_1, y_3) = \mathring{\tau}(y_1, y_3), \quad (\nu, \mu = 1, 2, 3) \tag{29.19}$$

и, во-вторых, бесконечное множество (при $n = 0, 1, 2, \ldots$) групп по три уравнения

$$\sum_{\mu=1}^{3} \left[\tilde{V}_q^{(n,\mu)} - V_q^{(n,\mu)}\right] = \hat{V}_q^{(n)}, \quad (q = 1, 2, 3) \tag{29.20}$$

для всех медленно изменяющихся функций, входящих амплитудными множителями при функциях f_n и $\widetilde{f}_n$ в лучевые разложения (29.4). При $n = 0$ их (29.4) вытекают первые три уравнения

$$\sum_{\mu=1}^{3} \left[\tilde{V}_q^{(0,\mu)} - V_q^{(0,\mu)}\right] = \hat{V}_q^{(0)}, \quad (q = 1, 2, 3) \tag{29.21}$$

из полной системы уравнений (29.26) и (29.27), описывающей процесс отражения-преломления волн в нулевом приближении лучевого метода.

Полученные соотношения (29.18) и (29.19) по своему смыслу вполне аналогичны соотношениям (25.14) или (25.16) теории локально-плоских волн, причем из (29.19) как и из (25.16), вытекают все кинематические закономерности в процессах отражения-преломления волн.

Действительно, на основании построения в п. 1 локальной системы координат (y_1, y_2, y_3), а также определения понятия о плоскости падения $\Pi(y_1, y_3)$ луча $l(y_1, y_3)$ падающей волны, встречающего границу Σ_0 в точке (y_1, y_3), можно утверждать, что плоскость падения $\Pi(y_1, y_3)$, ортогональная орту $\vec{j}_3(y_1, y_3)$, проходит через точку (y_1, y_3) и полностью содержит в себе орт нормалей $\vec{n}(y_1, y_3)$ к фронту падающей волны. Поэтому в точке (y_1, y_3) оказывается $n_3 = (\vec{n} \cdot \vec{j}_3) = 0$, а также $\partial\tau/\partial y_3 = n_3/v_0 = 0$, что следует из соотношений вида (27.6). Но в силу (29.19) справедливо

$$\frac{\partial\tau^{(\nu)}}{\partial y_3} = \frac{\partial\widetilde{\tau}^{(\mu)}}{\partial y_3} = \frac{\partial\tau}{\partial y_3}, \quad (\nu,\mu = 1,2,3),$$

вследствие чего в точке (y_1, y_3) выполняются равенства

$$n_3^{(\nu)} = \tilde{n}_3^{(\mu)} = n_3 = 0, \tag{29.22}$$

означающие, что орты нормалнй $\vec{n}^{(\nu)}(y_1,y_3)$ и $\vec{\tilde{n}}^{(\mu)}(y_1,y)$ к фронтам всех отраженных и преломленных волн лежат в плоскости падения $\Pi(y_1,y_3)$ падающей волны. Итак, мы получили первый закон кинематики процессов отражения и преломления волн.

Для получения второго закона кинематики, играющего роль соотношений Снеллиуса, достаточно продифференцировать тождества (29.19) по y_1 и учесть соотношения вида (27.6). Если при этом еще представить суммами вида

$$\vec{n} = n_1\vec{j}_1(y_1,y_3) + n_2\vec{j}_2(y_1,y_3)$$

значения в точке (y_1,y_3) каждого орта $\vec{n}$, $\vec{n}^{(\nu)}$, $\vec{\tilde{n}}^{(\mu)}$, $(\nu,\mu = 1,2,3)$ (падающей, отраженных и преломленных волн), а составляющие n_1 и n_2 каждого из таких ортов выразить по формулам $n_1 = \sin\theta$, $n_2 = \cos\theta$ через соответствующие углы падения (вводимые в точности так же, как и в п. 4 §24), то получатся соотношения

$$\frac{\sin\widetilde{\theta}_\mu}{\widetilde{v}_\mu(\widetilde{\theta}_\mu)} = \frac{\sin\theta_\nu}{v_\nu(\theta_\nu)} = \frac{\sin\theta}{v_0(\theta)}, \quad (\mu,\nu = 1,2,3), \tag{29.23}$$

буквально совпадающие (как по форме, так и по физическому смыслу) с соотношениями (25.21).

На основании соотношений (29.22) и (29.23) по орту нормали $\vec{n}(y_1,y_3)$ падающей волны (очевидным образом) однозначно определяются значения ортов нормалей $\vec{n}^{(\nu)}(y_1,y_3)$ и $\vec{\tilde{n}}^{(\mu)}(y_1,y_3)$ всех отраженных и преломленных волн. Такие определения производятся для каждой точки (y_1,y_3) границы Σ_0 совершенно так же, как на основании соотношений (25.16) и (25.21) определялись орты нормалей $\vec{n}^{(\nu)}$ и $\vec{\tilde{n}}^{(\mu)}$ отраженных и преломленных плоских волн по орту $\vec{n}$ падающей плоской волны. При этом совершенно так же используются и неравенства типа (25.11) и (25.23) для составляющей ξ_2 лучевых скоростей отраженных и преломленных волн вдоль лучей, выходящих из точки $(y_1,0,y_3)$ в области

$y_2 < 0$ и $y_2 > 0$ соответственно сред $\xi = 2$ и $\varepsilon = 1$. Не задерживаясь на подробностях, лишь отметим, что по известным значениям упомянутых ортов в точках $(y_1, 0, y_3)$ с соответствующих сторон границы Σ_0 лучи всех отраженных и преломленных волн определяются однозначно.

4. Переходя, наконец, к рассмотрению второй группы граничных условий, связанных с непрерывностью составляющих вектора напряжений при переходе через границу раздела сред, следует учесть замечание из конца п. 2, где указывалось, что в локальной системе координат (y_1, y_2, y_3) такие условия сводятся к равенствам (22.10), в которых величины $t_{mr}(\vec{u})$, $t_{mr}(\vec{u}^{\,(\nu)})$ и $t_{mr}(\tilde{\vec{u}}^{\,(\mu)})$ заменены соответственно на величины $t_{mr}(\vec{u}\,')$, $t_{mr}(\vec{u}\,'^{(\nu)})$ и $t_{mr}(\tilde{\vec{u}}\,'^{(\mu)})$ типа (29.15). В результате же подстановки в подобные выражения лучевых разложений (29.2) и (29.4) получатся лучевые разложения

$$t_{mr}(\vec{u}\,') = \sum_{n=-1}^{\infty} \Bigg[\sum_{k,p,q=1}^{3} c'^{(2)}_{rk,pq} m'_k U^{(n)}_{pq} \Bigg] f_n \big[t - \widehat{\tau}\big],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{mr}(\tilde{\vec{u}}\,'^{(\mu)}) = \sum_{n=-1}^{\infty} \Bigg[\sum_{k,p,q=1}^{3} c'^{(1)}_{rk,pq} m'_k \tilde{U}^{(n,\mu)}_{pq} \Bigg] \widetilde{f}_n \big[t - \widehat{\tau}\big]$$

для составляющих векторов напряжений на границе Σ_0 раздела сред $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 1$ соответственно падающей, отраженных и преломленных волн, в которых обозначено:

$$\hat{U}^{(-1)}_{pq} = -\hat{V}^{(0)}_q \frac{\partial \widehat{\tau}}{\partial y_p}, \ldots, \tilde{U}^{(-1,\mu)}_{pq} = -\tilde{V}^{(0,\mu)}_q \frac{\partial \widetilde{\tau}^{(\mu)}}{\partial y_p}, \tag{29.24}$$

$$U^{(n)}_{pq} = \nabla_p \hat{V}^{(n)}_q - \hat{V}^{(n+1)}_q \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial y_p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{29.25}$$

$$\tilde{U}^{(n,\mu)}_{pq} = \nabla_p \tilde{V}^{(n,\mu)}_q - \tilde{V}^{(n+1,\mu)}_q \frac{\partial \widetilde{\tau}}{\partial y_p}, \quad (n \geqslant 0),$$

причем (ради упрощения записи) у величин $V^{(n)}_q, \ldots, V^{(n,\nu)}_q$ и $\tilde{V}^{(\nu,\mu)}_q$ из правых частей равенств (29.24) и (29.25) опущены штрихи сверху. Поэтому, если воспользоваться такими разложениями и учесть равенства (29.18), а также – соображения из п. 1 о разрывных свойствах функции $f_n(t)$ из (28.2), то нетрудно убедиться в том, что граничные условия (29.10) сводятся к бесконечному множеству (при $n=-1,0,1,2,\dots$) групп по три уравнения вида

$$\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{k,p,q=1}^{3}\left[c'^{(1)}_{rk,pq}m'_k\tilde{U}^{(n,\mu)}_{pq}-c'^{(2)}_{rk,pq}m'_kU^{(n,\mu)}_{pq}\right]=$$

$$=\sum_{k,p,q=1}^{3}c^{(2)}_{rk,pq}m'_k\hat{U}^{(n)}_{pq},\quad (r=1,2,3). \qquad (29.26)$$

При $n=-1$ отсюда вытекают (недостающие еще) три уравнения

$$\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{k,p,q=1}^{3}\left[c^{(1)}_{rk,pq}m_k\frac{\partial\widetilde{\tau}^{(\mu)}}{\partial y_p}\tilde{V}^{(0,\mu)}_q-c^{(2)}_{rk,pq}m_k\frac{\partial\tau^{(\mu)}}{\partial y_p}V^{(0,\mu)}_q\right]=$$

$$=\sum_{k,p,q=1}^{3}c^{(2)}_{rk,pq}m_k\frac{\partial\widehat{\tau}}{\partial y_p}\hat{V}^{(0,\mu)}_q,\quad (r=1,2,3), \qquad (29.27)$$

образующие совместно с уравнениями (29.21) полную систему уравнений для описания процесса отражения-преломления в нулевом приближении лучевого метода. Остается подчеркнуть, во-первых, что несмотря на опущенные штрихи сверху у всех величин $c^{(\nu)}_{rk,pq}$, m_k, $\hat{V}^{(0,\mu)}_q$ и $\tilde{V}^{(0,\mu)}_q$, входящих в уравнения (29.24) и (29.27), указанные уравнения относятся к локальной криволинейной системе координат (y_1,y_2,y_3) из п. 1. И, во-вторых, что (вследствие отсутствия в слагаемых уравнений (29.27) операций ковариантного дифференцирования) уравнения (29.21) и (29.27) (применяемые в любой точке (y_1,y_3) области $\Delta\Sigma_0$ границы раздела) в точности совпадают с системой уравнений, которая получилась бы в нулевом приближении лучевого метода в результате проектирования соотношений (29.9) и (29.10) на оси локально-декартовой системы координат $(\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\widetilde{y}_3)$, построенной в произвольно выбираемой (фиксированной) точке $(y_1,y_3)\in\Delta\Sigma_0$ и имеющей (постоянные) орты $\vec{j}_1(y_1,y_3)$, $\vec{j}_2(y_1,y_3)$ и $\vec{j}_3(y_1,y_3)$. Такая система координат, кстати говоря, эквивалентна “естественной” системе координат из п. 4 §25, в которой рассматривается процесс отражения-преломления плоских волн. При учете же сделанного замечания становится оправданнм утверждение о том, что описание процесса отражения-преломления волн в нулевом приближении лучевого метода (в достаточно малой окрестности границы раздела) сводится фактически к теории локально-плоских волн.

Помимо указанного напрашивается заключение о том, что приведенное в разделах п. 2–4 схематическое рассмотрение задачи на полное лучевое описание процессов отражения-преломления волн на плоской границе раздела анизотропных упругих сред свидетельствует об очевидной неэффективности в задачах такого рода лучевого метода в последующих его приближениях. В случае границ раздела, радиусы кривизны которых лишь немного превосходят доминирующую длину волны падающего возмущения, нулевое приближение метода еще может (иногда) приводить к успеху, т.е. “выдавать” правдоподобные результаты. Погоня же здесь за последующими приближениями лучевого метода едва ли получит когда-либо научное оправдание. Очень уж далеки от реальности исходные положения метода и очень уж велик диссонанс между свойствами разрывных базисных функций $f_n(t)$ из (28.1), подчиненных соотношениям (28.2), и теми реальными достаточно низкочастотными временными зависимостями, которые реализуются в волновых полях сейсмической практики.

§30. Заключительные замечания к главе

В главе рассмотрена схема алгоритмического формализма лучевого метода для анизотропных упругих сред в его варианте с бесконечной системой базисных функций $f_n(t)$, подчиненных соотношениям (28.2), и содержащих разрывную функцию с наименьшим индексом в рядах по целочисленной переменной n. Лежащие в основе схемы далеко-идущие идеализации о возможности дифференцирования по t лучевых рядов любое число раз и о разрывности базисных функций или их соответственной производной, существенно упрощают реализацию формализма метода и бесспорно способствуют “наглядности” получения его результирующих соотношений в любых их приближениях. Однако логическая простота изложения схемы метода отнюдь не сопровождается еще простотой математико-алгоритмических реализаций его приближений. Это иногда приводит к мнению о том, что в нетривиальных случаях лучевой метод нерационально применять иначе, чем в нулевом его приближении, так как еще совершенно не ясно, будут ли оправданы затраты на преодоление вычислительных затруднений при получении следующего приближения (т.е. приведут ли они действительно к более высокой точности и достоверности результатов).

Дело здесь еще усугубляется тем обстоятельством, что в практических расчетах всегда применяют (по необходимости) непрерывные представления базисных функций $f_n(t)$, в отличие от разрывных, которым, как раз, и обязана вся простота и изящество выводов формализма лучевого метода в его классическом варианте. При использовании же непрерывных базисных функций в лучевом методе утрачивается однозначность в построении амплитудных функций и, тем самым, утрачиваются остатки смысла слов: "очередное приближение лучевого метода." Поэтому представляется уместным уделить этому вопросу здесь некоторое внимание, причем его рассмотрение совместить с задачей об источниках волн в анизотропных упругих средах.

1. Пусть в безграничной упругой среде задана полость, ограниченная некоторой достаточно гладкой поверхностью (например, сферой) Σ_0 с внешней нормалью $\vec{m}(\alpha,\beta)$, где α и β – какие-либо криволинейные координаты точек на Σ_0. К полости (изнути) приложено внешнее воздействие, порождающее на ее границе Σ_0 или поле смещений $\vec{u}_0(\alpha,\beta,t)$, или поле напряжений $F_0(\alpha,\beta,t)$. Требуется определить поле смещений $\vec{u}(M,t)$ в упругой среде вне полости так, чтобы оно удовлетворяло уравнениям движения (3.4), нулевым начальным данным и одному из следующих граничных условий

$$\vec{u}\Big|_{\Sigma_0} = \vec{u}_0(\alpha,\beta,t) \tag{30.1}$$

или

$$\vec{t}_m[\,\vec{u}\,]\Big|_{\Sigma_0} = -\vec{F}_0(\alpha,\beta,t). \tag{30.2}$$

При этом в большинстве прикладных задач оказывается достаточным полагать

$$\vec{u}_0 = \vec{B}(\alpha,\beta)\widehat{f}(t), \quad \text{или} \quad \vec{F}_0 = \vec{B}(\alpha,\beta)\widehat{f}(t). \tag{30.3}$$

Предполагая, что для радиусов кривизны R поверхности полости и для доминирующих длин волн λ_r возбуждающихся полей еще выполняются неравенства вида $R \gg \lambda_r$. Обсудим схему решения сформулированных вспомогательных задач. При этом наш первый шаг в решении задач, естественно, должен сводиться к построению трех независимых семейств $\{l^{(r)}\}$ лучей (отвечающих волнам каждого из трех возможных типов r), берущих начало в точках $x_m = x_m^0(\alpha\beta)$ $(m = 1, 2, 3)$, поверхности Σ_0, которую целесообразно считать заданной в параметрической форме. Для построения каждого из семейств $\{l^{(r)}\}$ следует фиксировать значение r и выписать для него систему дифференциальных уравнений вида (27.7)–(27.9); затем нужно выписать начальные данные

$$x_m^{(r)}\Big|_{\tau=0} = x_m^0(\alpha,\beta), \quad p_m^{(r)}\Big|_{\tau=0} = \frac{n_m^0(\alpha,\beta)}{v_r(\alpha,\beta)}, \quad (m = 1, 2, 3), \qquad (30.4)$$

в которых $n_m^0(\alpha,\beta)$ – составляющие орта нормалей $\vec{n}^{(0)} \equiv \vec{m}$ к Σ_0, а $v_r(\alpha,\beta)$ – фазовая скорость волны рассматриваемого типа r, отвечающая орту $\vec{m}$, вычисленная для точки $x_m = x_m^0(\alpha,\beta)$ среды обычным образом. Наконец, необходимо проинтегрировать систему уравнений (27.7)–(27.9) при начальных условиях (30.4), что и приводит к функциям

$$x_m = x_m^{(r)}(\tau,\alpha,\beta), \quad p_m = p_m^{(r)}(\tau,\alpha,\beta), \quad (m = 1, 2, 3) \qquad (30.5)$$

типа (27.15), определяющим каждый луч из семейства $\{l^{(r)}\}$ в аналитической (или численной) форме. При этом будем считать, что в рассматриваемой области пространства, прилегающей к полости, лучи каждого из семейств $\{l^{(r)}\}$ образуют еще поле. Последнее, кстати говоря, необходимо для безоговорочного применения лучевого метода к решению рассматриваемых вспомогательных задач. При выполнении таких допущений обращение первой группы из трех соотношений (30.5) (при каждом фиксированном значении $r = 1, 2, 3$) приводит к выражениям

$$\tau = \tau^{(r)}(x_1,x_2,x_3), \quad \alpha = \alpha^{(r)}(x_1,x_2,x_3), \quad \beta = \beta^{(r)}(x_1,x_2,x_3) \quad (30.6)$$

лучевых координат ($\tau \equiv \tau_r$, $\alpha \equiv \alpha_r$, $\beta \equiv \beta_r$) семейства $\{l^{(r)}\}$ через исходные декартовы координаты x_k. Уравнение $\tau^{(r)}(x_1,x_2,x_3) = t$ определяет последовательные во времени положения фронта S_r волны типа r, связанной с семейством лучей $\{l^{(r)}\}$, причем уравнение $\tau^{(r)}(x_1,x_2,x_3) = 0$ (отвечающее значению $\tau = 0$ из (30.5) или (30.6) определяет поверхность Σ_0 полости. В точках $(\tau_r,\alpha_r,\beta_r)$ каждого луча семейства $\{l^{(r)}\}$ с фиксированным номером r можно считать известными значения

$$\vec{n}^{(r)}(\tau,\alpha,\beta), \quad \vec{A}^{(\rho)}(\tau,\alpha,\beta) \equiv \vec{A}^{(r,\rho)}, \quad (r = 1, 2, 3)$$

и т.д., орта нормалей к фронту S_r, векторов поляризации волн трех возможных типов $\rho = 1, 2, 3$, и т.д. При этом, в соответствии с (30.4) и (30.5), при $\tau \equiv \tau_r = 0$ выполняются равенства $\vec{n}^{(r)} = \vec{n}^{(0)}(\alpha, \beta)$, где $\vec{n}^{(0)} \equiv \vec{m}$ – орт нормалей к поверхности Σ_0 прямым следствием которых оказываются соотношения

$$\vec{\widehat{A}}^{(1,\rho)} = \vec{\widehat{A}}^{(2,\rho)} = \vec{\widehat{A}}^{(3,\rho)} \equiv \vec{\widehat{A}}^{(\rho)}(\alpha, \beta), \quad (\rho = 1, 2, 3). \tag{30.7}$$

Векторы из (30.7) при различных значках ρ удовлетворяют очевидным соотношениям ортогональности и нормировки

$$\left(\vec{\widehat{A}}^{(\rho)} \cdot \vec{\widehat{A}}^{(\widehat{\rho})}\right) = \delta_{\rho, \widehat{\rho}}, \quad (\rho, \widehat{\rho} = 1, 2, 3). \tag{30.8}$$

2. Решения сформулированных вспомогательных задач разыскиваются в виде наложения

$$\vec{u}(M, t) = \sum_{r=1}^{3} \vec{u}^{(r)}(M, t) \tag{30.9}$$

трех лучевых рядов

$$\vec{u}^{(r)}(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{V}^{(r,n)}(M) f_n \left[t - \tau^{(r)}(M)\right], \quad (r = 1, 2, 3), \tag{30.10}$$

в которых в первом приближении следует полагать

$$\vec{V}^{(r,0)} = \frac{c_0^{(r)}(\alpha, \beta)}{L_r(\tau, \alpha, \beta)} \vec{A}^{(r,r)}(\tau, \alpha, \beta),$$

$$\vec{V}^{(r,1)} = \frac{c_1^{(r)}(\alpha, \beta)}{L_r(\tau, \alpha, \beta)} \vec{A}^{(r,r)}(\tau, \dots) + \tag{30.10'}$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} a_k^{(r,1)}(\tau, \dots) \vec{A}^{(r,k)}(\tau, \dots).$$

Здесь $L_r(\tau, \alpha, \beta)$ обозначает геометрическое расхождение семейства лучей $\{l^{(r)}\}$ с номером r, а $c_0^{(r)}(\alpha, \beta)$ и $c_1^{(r)}(\alpha, \beta)$ – произвольные коэффициенты, значения которых должны быть определены в результате учета граничных условий на поверхности Σ_0 полости. Что же касается коэффициентов $a_k^{(r,1)}(\tau, \dots)$, то их значения однозначно определяются сразу же после того, как оказываются найденными значения коэффициентов $c_0^{(r)}(\alpha,\beta)$. Следует подчеркнуть, что под (τ,α,β) в $(30.10')$ подразумеваются лучевые координаты $(\tau_r,\alpha_r,\beta_r)$ поля лучей $\{l^{(r)}\}$, т.е. различные лучевые системы координат при разных значениях $r=1,2,3$. Однако при $\tau_r=0$ (т.е. в точках поверхности Σ_0) все они совпадают друг с другом, равно как совпадают друг с другом все векторы поляризации из (30.7).

В случае граничного условия вида (30.1), (30.3) неизвестные коэффициенты лучевых разложений из (30.10) должны определяться из векторного уравнения

$$\sum_{r=1}^{3}\frac{c_0^{(r)}}{L_r^0}\,\vec{\widehat{A}}^{(r)}f_0(t)+\sum_{r=1}^{3}\left[\frac{c_1^{(r)}}{L_r^0}\,\vec{\widehat{A}}^{(r)}+\sum_{r=1}^{3}a_k^{(r,1)}\,\vec{\widehat{A}}^{(k)}\right]f_1(t)+ \\ +\ldots=\vec{B}(\alpha,\beta)\,\widehat{f}(t). \tag{30.11}$$

Не задерживаясь на обсуждении подробностей лишь отметим, что в рамках “разрывного варианта” лучевого метода, когда функция $\widehat{f}(t)$ из (30.3) задается разложением такого же типа, что и лучевые разложения (30.11), т.е. представляется в виде

$$\widehat{f}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nf_n(t),\qquad \big(f_n'(t)=f_{n-1}(t)\big),$$

где $f_0(t)$ – некоторая элементарная (разрывная) функция (типа $\delta(t)$ или $\varepsilon(t)$), из соотношения (30.11) однозначно получается полная система алгебраических уравнений для всех неизвестных коэффициентов лучевых разложений из (30.9) и (30.10). При использовании же “прикладного варианта” лучевого метода, (в котором $f_0(t)$ реализуется в виде гладкой, но относительно высокочастотной функции, причем все разложение сводится лишь к первому слагаемому), естественно, речь может идти лишь о приближенной однозначности определения коэффициентов удерживаемых слагаемых лучевых разложений, т.е. об однозначности с точностью до порядка малости отбрасываемых слагаемых. Это легко может быть продемонстрировано на примере выписанных в (30.11) членов уравнения, учитывающего граничные условия задачи.

Вследствие соотношения $f_1'(t)=f_0(t)$, которым связаны функции от t из (30.11), нетрудно видеть, что неоднозначность в решении уравнения (30.11) проистекает из-за возможности представления заданной гладкой функции $\widehat{f}(t)$ из правой части различными способами в форме двух (непрерывных) слагаемых

$$\widehat{f}(t) = f(t) + \gamma \int\limits_0^t f(t) d\tau \equiv f_0(t) + \gamma f_1(t), \tag{30.12}$$

где

$$\gamma = \text{const}, \quad f_1'(t) = f_0(t).$$

При выяснении такого вопроса можно полагать, что функция $f(t)$, непрерывная сместе со своей первой производной при $t > 0$, равна нулю тождественно при $t < 0$. Тогда обращение равенства (30.12) дает

$$f(t) = \widehat{f}(t) - \gamma \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \widehat{f}(\tau) d\tau, \tag{30.12$'$}$$

причем выполняется соотношение

$$f_1(t) \equiv \int\limits_0^t f(\tau) d\tau = \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \widehat{f}(\tau) d\tau. \tag{30.13}$$

Предположим сначала, что функция $\widehat{f}(t)$ из правой части (30.11) имеет лучевую структуру (30.12) с такими же (непрерывными) функциями $f_0(t)$ и $f_1(t)$, как и функции из левой части (30.11). Тогда, в соответствии с принятой схемой рассмотрения лучевых разложений (получающей логическое обоснование лишь при "разрывных" функциях $f_n(t)$), учет граничных условий (30.11) приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{3} \frac{c_0^{(r)}}{L_r^0} \vec{\widehat{A}}^{(r)}(\alpha, \beta) = \vec{B}(\alpha, \beta), \\ \sum_{r=1}^{3} \left[\frac{c_0^{(r)}}{L_r^0} \vec{\widehat{A}}^{(r)}(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{3} a_k^{(r,1)} \vec{A}^{(k)}(\alpha, \beta) \right] = \gamma \vec{B}(\alpha, \beta), \end{gathered} \tag{30.14}$$

из которых, в силу условий ортонормировки (30.8), получаются равенства

$$
\begin{aligned}
&c_0^{(r)} = L_r^0\Big(\vec{B}\cdot\vec{\widehat{A}}^{(r)}\Big),\\
&c_1^{(r)} = \gamma L_r^0\Big(\vec{B}\cdot\widehat{A}^{(r)}\Big) - L_r^0\sum_{k=1}^{3} a_n^{)k,1)}(\alpha,\beta).
\end{aligned} \tag{30.15}
$$

При этом коэффициенты $a_k^{(r,a)}(\alpha,\beta)$ из $(30.10')$ здесь следует считать известными, так как значения $c_0^{(r)}(\alpha,\beta)$ уже определены.

На основании (30.15) и $(30.10')$ для рассматриваемых двух первых членов разложения (30.10) получается лучевое представление

$$
\begin{aligned}
\vec{u}^{(r)}(M,t) &= \frac{L_r^0(\vec{B}\cdot\vec{\widehat{A}^{(r)}})}{L_r}\,\vec{A}^{(r,r)}(\alpha,\beta)\,f_0\big[t-\tau^{(r)}(M)\big]+\\
&+\Bigg\{\frac{\gamma L_r^0(\vec{B}\cdot\vec{\widehat{A}^{(r)}})}{L_r}\,\vec{A}^{(r,r)}(\alpha,\beta) - \frac{L_r^0}{L_r}\sum_{k=1}^{3} a_r^{(k,1)}\,\vec{A}^{(r,r)}(\alpha,\beta)+\\
&+\sum_{k=1}^{3} a_r^{(r,1)}\,\vec{A}^{(r,k)}(\alpha,\beta)\Bigg\} f_1\big[t-\tau^{(r)}(M)\big],
\end{aligned} \tag{30.16}
$$

допускающее (путем объединения первых двух слагаемых) перезапись в виде

$$
\begin{aligned}
\vec{u}^{(r)}(M,t) &= \frac{L_r^0(\vec{B}\cdot\vec{\widehat{A}}^{(r)})}{L_r^0}\,\vec{A}^{(r,r)}(\alpha,\beta)\,\widehat{f}\,\big[t-\tau^{(r)}(M)\big]+\\
&+\Bigg\{\sum_{k=1}^{3} a_k^{(r,1)}\,\vec{A}^{(r,k)}(\alpha,\beta) - \frac{L_r^0}{L_r}\sum_{k=1}^{3} a_r^{(k,1)}\,\vec{A}^{(r,r)}(\alpha,\beta)\Bigg\}\times\\
&\times f_1\big[t-\tau^{(r)}(M)\big].
\end{aligned} \tag{30.17}
$$

Представление (30.16) сводится, очевидно, к первым двум членам (канонического) лучевого разложения функции $\vec{u}^{(r)}$ по функциям $f_0(t)$ и $f_1(t)$ из (30.12) (такого, как если бы эти функции были разрывными), связанным друг с другом соотношениями

$$
f_1'(t) = f_0(t), \quad \text{или} \quad f_1(t) = \int\limits_0^t f_0(\tau) f\tau.
$$

Представление же (30.17) (тождественно равное по величине представлению (30.16)) имеет структуру, похожую на лучевое разложение, в котором за основную функцию $f_0(t)$ (лучевого разложения) взята функция $\widehat{f}(t)$ из (30.12), а не первое ее слагаемое $f_0(t)$. При этом первый член правой части (30.17) имеет (канонически) правильный вид, а структура последующих ее слагаемых резко отличается от канонически правильного лучевого разложения. Это видно, хотя бы из связи между функциями $\widehat{f}(t)$ и $f_1(t)$ из правой части (30.17), сводящейся к равенству

$$\begin{aligned} f_1(t) = \int\limits_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \widehat{f}(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \int\limits_0^t (t-\tau)^n \widehat{f}(\tau) d\tau \equiv \\ \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-\gamma)^n \widehat{f}_{n+1}(t), \end{aligned} \qquad (30.18)$$

в котором (непрерывные) функции $\widehat{f}_{n+1}(t)$ удовлетворяют лучевым соотношениям

$$\widehat{f}'_{n+1}(t) = \widehat{f}_n(t), \quad (n \geqslant 1).$$

Изложенное уже показывает, что в "прикладном варианте" лучевого метода нулевое приближение приводит к логически оправданному ("правильному") результату. Последующие же приближения всегда содержат тот или иной произвол, лишающий их смысла "поправки к нулевому приближению". Поэтому применение последующих приближений метода в прикладном варианте лишено оснований.

3. Возвращаясь к решениям (в нулевом приближении лучевого метода) рассматриваемых вспомогательных задач о полости, видим, что в общем случае граничных условий (30.1), (30.2) решение представляется суммой (30.9) трех слагаемых вида

$$\vec{u}^{(r)}(M,t) = \frac{L_r^0(\vec{B} \cdot \vec{\widehat{A}}^{(r)}}{L_r(\tau,\dots)} \vec{A}^{(r,r)}(\tau,\dots) \widehat{f}\left[t - \tau^{(r)}(M)\right]. \qquad (30.19)$$

В частном же случае, когда распределение по границе Σ_0 полости задаваемого поля смещений $\vec{u}_0$ характериутся функцией

$$\vec{B}(\alpha,\beta) = \vec{\widehat{A}}^{(\rho)}(\alpha,\beta), \qquad (30.20)$$

где $\rho = 1,2,3$ – фиксировано (и только в этом случае), сумма (30.9) сводится к одному лишь слагаемому при $r = \rho$. При условии (30.20) воздействие (30.1), (30.3), прикладываемое к границе Σ_0 полости, возбуждает (в нулевом приближении лучевого метода) только лишь волны одного и того же типа $r = \rho$.

4. Во вспогательной задаче при граничном условии (30.2), (30.3), когда к поверхности Σ_0 полости прикладывается плотность $\vec{F}_0$ внешней силы, прежняя схема решения сохраняется полностью. Различие заключается лишь а том, что для учета граничных условий лучевые разложения (30.10), (30.10$'$) приходится подставлять в выражения

$$t_{mi} = \sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq} m_k \frac{\partial u_q}{\partial x_p}, \quad (i = 1,2,3)$$

для составляющих вектора напряжения на площадке с ортом нормали $\vec{m}$.

Нетрудно видеть, что в нулевом приближении это приводит к равенствам

$$t_{mi}^{(r)} = -\frac{c_0^{(r)}}{L_r(\tau,\dots)} \sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq} m_k \frac{\partial \tau^{(r)}}{\partial x_p} A_q^{(r,r)}(\tau,\dots) f_0'\big[t - \tau^{(r)}(M)\big],$$

в которых в соответствии с (30.7) следует полагать

$$A_q^{(r,r)}(\tau,\dots) = \hat{A}_q^{(r)}(\alpha,\beta), \qquad \frac{\partial \tau^{(r)}}{\partial x_p} = \frac{m_p(\alpha,\beta)}{v_r(\alpha,\beta)}, \qquad L_r(\tau,\dots) = L_r^0(\alpha,\beta)$$

при $\tau^{(r)} = 0$, т.е. в точках (α,β) границы Σ_0. Граничные же условия (30.2), (30.3) сводятся к системе уравнений

$$\sum_{r=1}^{3} b_{ir} c_0^{(r)} f_0'(t) = B_i \widehat{f}(t), \quad (i = 1,2,3), \quad f_0'(t) = f(t), \qquad (30.21)$$

в которой обозначено

$$b_{ir} = \frac{1}{L_r^0\, v_r} \sum_{k,p,q=1}^{3} c_{ik,pq} m_k m_p A_q^{(r)} = $$

$$= \frac{\rho(\alpha,\beta) v_r(\alpha,\beta)}{L_r^{)}(\alpha,\beta)} A_i^{(r)}(\alpha,\beta). \qquad (30.22)$$

Из (30.21) и (30.22) следует

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{\rho v_r}{L_r^0} c_0^{(r)} \vec{A}^{(r)}(\alpha, \beta) = \vec{B}(\alpha, \beta),$$

что приводит к равенству

$$c_0^{(r)} = \frac{L_r^{(0)}(\alpha, \beta)}{\rho(\alpha, \beta) v_r(\alpha, \beta)} \big(\vec{B} \cdot \vec{A}^{(r)}\big) \tag{30.23}$$

и к окончательному выражению

$$\vec{u}^{(r)}(M, t) = \frac{L_r^{(0)} \cdot \big(\vec{B} \cdot \vec{A}^{(r)}\big)}{\rho v_r L_r(\tau, \dots)} \vec{A}^{(r,r)}(\tau, \dots) f_0\big[t - \tau^{(r)}(M)\big] \tag{30.24}$$

для поля смещений в нулевом приближении лучевого метода. Этим как раз и заканчивается решение вспомогательной задачи для полости, на границе которой задан вектор напряжения из (30.2) и (30.3).

5. Как уже упоминалось, построение в приближениях лучевого метода решений вспомогательных задач для полости Σ_0 к границе которой прикладываются воздействия, не позволяет осуществлять переход к сосредоточенным источникам, так как для лучевого метода существенное значение имеет предположение о достаточно большой величине радиуса кривизны полости по сравнению со средней длиной волны изучаемого поля.

Однако в прикладном отношении прибегать к предельному переходу к сосредоточенным источникам, пожалуй, нет и физической необходимости. Ведь при мощном "сосредоточенном" реальном воздействии всегда возникают обширные области

$$|M - M_0| < R_0 \quad (R_0 \gg \lambda) \tag{30.25}$$

нелинейных (и "разрушительных") деформаций среды, в которых формализм теории упругости явно не применим. Поэтому рассмотрение источников волн в реальных средах целесообразно базировать на модельных соображениях, (окончательным) выводом из которых оказывается модель напряженного состояния среды в элементах некоторой поверхности Σ_0, расположенной в такой области, где напряженное состояние среды оказывается уже упругим.

В качестве результирующего акта примнения "модели воздействия" должно оказаться, например, что при включении в точке M_0 источника в некоторой области (30.25) формируется поле, вызывающее на границе Σ области (30.25) поле смещений или напряжений вида

$$(\vec{u}_0 \quad \text{или} \quad \vec{t}_2) = \frac{\vec{B}(\theta, \varphi)}{L_0} f(t), \tag{30.26}$$

продолжение которого вне области (30.25) производится в рамках нулевого приближения лучевого метода.

Заметим, наконец, что при указанном подходе к проблеме (достаточно полно учитывающем положение дел при сейсмических экспериментах) о типе воздействия следует судить по зависимости векторной функции "направленности источника" $\vec{B}(\theta, \varphi)$ из (30.26) от полярных углов θ и φ. В частности, в случае $\vec{B}(\theta, \varphi) = c\vec{r}/r_1$, где $c = \text{const}$ и $r = R_0$, источник следует называть центром давлений. При этом очевидно, что если волновое поле наблюдается на расстояниях, во много раз превосходящих R_0, то источник воспринимается как точечный.

Ограничившись такими замечаниями, обратимся в заключение к краткому предварительному обсуждению важнейшего вопроса для практической реализации лучевого метода, а именно к вопросу о вычислении геометрического расхождения пучков лучей волн в анизотропных упругих средах.

6. Как известно, даже в случае неоднородных изотропных сред общего вида проблема поиска оптимальных подходов к вычислению геометрического расхождения пучков лучей встречает значительные трудности (технического характера) и не может еще считаться окончательно решенной. В случае же анизотропных сред (вследствие зависимости скорости волн от направления их распространения) возникают существенные дополнительные затруднения, препятствующие, в частности, прямому переносу в новую область методов, разработанных применительно к случаям изотропии. Таким образом, разработку проблемы, связанной с вычислением геометрического расхождения пучка лучей волн в анизотропных средах, приходится начинать с самого начала, и в ней пока еще нет законченных результатов. Поэтому мы ограничимся здесь лишь общими соображениями относительно постановок задач и возможных подходов к их решению, а также обсудим положение дел в простейшем случае однородных анизотропных сред.

Что касается смысла понятия "геометрическое расхождение L", то его естественно определять в соответствии с формулой (7.33), в которой полагается $c_0(\alpha,\beta)=1$, т.е. формулой

$$L \equiv L(\alpha,\beta)\sqrt{\frac{|J(\tau,\alpha\beta)|}{\xi(\tau,\alpha\beta)}} = \sqrt{\frac{d\Sigma}{d\alpha\, d\beta}}. \tag{30.27}$$

Геометрическое расхождение $L(\tau,\alpha,\beta)$ принято относить к лучу $l_{\alpha\beta}$ с параметрами α, β из семейства лучей $\{l^{(r)}\}$, определяемых уравнениями кривых, совпадающими с первой группой уравнений из (27.15). При этом под функциями $x_m(\tau,\dots)$ и $p_m(\tau,\dots)$ из (27.15) подразумевается решение системы уравнений (27.7)–(27.9) для лучей, подчиненное начальным условиям Коши вида (27.12) или (27.14). Фактически же $L(\tau,\alpha,\beta)$ связано с пучком лучей, отвечающих параметрам α, β, изменяющимся в промежутках $(\alpha,\alpha+d\alpha)$ и $(\beta,\beta+d\beta)$, причем L^2 измеряется отношением площади $d\Sigma$ нормального поперечного сечения лучевой трубки к произведению $d\alpha\, d\beta$. Наконец, величины $\xi(\tau,\alpha,\beta)$ и $|J(\tau,\alpha,\beta)|$ из (27.31) обозначают значения в точках τ луча $L_{\alpha\beta}$ модулей лучевой скорости и функционального определителя из (27.20), т.е. определителя

$$J(\tau,\alpha,\beta) = \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(\tau,\alpha,\beta)} = \pm\big(\vec\rho_1\,[\,\vec\rho_2\times\vec\rho_3\,]\big) \tag{30.28}$$

(где $\vec\rho_k$ обозначают координатные векторы из (27.26) лучевой системы координат), отвечающего переходу от лучевых координат (τ,α,β) к декартовым (x_1,x_2,x_3).

Из (30.27) явствует, что в случаях, когда уравнения семейства лучей известны в форме аналитических выражений, вычисление L сводится к тривиальной (но всегда весьма громоздко реализуемой) задаче на дифференцирование функций $x_m(\tau,\alpha,\beta)$ из (30.5) по α и β и на выполнение алгебраических операций типа операций из правой части (30.28). Так обстоит дело, например, при рассмотрении в п. 7 однородных анизотропных сред. Однако подобные случае крайне редки, так как уравнения (30.5) для лучей изучаемой волны удается получать, как правило, лишь в численной форме.

Для нахождения приближенных значений L иногда выгодно прибегать к правой части формулы (30.27) и на основе численного изучения некоторого числа лучей из семейства $\{l^{(r)}\}$ с близкими значениями параметров α, β их (27.27) пытаться вычислить (или оценить) величину $d\Sigma/d\alpha\,d\beta$. Такой способ вычисления L приводит к результатам, достаточно точным в условиях практики в областях поля лучей, удаленных от его особых точек. При этом, если не стремиться к высокой точности в определении значений L, то он требует выполнения (сравнительно) не слишком больших объемов вычислений. Однако естественно искать и другие подходы к проблеме, в которых за достаточно высокую точность в определении значений L не приходилось бы платить слишком уж дорого.

По аналогии со случаем изотропных упругих сред можно надеяться разработать подобные подходы на основе системы уравнений в вариациях, получаемой из системы дифференциальных уравнений (27.7)–(27.9) для лучей путем почленного их дифференцирования по параметрам α и β. Уравнения в вариациях оказываются системой 12 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для такого же числа неизвестных функций $\partial x_m/\partial\alpha$, $\partial x_m/\partial\beta$, $\partial p_m/\partial\alpha$, $\partial p_m/\partial\beta$, $(m = 1, 2, 3)$. При этом начальные условия для таких функций легко получаются путем дифференцирования по α и β начальных данных (27.14).

Для нахождения упомянутых (неизвестных) функций в точках $\tau > 0$ луча $l_{\alpha\beta}$ (знание первых шести из которых уже позволило бы вычислять величину J из (30.28), а следовательно, и значение геометрического расхождения L из (30.27)) достаточно проинтегрировать численно вдоль луча упомянутую систему. К сожалению, это оказывается весьма трудоемкой операцией, требующей для своей реализации большого машинного времени, что в отличие от случая изотропных сред является следствием далеко не только большого числа уравнений в системе. Трудности вычислений оказываются в значительной мере обусловленными алгоритмической сложностью правых частей уравнений в вариациях, получающихся в результате дифференцирования по параметрам α и β правых частей уравнений (27.7)–(27.9) для лучей (которые приходится задавать не в аналитической, а в “алгоритмической” форме). Здесь необходимо искать каких-то упрощений, причем основное внимание следует уделять алгоритмической стороне дела.

Остается лишь отметить, что при расчете значений L приходится различать два типа задач. Во-первых, задачи на нахождение значений L (по начальным данным вида (27.14) в случае сред с достаточно гладкими упругими параметрами, обеспечивающими непрерывность функций $x_m(\tau, \alpha, \beta)$ из (27.14) вместе со всеми их частными производными первого порядка. И, во-вторых, задачи на изменение величины L при переходе через границу раздела двух сред. Задачи второго типа носят локальный характер и оказываются весьма близкими задачам на отражение-преломление волн.

7. В случае однородных анизотропных сред, когда $\lambda_{ik,pq} = \mathrm{const}$, уравнения (27.7)–(27.9) для лучей элементарно интегрируются (см. п. 12 §13), причем их решение, подчиненное начальным данным (27.14), имеет вид $p_m = \mathrm{const}$ и

$$x_m \equiv x_m(\tau, \alpha, \beta) = x^0(\alpha, \beta) + \tau\xi_m(\alpha, \beta), \tag{30.29}$$

где $\xi_m(\alpha, \beta)$ – составляющие лучевой скорости, вычисленные по значению орта нормали $\vec{n}^{\,0}(\alpha, \beta) \equiv \vec{m}(\alpha, \beta)$ из (27.14). Геометрическое расхождение лучей можно вычислять аналитически по формулам (30.27), (30.28), исходя из выражений

$$\frac{\partial x_m}{\partial \tau} = \xi_m(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} = \frac{\partial x_m^0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \tau\frac{\partial \xi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial x_m}{\partial \beta} = \frac{\partial x_m^0(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \tau\frac{\partial \xi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta}, \quad (m = 1, 2, 3), \tag{30.30}$$

в которых слагаемыми $\partial x_m^0/\partial\alpha$ и $\partial x_m^0/\partial\beta$ допустимо пренебрегать в случае достаточно больших значений τ. Таким образом, на больших расстояниях от замкнутой поверхности Σ_0, несущей начальные условия (27.2), геометрическое расхождение L имеет такой же вид, как и в случае точечного источника, фрагментарным рассмотрением которого мы здесь и ограничимся.

В случае точечного источника составляющие орта нормалей следует задавать в виде

$$n_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad n_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad n_3 = \cos\theta$$

через полярные углы θ и φ, полагая $\alpha = \theta$, $\beta = \sin\theta \cdot \varphi$ и $d\alpha = d\theta$, $d\beta = \sin\theta \cdot d\varphi$.

Составляющие лучевой скорости волны рассматриваемого типа τ

$$\xi_m^{(1)} = \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,mq}\, n_k\, A_1^{(1)}\, A_i^{(1)}\, \frac{1}{v_1}, \quad (m = 1,2,3) \tag{30.31}$$

(обозначаемой, как и в п. 2, для удобства записей значком 1 сверху вместо значка r), равно как и входящие в ее выражение величины $A_i^{(1)}$, v_1 и $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$, следует считать функциями двух независимых составляющих n_1 и n_2 орта нормалей. Поэтому оказывается

$$\begin{gathered}\frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial n_1} \cos\theta \cos\varphi + \frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial n_2} \cos\theta \sin\varphi, \\ \frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial n_1} \sin\varphi + \frac{\partial \xi_m^{(1)}}{\partial n_2} \cos\varphi,\end{gathered} \tag{30.32}$$

и все сводится к вычислению производных от $\xi_m^{(1)}$ по n_1 и n_2, представляющихся в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial n_1} = \frac{-1}{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial n_1} \xi_m^{(1)} + \frac{1}{v_1} \Bigg\{ \sum_{i,q=1}^{3} \left(\lambda_{i1,mq} - \frac{n_1}{n_3} \lambda_{i3,mq} \right) A_q^{(1)}\, A_i^{(1)} + \\ + \sum_{i,k,q=1}^{3} \lambda_{ik,mq} n_k \left[A_q^{(1)}\, \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial n_1} + A_i^{(1)} \frac{\partial A_q^{(1)}}{\partial n_1} \right] \Bigg\},\end{aligned} \tag{30.33}$$

и аналогично – для $\partial \xi_m^{(1)}/\partial n_2$. Величины v_1, $A_i^{(1)}$ и $\xi_m^{(1)}$ из правой части вычисляются (по значению $\vec{n}$) стандартным путем. Вопрос же о вычислении величин

$$\frac{\partial v_1}{\partial n_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_i^{(1)}}{\partial n_1} \equiv A_i'^{(1)}, \quad (i = 1,2,3) \tag{30.34}$$

необходимо сейчас обсудить.

Путем дифференцирования по n_1 выражения (27.5) при учете условия нормировки (27.2), умноженного на v_1^2 (в которых значек

r заменен на значек 1) находим

$$2v_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = 2 \sum_{ikq=1}^{3} \left(\lambda_{ik,1q} - \frac{n_1}{n_3} \lambda_{ik,3q} \right) n_k \, A_q^{(1)} \, A_i^{(1)}.$$

Отсюда следуют формулы

$$\frac{\partial v_1}{\partial n_1} = \xi_1^{(1)} - \frac{n_1}{n_3} \xi_3^{(1)}$$

или

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = - \sum_{i,q=1}^{3} l_{iq} \, A_q^{(1)} \, A_i^{(1)}, \qquad (30.35)$$

где обозначено

$$l_{iq} = \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{n_1}{n_2} \lambda_{ik,3q} - \lambda_{ik,1q} \right] n_k, \qquad (30.36)$$

выражающие $\partial v_1 / \partial n_1$ через известные величины $\xi_m^{(1)}$ и $a_i^{(1)}$.

Дифференцируя по n_1 систему уравнений (27.3) и условие нормировки (27.5), получаем для величин $A_i'^{(1)}$ из (30.34) алгебраическую систему уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^{3} \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q'^{(1)} - v_1^2 A_i'^{(1)} = \Phi_i^{(1)}, \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (30.37)$$

и дополнительное условие ортогональности

$$\sum_{i=1}^{3} A_i^{(1)} \, A_i'^{(1)} = 0.$$

При этом правые части системы (30.37), как нетрудно убедиться, представляются в виде

$$\Phi_i^{(1)} = -2 A_i^{(1)} \sum_{i,q=1}^{3} l_{iq} A_q^{(1)} \, A_i^{(1)} + \sum_{q=1}^{3} (l_{iq} + l_{qi}) A_q^{(1)}$$

через матрицу из (30.36).

Система уравнений (30.37) разрешима, так как очевидным образом выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{3} \Phi_i^{(1)} A_i^{(1)} = 0.$$

В наиболее важных случаях, когда выполняются неравенства

$$v_1^2 \neq v_2^2, \quad v_1^2 \neq v_3^2,$$

ее решение находится без труда и представляется формулой

$$A_i'^{(1)} = \frac{a_2}{v_2^2 - v_1^2} A_i^{(2)} + \frac{a_3}{v_3^2 - v_1^2} A_i^{(3)}, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{30.38}$$

где обозначено

$$a_k = \sum_{i,q=1}^{3} (l_{iq} + l_{qi}) A_q^{(1)} A_i^{(k)}, \quad (k = 2, 3).$$

Таким образом, оказывается, что все величины из правых частей формул (30.33) выражаются алгебраически несложным образом через известные величины. Это позволяет вычислять произвольные из (30.32) вполне корректно, но весь процесс их вычисления, а тем более вычисления L из (30.27) оказывается сравнительно громоздким в алгоритмическом отношении. И вот представляется, что (в рассматриваемом случае однородной среды) не следует пренебрегать возможностью вычисления L и по правой части формулы (30.27). Такой способ вычисления иногда (например, в случае трансверсально-изотропных сред) может оказаться практически наиболее эффективным. Едва ли нужно упоминать, что производные всех аналогичных величин по n_2 вычисляются аналогичным путем.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 ноября 2000 г.