Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

М. Белишев

ОБ УНИТАРНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{L_2}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, СВЯЗАННОМ С РАЗЛОЖЕНИЕМ ВЕЙЛЯ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

0. Введение

0.1. О работе. В статье [1], в рамках BC-метода, было введено преобразование M: "соленоидальное поле $\to$ поперечное поле". Образ My строился по разрывам, возникающим при проектировании поля y на расширяющееся семейство (цепочку) соленоидальных подпространств. Это преобразование играет центральную роль в динамической обратной задаче для системы Максвелла [3]; подробному описанию свойств M посвящена статья [2].

В настоящей работе мы дополняем M преобразованием N: "потенциальное поле $\to$ продольное поле". Образ Nh определяется разрывами, появляющимися при проектировании h на цепочку подпространств потенциальных полей. В определении и свойствах N прослеживается примечательная двойственность к M.

Оператор $U = M \oplus N$ и есть преобразование, о котором идет речь в заголовке. Свойства U, главным из которых является унитарность, и составляют содержание работы.

0.2. Область, пространства, проекторы.

Геометрию задачи определяют область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и неотрицательная функция (эйконал) τ, непрерывная в $\overline{\Omega}$, гладкая вне точки $x_0 \in \Omega$ и невырожденная: $|\nabla\tau| \neq 0$ в $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, такая, что $\Gamma := \partial\Omega = \{x \in \overline{\Omega} | \tau(x) = 0\}$. Мы обозначаем $\Omega^\xi := \{x \in \Omega | \tau(x) < \xi\}$, $\Gamma^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = \xi\}$, $\xi > 0$; $T_* := \max\limits_{\Omega} \tau$.

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00107.

Эйконал определяет поле нормалей $\nu := |\nabla\tau|^{-1}\nabla\tau$ к поверхностям Γ^ξ. Пространство векторных полей $\mathcal{H} := L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ можно представить в виде суммы $\mathcal{H} = \mathcal{L}_\theta \oplus \mathcal{L}_\nu$, в которой $\mathcal{L}_\theta := \{v \in \mathcal{H} \mid y \cdot \nu = 0\}$ и $\mathcal{L}_\nu := \{u \in \mathcal{H} \mid y \times \nu = 0\}$ суть (под)пространства поперечных и продольных полей.

Пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде разложения Вейля $\mathcal{H} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{G}$, в котором $\mathcal{J} := \{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} y = 0\}$ и $\mathcal{G} := \{h \in \mathcal{H} \mid h = \nabla\varphi, \varphi \in H^1(\Omega),\ \varphi\big|_\Gamma = 0\}$ суть (под)пространства соленоидальных и потенциальных полей.

В $\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$ выделены цепочки подпространств $\mathcal{J}^\xi := \{y \in \mathcal{J} \mid \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}^\xi\}$, $\mathcal{G}^\xi := \{h \in \mathcal{G} \mid \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega}^\xi\}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T_*$; эти цепочки исчерпывают $\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$. Пусть P^ξ и Q^ξ суть проекторы в $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}^\xi$ и в $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^\xi$ соответственно. Действие проекторов приводит к появлению разрывов на поверхности Γ^ξ, причем поле $P^\xi y\big|_{\Gamma^{\xi-0}}$ оказывается касательным, а поле $Q^\xi h\big|_{\Gamma^{\xi-0}}$ нормальным к Γ^ξ.

0.3. Содержание. Введем преобразование $M : \mathcal{J} \to \mathcal{L}_\theta$,

$$My := P^\xi y\Big|_{\Gamma^{\xi-0}} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*$$

и преобразование $N : \mathcal{G} \to \mathcal{L}_\nu$,

$$Nh := Q^\xi h\Big|_{\Gamma^{\xi-0}} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*.$$

В [2] показано, что M есть унитарный оператор; в настоящей работе мы дополняем этот результат доказательством унитарности N.

Пусть $t : \mathcal{L}_\theta \to \mathcal{H}$, $l : \mathcal{L}_\nu \to \mathcal{H}$, $j : \mathcal{J} \to \mathcal{H}$ и $g : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ суть естественные вложения. Преобразование $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $U := tMj^* + lNg^*$ оказывается унитарным; оно отображает $\mathcal{J}$ на $\mathcal{L}_\theta$ и $\mathcal{G}$ на $\mathcal{L}_\nu$.

В п. 1 излагаются вспомогательные результаты. В п. 2 дается новое доказательство унитарности преобразования M. В п. 3 вводится преобразование N и устанавливается его унитарность. В заключении свойства M и N резюмируются результатом об унитарности U.

1. Область и пространства

1.1. Разложение Вейля. Пусть Ω есть ограниченная область в

$\mathbb{R}^3$; обозначим

$$\mathcal{H} := L_2(\Omega, \mathbb{R}^3);$$
$$\mathcal{J} := \{y \in \mathcal{H} \mid \operatorname{div} y = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\};$$
$$\mathcal{G} := \{h \in \mathcal{H} \mid h = \nabla\varphi, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)\};$$

$\mathcal{J}$ и $\mathcal{G}$ суть (под)пространства соленоидальных и потенциальных векторных полей. Справедливо равенство

$$\mathcal{H} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{G}, \tag{1.1}$$

известное как разложение Вейля (см., например, [4, 5]).

1.2. Область. В наших рассмотрениях на область Ω накладывается весьма жесткое ограничение. Именно, мы предполагаем, что в Ω существует функция (эйконал) $\tau = \tau(x)$ со свойствами:

(i) $\tau \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{x_0\})$, где $x_0 \in \Omega$; $\tau \geqslant 0$; $\tau = 0$ на границе $\Gamma := \partial\Omega$;

(ii) $\nabla\tau \neq 0$ в $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, так что x_0 – единственная критическая точка τ; при этом $\max\limits_{\Omega} \tau = \tau(x_0) =: T_*$.

Пример: Ω – область, C^∞-диффеоморфная шару.

Подобласти

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \xi\}, \quad 0 < \xi \leqslant T_*$$

расширяются с ростом ξ. Множества уровня

$$\Gamma^* := \{x \in \overline{\Omega} \mid \tau(x) = \xi\}, \quad 0 \leqslant \xi < T_*$$

суть гладкие поверхности; $\Gamma^0 = \Gamma$; $\Gamma^{T_*} = \{x_0\}$.

Скажем, что поле $u \in \mathcal{H}$ является кусочно-гладким (по ξ), если найдется разбиение $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Omega_j : \Omega_j := \{x \in \Omega \mid \xi_{j-1} < \tau(x) \leqslant \xi_j\}$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = T_*$ такое, что u гладкое* в каждом из Ω_j.

1.3. Поперечные и продольные поля. Поле

$$\nu := \frac{\nabla\tau}{|\nabla\tau|}$$

*всюду в работе под гладкостью понимается C^∞-гладкость вплоть до границы определено в $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$; оно определяет разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_\theta \oplus \mathcal{L}_\nu, \tag{1.2}$$

в котором

$$\mathcal{L}_\theta := \big\{ v \in \mathcal{H} \mid v \cdot \nu = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega \big\};$$

$$\mathcal{L}_\nu := \big\{ w \in \mathcal{H} \mid w \times \nu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \big\};$$

суть (под)пространства поперечных и продольных (по отношению к ν) полей. Разложению (1.2) отвечает представление поля $y \in \mathcal{H}$

$$y = y_\theta + y_\nu,$$

где $y_\nu := y^\nu \nu$, $y^\nu := y \cdot \nu$, $y_\theta := y - y_\nu$.

В пространствах $\mathcal{L}_\theta$ и $\mathcal{L}_\nu$ выделены расширяющиеся семейства (*цепочки*) подпространств

$$\mathcal{L}_\theta^\xi := \big\{ v \in \mathcal{L}_\theta \mid \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}^{\,\xi} \big\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*;$$

$$\mathcal{L}_\nu^\xi := \big\{ w \in \mathcal{L}_\nu \mid \operatorname{supp} w \subset \overline{\Omega}^{\,\xi} \big\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*.$$

1.4. Лемма о дифференцировании. Следующий простой, но важный результат мы используем при доказательстве изометричности преобразований. Обозначим $c := |\nabla \tau|^{-1}$.

Лемма 1. *Пусть $\xi \in (0, T_*)$ фиксировано; для гладкости поля y : $\operatorname{div} y = 0$ в Ω^ξ и гладкой в Ω^ξ функции φ : $\varphi\big|_\Gamma = 0$ при $0 < \tau < \xi$ выполнено соотношение*

$$\int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \, c\, y \cdot \nabla \varphi = \frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \, y^\nu \varphi. \tag{1.3}$$

Доказательство. Имеем равенства

$$\int\limits_0^\tau ds \int\limits_{\Gamma^s} d\Gamma^s \, c\, y \cdot \nabla \varphi = \int\limits_{\Omega^\tau} dx \, y \cdot \nabla \varphi = \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau y^\nu \varphi.$$

Дифференцируя, получаем (1.3). Лемма доказана.

1.5. Эллиптические задачи. Нам понадобится ряд простых фактов эллитической теории.

Пусть $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta = 0$ в окрестности x_0; рассмотрим семейство задачи

$$\Delta q = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)^k q = \eta \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi; \tag{1.5}$$

$$q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{1.6}$$

$k = 0, 1$; $\xi \in (0, T_*)$. При каждом k и ξ имеем решение $q = q_k^\xi \in C^\infty(\overline{\Omega}^\xi)$; как функция от x, ξ, оно определено и является гладким в области $\{(x,\xi) \mid 0 \leqslant \tau(x) \leqslant \xi \leqslant T_*\}$; при этом

$$\Delta \frac{\partial q_k^\xi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial q_k^\xi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.8}$$

С семейством задач (1.4)–(1.6) связан *оператор Кальдерона* $\Lambda : C^\infty(\Omega \setminus \{x_0\}) \to C^\infty(\Omega \setminus \{x_0\})$, образ которого на функции η определяется “послойным” правилом

$$\Lambda \eta := q_1^\xi \Big|_{\Gamma^{\xi - 0}} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*; \tag{1.9}$$

обратный к нему действует по правилу

$$\Lambda^{-1} \eta = \frac{\partial q_0^\xi}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma^{\xi - 0}} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*,$$

где q_0^ξ, q_1^ξ суть решения (1.4)–(1.6), определяемые прообразом η.

2. Преобразование M

2.1. Подпространства и проекторы. В пространстве соленоидальных полей $\mathcal{J}$ выделим цепочку подпространств

$$\mathcal{J}^\xi := \{y \in \mathcal{J} \mid \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}^\xi\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*;$$

отметим изветные свойства их элементов [5].

Предложение 1. *Пусть* $\xi \in (0, T_*)$ *фиксировано;*

(i) *след* $y\big|_{\Gamma^\xi - 0}$ *поля* $y \in \mathcal{J}^\xi$ *гладкого в* Ω^ξ *есть поле, касательное к* Γ^ξ*;*

(ii) *любое гладкое касательное поле на* Γ^ξ *есть след поля из* $\mathcal{J}^\xi$*, гладкого в* Ω^ξ*.*

Множество гладких полей $\mathcal{J} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{J}$ [5].

Пусть P^ξ есть (ортогональный) проектор в $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}^\xi$. Можно показать, что семейство P^ξ непрерывно:

$$\operatorname*{s-lim}_{\tau \to \xi} P^\tau = P^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*; \quad P^0 = \mathbb{O}_{\mathcal{J}}; \quad P^{T_*} = \mathbb{1}_{\mathcal{J}}.$$

Опишем представление для P^ξ. Выберем гладкое поле $y = y_\theta + y_\nu = y_\theta + y^\nu \nu \in \mathcal{J}$, фиксируем $\xi \in (0, T_*)$ и рассмотрим задачу

$$\Delta p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{2.1}$$

$$\left(\nabla p\right)_\nu = y_\nu \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi; \tag{2.2}$$

$$p = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{2.3}$$

Условие (2.2) равносильно условию Неймана $\frac{\partial p}{\partial \nu} = y^\nu$, так что эта задача – частный случай (1.4)–(1.6). Ее решение $p = p^\xi(x)$ – гладкая в $\overline{\Omega}^\xi$ функция.

Предложение 2. *Справедливо представление*

$$P^\xi y = \begin{cases} y - \nabla p^\xi & \text{в} \quad \Omega^\xi; \\ 0 & \text{в} \quad \Omega \setminus \Omega^\xi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Проверить (2.4) несложно (см., например, [2]). Отметим важное обстоятельство: поле $P^\xi y$, вообще говоря, разрывно на Γ^ξ, причем разрыв $P^\xi y\big|_{\Gamma^\xi - 0}$ есть поле, *касательное* к Γ^ξ:

$$P^\xi y\Big|_{\Gamma^\xi - 0} = \Big[y_\theta + y_\nu - \left(\nabla p^\xi\right)_\theta - \left(\nabla p^\xi\right)_\nu\Big]\Big|_{\Gamma^\xi} = \langle \text{см.}(2.2) \rangle =$$

$$= \Big[y_\theta - \left(\nabla p^\xi\right)_\theta\Big]\Big|_{\Gamma^\xi}. \tag{2.5}$$

2.2. Определение и представление. Введем преобразование $M : \mathcal{J} \to \mathcal{L}_\theta$, $\operatorname{Dom} M = \mathcal{J} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ по правилу

$$My := P^\xi y\Big|_{\Gamma^\xi - 0} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*$$

(образ My составляется из разрывов, возникающих на поверхностях Γ^ξ при проектировании y на $\mathcal{J}^\xi$). Корректность этого определения (вложение $\operatorname{Ran} M \subset \mathcal{L}_\theta$) мы проверим ниже.

Согласно (2.5), для $y = y_\theta + y_\nu = y_\theta + y^\nu \nu$ имеем представление

$$My = y_\theta - \left(\nabla p^\xi\right)_\theta \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*. \tag{2.6}$$

Привлекая оператор Кальдерона и вводя "поперечный" градиент $\nabla_\theta := \left[\nabla(\,\cdot\,)\right]_\theta$, от послойного представления можно перейти к представлению в Ω:

$$My = y_\theta - \nabla_\theta \Lambda y^\nu. \tag{2.7}$$

2.3. Изометричность. Корректность определения и изометричность M будут извлечены из следующего вспомогательного результата.

Лемма 2. *Для гладких y, $w \in \mathcal{J}$ справедливо соотношение:*

$$\frac{d}{d\xi}\left(P^\xi y, P^\xi w\right)_{\mathcal{J}} = \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, c\, P^\xi y\Big|_{\Gamma^\xi - 0} \cdot P^\xi w\Big|_{\Gamma^\xi - 0}, \quad 0 < \xi < T_*. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $p = p^\xi$ и $p = q^\xi$ суть решения задач (2.1)–(2.3) с правыми частями в (2.2), равными y_ν и w_ν соответственно. Обозначая через I^ξ интеграл в (2.8), имеем:

$$\frac{d}{d\xi}\left(P^\xi y, P^\xi w\right)_{\mathcal{J}} = \langle \text{см.}(2.4)\rangle =$$

$$= \frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\, c\left(y - \nabla p^\xi\right)\cdot\left(w - \nabla q^\xi\right) =$$

$$= I^\xi + \int\limits_0^\xi d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\, c\left[-y\cdot\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi} - \nabla\frac{\partial p^\xi}{\partial\xi}\cdot w + \right.$$

$$\left. + \nabla\frac{\partial p^\xi}{\partial\xi}\cdot\nabla q^\xi + \nabla p^\xi\cdot\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi}\right] =$$

$$= \langle(\text{см.}(1.3)\rangle = I^\xi + \int\limits_0^\xi d\tau \frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\left[\left(-y^\nu + \frac{\partial p^\xi}{\partial\nu}\right)\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi} + \right.$$

$$+\frac{\partial p^\xi}{\partial \xi}\left(-w^\nu+\frac{\partial q^\xi}{\partial \xi}\right)\Big] = \langle \text{см.}(1.8),(2.2)\rangle = I^\xi.$$

Лемма доказана.

Интегрируя (2.8) с учетом определения N, имеем

$$\Big(\Big(P^{T_*-\delta}-P^\delta\Big)y,w\Big)_{\mathcal{J}} = \int\limits_{\delta}^{T_*-\delta} d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, c\, My\cdot Mw =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{T_*-\delta}\setminus\Omega^\delta} dx\ My\cdot Mw.$$

Устремляя $\delta\to 0$, убеждаемся, что My и Mw суть квадратично суммируемые поля, т.е. $\operatorname{Ran} M\subset\mathcal{L}_\theta$. Одновременно, по непрерывности P^ξ получаем

$$\big(y,w\big)_{\mathcal{J}} = \big(My,Mw\big)_{\mathcal{L}_\theta}, \tag{2.9}$$

т.е. M – изометрия.

Расширим M по непрерывности на все $\mathcal{J}$, за расширением сохраним обозначение “M”. Благодаря послойному характеру, представления (2.6), (2.7) очевидным образом переносятся на кусочно-гладкие y (см. конец п. 1.2); при этом оказывается полезным следующий результат.

Лемма 3. *Для $\xi\in(0,T_*)$ и поля $y\in\mathcal{J}^\xi$, гладкого в Ω^ξ выполнено соотношение*

$$My\Big|_{\Gamma^\xi-0} = y\Big|_{\Gamma^\xi-0}. \tag{2.10}$$

Доказательство. По свойству (i) предложения 1 имеем $y_\nu\big|_{\Gamma^\xi-0}=0$. В силу этого, для решения задачи (2.1)–(2.3) имеем $p^\xi\equiv 0$. Из последнего, по (2.6) получаем (2.10). Лемма доказана.

Отметим также соотношение

$$My\Big|_{\Gamma+0} = y_\theta\Big|_{\Gamma},$$

установленное в [3].

2.4. Полнота. Здесь мы покажем, что M действует *на* $\mathcal{L}_\theta$.

Начнем со вспомогательного результата. Пусть X^ξ есть проектор в $\mathcal{L}_\theta$ на $\mathcal{L}_\theta^\xi$ (см. п. 1.3); его действие сводится к срезке поля на подобласть Ω^ξ.

Лемма 4. *Справедливо соотношение*

$$MP^\xi = X^\xi M, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*. \tag{2.11}$$

Доказательство. Фиксируем $\xi \in (0, T_*)$, возьмем произвольное гладкое $y \in \mathcal{J}$ и отметим равенства

$$P^\xi P^\tau = P^\tau P^\xi = P^{\min\{\xi,\tau\}}.$$

При $\tau < \xi$ имеем:

$$MP^\xi y\Big|_{\Gamma^\tau} = P^\tau P^\xi\Big|_{\Gamma^{\tau-0}} = P^\tau y\Big|_{\Gamma^{\tau-0}} = My\Big|_{\Gamma^\tau}; \tag{2.12}$$

при $\tau > \xi$ имеем:

$$MP^\xi y\Big|_{\Gamma^\tau} = P^\tau P^\xi y\Big|_{\Gamma^{\tau-0}} = P^\xi y\Big|_{\Gamma^{\tau-0}} = 0 \tag{2.13}$$

поскольку $\operatorname{supp} P^\xi y \subset \overline{\Omega}^\xi \subset \Omega^\tau$.

Сопоставляя (2.12) с (2.13), получаем $MP^\xi y = X^\xi My$, что ведет к (2.11). Лемма доказана.

Как следствие (2.11), имеем вложение

$$X^\xi \operatorname{Ker} M^* \subset \operatorname{Ker} M^*, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*. \tag{2.14}$$

Установим полноту M.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Ran} M = \mathcal{L}_\theta. \tag{2.15}$$

Доказательство. Проверим эквивалентное соотношение $\operatorname{Ker} M^* = \{0\}$.

Пусть $m \in \operatorname{Ker} M^*$; фиксируем $\xi_0 \in (0, T_*)$. Выберем поле $y \in \mathcal{J}^{\xi_0}$, гладкое в Ω^{ξ_0}. При $\xi < \xi_0$ имеем:

$$0 = \langle \text{см.}(2.14) \rangle = \big(My, X^\xi m\big)_{\mathcal{L}_\theta} = \int\limits_0^\xi d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \, c\,\widetilde{y} \cdot m,$$

где $\widetilde{y} := My$. Дифференцируя и полагая $\xi = \xi_0 - 0$, получаем:

$$0 = \int\limits_{\Gamma^{\xi_0}} d\Gamma^{\xi_0} \, c\,\widetilde{y} \cdot m = \langle \text{см.}(2.10) \rangle = \int\limits_{\Gamma^{\xi_0}} d\Gamma^{\xi_0} \, c\, y \cdot m.$$

По свойству (ii) предложения 1 получаем $m = 0$ на Γ^{ξ_0}; произвольность ξ_0 влечет $m = 0$ в Ω. Лемма доказана.

Резюмируя содержание п. 2, получаем основной результат.

Теорема 1. *Преобразование M есть изометрия $\mathcal{J}$ на $\mathcal{L}_\theta$.*

3. Преобразование N

3.1. Подпространства и проекторы. В пространстве потенциальных полей $\mathcal{G}$ выделм цепочку подпространств

$$\mathcal{G}^\xi := \left\{h \in \mathcal{G} \mid \operatorname{supp} h \subset \overline{\Omega}^\xi\right\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*;$$

отметим некоторые свойства их элементов.

Предложение 3. *Пусть $\xi \in (0, T_*)$ фиксировано;*

(i) *след $h\Big|_{\Gamma^\xi - 0}$ поля $h \in \mathcal{G}^\xi$ гладкого в Ω^ξ есть поле, нормальное к Γ^ξ;*

(ii) *любое гладкое нормальное поле на Γ^ξ есть след поля из $\mathcal{G}^\xi$, гладкого в Ω^ξ.*

Множество гладких полей $\mathcal{G} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ плотно в $\mathcal{G}$.

Пусть Q^ξ есть проектор в $\mathcal{G}$ на $\mathcal{G}^\xi$. Можно показать, что семейство Q^ξ непрерывно:

$$\operatorname*{s-lim}_{\tau \to \xi} Q^\tau = Q^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*; \quad Q^0 = \mathbb{O}_{\mathcal{G}}; \quad Q^{T_*} = \mathbb{1}_{\mathcal{G}}.$$

Опишем представление для Q^ξ. Выберем гладкое поле $h = h_\theta + h_\nu = \nabla\varphi = (\nabla\varphi)_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu \in \mathcal{G}$, фиксируем $\xi \in (0, T_*)$ и рассмотрим задачу

$$\Delta r = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi; \tag{3.1}$$

$$\big(\nabla r\big)_\theta = h_\theta \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi; \quad \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, \nabla r \cdot \nu = 0; \tag{3.2}$$

$$r = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.3}$$

Первое из условий (3.2) равносильно соотношению

$$r = \varphi + \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi; \tag{3.4}$$

по второму однозначно находится постоянная в (3.4). Из сказанного следует, что задача (3.1)–(3.3) разрешима единственным образом; ее решение $r = r^\xi(x)$ есть гладкая в Ω^ξ функция.

Предложение 4. *Справедливо представление*

$$Q^\xi h = \begin{cases} h - \nabla r^\xi & \textit{в} \quad \Omega^\xi; \\ 0 & \textit{в} \quad \Omega \setminus \Omega^\xi. \end{cases} \tag{3.5}$$

Проверка (3.5) несложна и мы ее опускаем. Отметим важный факт: поле $Q^\xi h$, вообще говоря, разрывно на Γ^ξ, причем разрыв $Q^\xi h\Big|_{\Gamma^\xi - 0}$ есть поле, *нормальное* к Γ^ξ:

$$\begin{aligned} Q^\xi h\Big|_{\Gamma^\xi - 0} &= \langle \text{см.}(3.5)\rangle = \big(h - \nabla r^\xi\big)\Big|_{\Gamma^\xi} = \\ &= \langle \text{см.}(3.2)\rangle = h_\nu - \big(\nabla r^\xi\big)_\nu. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2. Определение и представление. Введем преобразование $N : \mathcal{G} \to \mathcal{L}_\nu$, $\operatorname{Dom} N = \mathcal{G} \cap C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ по правилу

$$Nh := Q^\xi h\Big|_{\Gamma^\xi - 0} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*$$

(образ Nh составляется из разрывов, появляющихся на поверхностях Γ^ξ при проектировании h на $\mathcal{G}^\xi$). Проверку корректности этого определения (вложения $\operatorname{Ran} Nh \subset \mathcal{L}_\nu$) отложим до п. 3.3.

Согласно (3.6), для $h = h_\theta + h_\nu$ имеем послойное предствление

$$Nh = h_\nu - \big(\nabla r^\xi\big)_\nu = h_\nu - \left(\frac{\partial r^\xi}{\partial \nu}\Bigg|_{\Gamma^\xi}\right)\nu \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*. \tag{3.7}$$

С семейством задач (3.1)–(3.3) свяжем оператор $\nabla_\theta^{-1} : \mathcal{L}_\theta \to L_2(\Omega)$, действующий на поперечные компоненты h_θ гладких полей $h \in \mathcal{G}$ по правилу:

$$\nabla_\theta^{-1} h_\theta := r^\xi \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi, \quad 0 < \xi < T_*;$$

как нетрудно проверить, $\nabla_\theta \nabla_\theta^{-1} = \mathrm{id}$. Используя оператор Кальдерона (см. п. 1.5), представление (3.7) можно записать в форме

$$Nh = h_\nu - \Big(\Lambda^{-1} \nabla_\theta^{-1} h_\theta\Big)\nu, \tag{3.8}$$

подчеркивающей двойственность к (2.7).

3.3. Изометричность. Корректность определения и изометричность N последуют из приводимого ниже вспомогательного результата.

Лемма 6. *Для гладких $h,\, g \in \mathcal{G}$ справедливо соотношение*

$$\frac{d}{d\xi}\Big(Q^\xi h, Q^\xi g\Big)_{\mathcal{G}} = \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, c\, Q^\xi h\big|_{\Gamma^{\xi-0}} \cdot Q^\xi g\big|_{\Gamma^{\xi-0}}, \quad 0<\xi<T_*. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $h = \nabla\varphi$, $g = \nabla\psi$; r^ξ и q^ξ суть решения задачи (3.1)–(3.3) с правыми частями в (3.2), равными h_θ и g_θ соответственно; отметим соотношения

$$r^\xi = \varphi + \mathrm{const}, \quad q^\xi = \psi + \mathrm{const} \quad \text{на} \quad \Gamma^\xi \tag{3.10}$$

(см. (3.4)). Обозначая через I^ξ интеграл в (3.9), имеем:

$$\frac{d}{d\xi}\Big(Q^\xi h, Q^\xi g\Big)_{\mathcal{G}} = \langle \text{см.}(3.5)\rangle =$$

$$\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau\, c\left(\nabla\varphi - \nabla r^\xi\right)\cdot\left(\nabla\psi - \nabla q\right)^\xi =$$

$$= I^\xi + \int\limits_0^\xi d\tau d\Gamma^\tau\, c\left[-\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi} - \nabla\frac{\partial r^\xi}{\partial\xi}\cdot\nabla\psi + \nabla\frac{\partial r^\xi}{\partial\xi}\cdot\nabla q^\xi + \nabla r^\xi\cdot\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi}\right] =$$

$$= \langle\text{см.}(1.3)\rangle = I^\xi + \int\limits_0^\xi d\tau d\Gamma^\tau\left[(-\varphi + r^\xi)\left(\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi}\right)^\nu + \left(\nabla\frac{\partial r^\xi}{\partial\xi}\right)^\nu(-\psi + q^\xi)\right] =$$

$$= \langle\text{см.}(3.10)\rangle = I^\xi + \mathrm{const}\int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\left(\nabla\frac{\partial q^\xi}{\partial\xi}\right)^\nu + \mathrm{const}\int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\left(\nabla\frac{\partial r^\xi}{\partial\xi}\right)^\nu =$$

$$= \langle\text{см.}(1.7),(1.8),(3.2)\rangle = I^\xi.$$

Лемма доказана.

Интегрируя (3.9) с учетом определения N, имеем:

$$\Big(\Big(Q^{T_*-\delta} - Q^\delta\Big)h, g\Big)_{\mathcal{G}} = \int\limits_\delta^{T_*-\delta} d\xi \int\limits_{\Gamma^\xi} d\Gamma^\xi\, c\, Nh\cdot Ng =$$

$$= \int\limits_{\Omega^{T_*-\delta}\setminus\Omega^\delta} dx\ Nh\cdot Ng.$$

Устремляя $\delta \to 0$, убеждаемся, что Nh и Ng суть квадратично суммируемые поля, т.е. $\mathrm{Ran}\, N \subset \mathcal{L}_\nu$. Одновременно, по непрерывности Q^ξ получаем:

$$\big(h, g\big)_{\mathcal{G}} = \big(Nh, Ng\big)_{\mathcal{L}_\nu}, \tag{3.11}$$

т.е. N – изометрия.

Расширим N по непрерывности на все $\mathcal{G}$; за расширением сохраним обозначение "N". Благодаря послойному характеру, представления (3.7), (3.8) очевидным образом переносятся на кусочно-гладкие h; при этом оказывается полезным следующий результат.

Лемма 7. *Для $\xi \in (0, T_*)$ и поля $h \in \mathcal{G}^\xi$, гладкого в Ω^ξ выполнено соотношение*

$$Nh\Big|_{\Gamma^\xi - 0} = h\Big|_{\Gamma^\xi - 0}. \tag{3.12}$$

Доказательство. По свойству (i) предложения 3 имеем $h_\theta\Big|_{\Gamma^\xi - 0} = 0$. В силу этого, для решения задачи (3.1)–(3.3) имеем $r^\xi \equiv 0$. Из последнего, по (3.7) получаем (3.12). Лемма доказана.

Можно установить равенство

$$Nh\Big|_{\Gamma + 0} = h_\nu\Big|_{\Gamma}.$$

3.4 Полнота. Здесь будет показано, что N действует *на* $\mathcal{L}_\nu$.

Начнем со вспомогательного результата. Пусть X^ξ есть проектор в $\mathcal{L}_\nu$ на $\mathcal{L}_\nu^\xi$ (см. п. 1.3); его действие сводится к срезке поля на подобласть Ω^ξ.

Лемма 8. *Справедливо соотношение*

$$NQ^\xi = X^\xi N, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*. \tag{3.13}$$

Для получения (3.13) достаточно повторить все шаги доказательства леммы 4, заменяя P^ξ на Q^ξ.

Следствием (3.13) является вложение

$$X^\xi \,\mathrm{Ker}\, N^* \subset \mathrm{Ker}\, N^*, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T_*. \tag{3.14}$$

Установим полноту N.

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Ran} N = \mathcal{L}_\nu. \tag{3.15}$$

Доказательство. Установим эквивалентное соотношение $\operatorname{Ker} N^* = \{0\}$.

Пусть $n \in \operatorname{Ker} N^*$; фиксируем $\xi_0 \in (0, T_*)$. Выберем поле $h \in \mathcal{G}^{\xi_0}$, гладкое в Ω^{ξ_0}. При $\xi < \xi_0$ имеем:

$$0 = \langle \text{см.}(3.14) \rangle = \big(Nh, X^\xi n\big)_{\mathcal{L}_\nu} = \int\limits_0^\xi d\tau \int\limits_{\Gamma^\tau} d\Gamma^\tau \, c\,\widetilde{h} \cdot n,$$

где $\widetilde{h} := Nh$. Дифференцируя и полагая $\xi = \xi_0 - 0$, получаем:

$$0 = \int\limits_{\Gamma^{\xi_0}} d\Gamma^{\xi_0} \, c\,\widetilde{h} \cdot n = \langle \text{см.}(3.12) \rangle = \int\limits_{\Gamma^{\xi_0}} d\Gamma^{\xi_0} \, c\, h \cdot n.$$

По свойству (ii) предложения 3 получаем $n = 0$ на Γ^{ξ_0}; произвольность ξ_0 влечет $n = 0$ в Ω. Лемма доказана.

Резюмируя содержание п. 3, получаем основной результат.

Теорема 2. *Преобразование N есть изометрия $\mathcal{G}$ на $\mathcal{L}_\nu$.*

Заключение

1. Преобразование U. Напомним обозначения для вложений: $t \colon \mathcal{L}_\theta \to \mathcal{H}$; $l \colon \mathcal{L}_\nu \to \mathcal{H}$; $j \colon \mathcal{J} \to \mathcal{H}$; $g \colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Определим преобразование $U \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$U := t\,Mj^* + l\,Ng^*;$$

следующий результат просто объединяет теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Преобразование U есть унитарный оператор в $\mathcal{H}$, причем $U\mathcal{J} = \mathcal{L}_\theta$, $U\mathcal{G} = \mathcal{L}_\nu$.*

Интересно отметить, что в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$, $\tau = -|x|$ сходным образом действует преобразование Фурье: $F\mathcal{J} = \mathcal{L}_\theta$, $F\mathcal{G} = \mathcal{L}_\nu$. Однако, части U, – преобразования M и N, действуют *послойно*: из $u\big|_{\Gamma^\xi} = 0$ и $h\big|_{\Gamma^\xi} = 0$ следует $My\big|_{\Gamma^\xi} = 0$ и $Nh\big|_{\Gamma^\xi} = 0$, в то время как $F\Big|_{\mathcal{J}}$ и $F\Big|_{\mathcal{G}}$ этим свойством не обладают. Таким образом, U не является прямым обобщением F.

Отметим еще одно свойство U. Введем самосопряженные операторы

$$\widehat{\theta} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}, \quad \widehat{\theta} := \int\limits_0^{T_*} \xi \, dP^\xi; \quad \widehat{\nu} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \quad \widehat{\nu} := \int\limits_0^{T_*} \xi \, dQ^\xi$$

и

$$\widehat{\tau} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \widehat{\tau} := \int\limits_0^{T_*} \xi \, dX^\xi$$

(X^ξ – срезка на подобласть Ω^ξ); действие $\widehat{\tau}$, очевидно, сводится к умножению поля на эйконал $\tau(\,\cdot\,)$. Из сплетений (2.11), (3.13) и определения U легко усматривается соотношение

$$U\big[\widehat{\theta} \oplus \widehat{\nu}\big] = \widehat{\tau} U,$$

т.е. U диагонализует $\widehat{\theta}$ и $\widehat{\nu}$.

2. Комментарий. Рассмотрения и результаты работы легко обобщаются на случай риманова многообразия с краем, допускающего эйконал τ с одной критической точкой. Существование такого τ не является принципиальным: по существу мы использовали лишь регулярность семейства поверхностей Γ^ξ. В важном для приложений случае роль эйконала играет функция расстояния $\tau(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma)$, $x \in \Omega$, теряющая гладкость в Ω^ξ при больших ξ (см. [3]). Это не является препятствием для введения преобразований M и N по формулам (2.6), (3.7); в уточнении нуждаются лишь свойства решений p^ξ, r^ξ эллиптических задач в ситуации, когда граница $\Gamma^\xi \in \partial\Omega^\xi$ имеет особенности – рёбра, конические точки и пр.

В предыдущих работах [2, 3] изометричность M устанавливалась с использованием уравнения Рикатти для оператора Кальдерона; то же уравнение позволяет установить изометричность N. Однако, этот прием срабатывает лишь в случае регулярности $\{\Gamma^\xi\}$. Способ, использованный в настоящей работе (см. доказательство лемм 2 и 6), более прост и перспективен для обобщения на нерегулярный случай.

Литература

1. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Визуализация волн в динамической системе Максвелла (ВС-метод).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 49–61.
2. М. Белишев, А. Гласман, *К проектированию в пространстве соленоидальных векторных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 16–43.
3. М. И. Белишев, А. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (ВС-метод).* — Алгебра и Анализ **12**, No. 2 (2000), 131–182.
4. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, *Об ортогональных разложениях пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области.* — Труды МИАН **59** (1960), 61–36.
5. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М. (1970).

Belishev M. I. On a unitary transform in the space $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ connected with the Weyl decomposition.

In the papers devoted to the dynamical inverse problem for the Naxwell system, in the framework of the BC-method, a unitary transform M: "solenoidal field→transversal field" was introduced. In this paper M is complemented by a transform N: "potential field→longitudinal field." Isometry and completeness of N are established. The transform $U = M \oplus N$ mentioned in the title, turns out to be a unitary oprator.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 ноября 2000 г.