Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

В. М. Бабич

О ПРИНЦИПЕ ВЗАИМНОСТИ ПРИ РАССЕЯНИИ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОНИЧЕСКОМ РАССЕИВАТЕЛЕ

Введение.

При падении плоской электромагнитной волны на идеально проводящий конус произвольной формы возникает рассеянное волновое поле, в состав которого входит наряду с волнами другой природы сферическая волна, рассеянная вершиной конуса. Характеристики этой волны зависят от направления в котором "наблюдается" рассеянная волна. Соответствующий дифракционный коэффициент сферической волны является своеобразным аналогом S-матрицы, играющей существенную роль в квантово-механических задачах рассеяния. Эти S-матрицы обладают свойствами взаимности (или по другой терминологии симметрии). Рассматриваемые в настоящей статье дифракционные коэфициенты тоже имеют такие свойства. Их вывод на "физическом" уровне математической строгости – цель настоящей работы.

1. Общая формулировка принципа взаимности в теории электромагнитных волн.

Приведём известную интегральную формулировку принципа взаимности для электромагнитных волн. Колебания мы будем считать установившимися: зависимость волновых полей и плотности тока от времени описывается множителем $e^{-i\omega t}$, где частота ω – положительная константа. Этот множитель мы будем опускать.

Пусть $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$, $\mathbf{j}''$ два комплексных решения уравнений Максвелла, где $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}''$ – соответственно электрический и магнитный векторы, удовлетворяющие на бесконечности "электромагнитному" варианту условий излучения, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{j}''$ – век-

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 99-01-00107.

торы плотности тока. Предполагается, что они отличны от нуля лишь в ограниченной части пространства. Рассеиватели мы предполагаем идеальными проводниками.

Введём скалярное произведение пары векторов с комплексными компонентами $\mathbf{W}' = (W_1',\ W_2',\ W_3')$ и $\mathbf{W}'' = (W_1'',\ W_2'',\ W_3'')$ формулой:

$$(\mathbf{W}', \mathbf{W}'') := W_j' W_j'' \tag{1.1}$$

(по повторяющимся индексам подразумеватся суммирование). Здесь скалярное произведение несколько необычно: второй сомножитель в сумме (1.1) берётся без комплексного сопряжения. Такое определение связано со спецификой рассматриваемой проблемы.

Под принципом взаимности мы будем подразумевать равенство

$$\iiint (\mathbf{E}', \mathbf{j}'')dx = \iiint (\mathbf{E}'', \mathbf{j}')dx \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3. \tag{1.2}$$

Интеграл распространен на всё пространство, занятое волновым полем. (Хорошо известное) равенство (1.2) нетрудно доказать с помощью интегрирования по частям.

2. Случай, когда и направление падения плоской волны ω'' и направление ω', в котором ведётся наблюдение, лежат вне конуса.

Если на конус Ξ вдоль направления $-\omega''$ $|\omega''| = 1$ падает плоская волна, то она порождает сферическую волну, характеризующуюся парой см. [1, 2] $\left\{ {\mathcal{E} \atop \mathcal{H}} \right\}$ векторов, где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\omega', \omega''),\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(\omega', \omega''),\ \mathcal{E} \perp \mathcal{H} \perp \omega' \quad |\omega'| = 1 \quad \omega' \times \mathcal{E} = \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

(Здесь ω' единичный вектор, характеризующий направление, в котором производится наблюдение.) Вектор $\mathcal{E}$ *один* характеризует рассеянную вершиной конуса волну, потому, что вектор $\mathcal{H}$ однозначно определяется по $\mathcal{E}$.

Рассмотрим теперь на сфере

$$S^2 = \{\omega : \omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1\}$$

классическую сферическую координатную систему θ, φ. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ соответствующие орты: $\mathbf{e}_1 = \vec{\theta}$, $\mathbf{e}_2 = \vec{\varphi}$, Предполагается, что

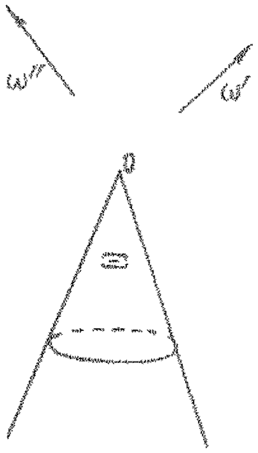

Рис. 1. Направления ω' и ω'' .

падающая на конус плоская волна $\mathbf{E}^{inc}$, $\mathbf{H}^{inc}$ распространяется по направлению $-\omega''$ $|\omega''| = 1$ и

$$\mathbf{E}^{inc} = E_j^{inc}\mathbf{e}_j(\omega''). \tag{2.2}$$

Электрический вектор рассеянной вершиной конуса сферической волна в направлении ω' в первом приближении равен

$$-2\pi\frac{e^{ik|OM'|}}{k|OM'|}\mathcal{E},$$

где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i^{sc}\mathbf{e}_i, \quad \mathcal{E}_i^{sc} = f_{ij}(\omega', \omega'')E_j^{inc}, \tag{2.3}$$

где коэффициенты $(f_{ij}(\omega, \omega_0))$, образуют тензорный (или матричный) дифракционный коэффициент.

Обратимся к принципу взаимности (1.2). Пусть падающее поле порождается током

$$\mathbf{j}'' = \mathbf{l}''\delta_{M''} = l_j''\mathbf{e}_j(\omega'')\delta_{M''}, \quad \frac{OM''}{|OM''|} = \omega'' \tag{2.4}$$

(здесь O – вершина конуса Ξ см. рис. 1., $\delta_{M''}$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке M'', l_j'' – произвольные фиксированные числа).

Пусть k – волновое число – отношение частоты к скорости света. Ток $\mathbf{j}'' = \mathbf{l}''\delta_{M''}$ породит волну, распространяющуюся вдоль прямой $M''O$. Пусть мы находимся в коротковолновой ситуации: расстояние $|M''O|$ гораздо больше длины волны (она равна $\frac{2\pi}{k}$) К точке O придёт волна, которую можно в первом приближении рассматривать как плоскую волну с электрическим вектором, равным $ik\mathbf{l}''\frac{e^{ik|M''O|}}{|M''O|}$. В точку M' вдоль прямой OM' придёт волна, в первом приближении имеющая выражение:

$$\mathbf{E}'' = -2\pi\frac{e^{ik|M''O|}}{|M''O|}\ \frac{e^{ik|OM'|}}{k|OM'|}\, ikl''_j f_{ij}(\omega', \omega'')\mathbf{e}_i(\omega'). \tag{2.5}$$

Поместим "взаимный" источник (линейную антенну), ток которого равен $\mathbf{l}'\delta_{M'} = l'_i\mathbf{e}_i(\omega')\delta_{M'}$, в точку M', $(\frac{OM'}{|OM'|} = \omega')$. Созданная этим током волна породит в точке M'' рассеянную точкой O волну

$$\mathbf{E}' = -2\pi\frac{e^{ik|M'O|}}{|M'O|}\ \frac{e^{ik|OM''|}}{k|OM''|}\, ikl'_i f_{ji}(\omega'', \omega')\mathbf{e}_j(\omega''). \tag{2.6}$$

Подставляя выражения для токов $\mathbf{j}'$, $\mathbf{j}''$ и волновых полей $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ в равенство (1.2), получим

$$l'_i f_{ji}(\omega'', \omega')l''_j = l''_j f_{ij}(\omega', \omega'')l'_i. \tag{2.7}$$

В силу произвольности l''_j, l'_i из последнего равенства следует, что

$$f_{ij}(\omega', \omega'') = f_{ji}(\omega'', \omega'). \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) и есть искомая симметрия матричного дифракционного коэффициента.

3. Принцип взаимности для случая, когда вектор ω' направлен вдоль образующей конуса Ξ. "Магнитная" волна.

Падающая на конус Ξ вдоль некасательного направления $-\omega''$ плоская волна породит волны – "магнитную" и "электрическую", распространяющиеся вдоль поверхности проводника. Электрический вектор "магнитной" волны в первом приближении ортогонален поверхности конуса Ξ, а волновой вектор ω', указывающий направление её распространения, направлен вдоль образующей конуса. Здесь будет выведено аналитичекое выражение для принципа взаимности в "магнитном" случае.

Пусть распространяющаяся по направлению $-\omega''\,|\omega''| = 1$ плоская волна с электрическим вектором (2.2) возбудит волну, распространяющуюся по направлению ω', где ω' вектор, направленный из вершины O конуса Ξ вдоль какой-либо его образующей. В точке M' $\left(\frac{OM'}{|OM'|)} = \omega'\right)$ в первом приближении электрический вектор $\mathbf{E}^{sc}$ этой волны равен:

$$\mathbf{E}^{sc} = -2\pi \mathcal{E}^{sc}\mathbf{n}\frac{e^{ik|OM'|}}{k|OM''|}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали к $\partial\Xi$ на образующей, направленной по ω'. Коэффициент $\mathcal{E}^{sc}$ линейно выражается через E_i^{inc}:

$$\mathcal{E}^{sc} = f_i^h(\omega', \omega'')E_i^{inc}. \tag{3.2}$$

Пусть теперь вдоль образующей, направленной вдоль вектора ω', идёт "магнитная" волна, в первом приближении вблизи точки O, равная

$$\mathbf{E}^{inc\prime} = 2\mathcal{E}^{inc}\mathbf{n}e^{ik|OM'|}, \tag{3.3}$$

и рассеивающаяся на вершине O конуса Ξ. (Двойка в формуле (3.3) обеспечивает более простой вид последующей формулы взаимности.) Рассеянная волна, пришедшая в точку $M'' \overline{\in} \Xi$, в первом приближении равна

$$-2\pi e^{ik|OM'|}\frac{e^{ik|OM''|}}{k|OM''|}\ \mathcal{E}^{sc}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathcal{E}^{sc}(\omega'', \omega') = \mathcal{E}^{sc}\, f_i^h(\omega', \omega'')\mathbf{e}_i(\omega''). \tag{3.5}$$

Наша ближайшая задача – нахождение связи между дифракционными коэффициентами $f_i^h(\omega'', \omega')$ и $f_i^h(\omega', \omega'')$, где ω' направлено вдоль образующей конуса Ξ, направление вектора ω'' лежит вне Ξ.

Для нахождения этой связи обратимся к принципу взаимности (1.2). Предположим, что волновое поле падающей волны создано током

$$\mathbf{j}'' = \mathbf{l}\delta_{M''} = l_i'' e_i(\omega'')\delta_{M''} \tag{3.6}$$

в точке M'' ($M''\overline{\in}\ \Xi\ \omega'' = \frac{OM''}{|OM''|}$). К точке O подойдёт волна, электрический вектор которой в первом приближении равен как и раньше

$$ikl_i''\mathbf{e}_i(\omega'')\frac{e^{ik|OM''|}}{|OM''|}.$$

Это волновое поле породит волну, распространяющуюся вдоль образующей конуса Ξ, идущей вдоль вектора ω', электрический вектор которой равен:

$$-2\pi ik\frac{e^{ik|OM''|}}{|OM''|}\ \frac{e^{ik|OM'|}}{k|OM'|}\,l_i''f_i^h(\omega',\omega'')\mathbf{n}. \tag{3.7}$$

Вертикальная антенна, слегка приподнятая над точкой $M'\in\Xi$ $\left(\frac{OM'}{|OM'|}=\omega'\right)$ с током $\mathbf{j}'=l'\mathbf{n}\delta_{M'}$ возбудит в частности идущую вдоль образующей $M'O$ волну, которая вблизи точки O равна в первом приближении

$$2l'ik\mathbf{n}\frac{e^{ik|M'O|}}{|M'O|}. \tag{3.8}$$

Рассеиваясь на вершине O конуса Ξ волна (3.8) породит сферическую волну. Её электрический вектор $\mathbf{E}^{sc\prime\prime}$ в точке $M''\overline{\in}\Xi$ в первом приближении будет равен:

$$\mathbf{E}^{sc\prime\prime}=-2\pi l'ik\frac{e^{ik|OM'|}}{|OM'|}\ \frac{e^{ik|OM''|}}{k|OM''|}f_i^h(\omega'',\omega')\mathbf{e}_i(\omega''). \tag{3.9}$$

Формула (1.2), применённая к волновым полям порождённым токами $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{j}''$, приводит к искомому принципу взаимности:

$$f_i^h(\omega'',\omega')=f_i^h(\omega',\omega'')\quad \omega''\ \overline{\in}\ \Xi. \tag{3.10}$$

Здесь вектор ω' направлен вдоль образующей конуса Ξ.

4. Принцип взаимности (ω' направлено вдоль образующей конуса Ξ, $\omega''\ \overline{\in}\ \Xi$. “Электрический” случай).

В рассматриваемом случае вектор электрической волны в первом приближении параллелен поверхности конуса, однако на самой поверхности он должен обращаться в ноль: касательная составляющая электрического вектора равна нулю на поверхности идеального проводника, поэтому в “электрическом” случае интересующим нас объектом будет нормальная производная касательной составляющей электрического вектора.

Перейдём к формулировке “электрического” варианта принципа взаимности. Падающая на конус Ξ плоская волна $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$ пусть такая же как в магнитном случае:

$$\mathbf{E}^{inc} = l_i''\mathbf{e}_i(\omega''). \tag{4.1}$$

Рассеиваясь на вершине конуса волна (4.1) породит волну, идущую по образующей конуса, направленной вдоль некоторого фиксированного вектора ω' $|\omega'| = 1$. Пусть точка M' лежит на этой образующей. Для нормальной производной касательной составляющей электрического вектора имеет место приближённая формула:

$$-2\pi ik\frac{e^{ik|OM'|}}{k|OM'|^2}\, l_i'' f_i^e(\omega', \omega'')\mathbf{s}_0. \tag{4.2}$$

Здесь $\mathbf{s}_0$ $|\mathbf{s}_0| = 1$ единичный вектор, ортогональный ω' и $\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к Ξ, $f_i^e(\omega', \omega'')$ – векторный “электрический” дифракционный коэффициент. Пусть теперь вдоль образующей OM' ($\frac{OM'}{|OM'|} = \omega'$) движется волна, электрический вектор которой с точностью до главных членов вблизи O равен:

$$\mathbf{E}' = \frac{e^{ik|OM'|}}{|OM'|^2}2ikn\mathbf{s}_0. \tag{4.3}$$

Здесь n расстояние по нормали до $\partial\Xi$, $\mathbf{s}_0$ – введённый ранее единичный вектор. Волна (4.3) рассеивается на точке O и по лучу OM'' в точку M'' придёт волна

$$-2\pi ik\frac{e^{ik|OM'|}}{|OM'|^2}\;\frac{e^{ik|OM''|}}{|OM''|k}\, f_i^e(\omega'', \omega')\mathbf{e}_i(\omega''). \tag{4.4}$$

Здесь $f_i^e(\omega''\omega')$ – соответствующий дифракционный коэффициент. Под принципом взаимности здесь мы понимаем равенство:

$$f_i^e(\omega', \omega'') = f_i^e(\omega'', \omega'). \tag{4.5}$$

Равенство (4.5) доказывается с помощью общего принципа (1.2). Вместо $\mathbf{j}''$ здесь можно взять

$$\mathbf{j}'' = l_i\mathbf{e}_i(\omega'')\delta_{M''}, \tag{4.6}$$

а вместо $\mathbf{j}'$ ток “двойной” рамочной антенны:

$$\mathbf{j}' = \frac{\partial}{\partial n}\,\mathrm{rot}(\mathbf{n}\delta_{M'}). \tag{4.7}$$

Здесь $\delta_{M''}$ и $\delta_{M'}$ соответственно дельта-функции, сосредоточенные в точках M'' и M'.

Литература

1. V. P. Smyshlyaev, *On the diffraction of waves by cones at high frequencies.* — Preprint, E-9-89 LOMI, Leningrad (1989).
2. V. P. Smyshlyaev, *The high-frequency diffraction of electromagnetic waves by cones of arbitrary cross-section.* — SIAM J. Appl. Math. **53**, (1993) 670–688.

Babich V. M. On the reciprocity principle in process of scattering of plane electromagnetic waves by a conic scatterer.

Let a plane electromagnetic wave scatters by an perfectly conducting cone. This diffractional process creates a spherical wave scattered by the cone vertex. The diffractional coefficients of this wave have some symmetry properties. Analytical expressions of them are deduced in the paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 ноября 2000 г.