Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

М. И. Белишев, С. А. Иванов

ЕДИНСТВЕННОСТЬ В МАЛОМ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУСКОРОСТНОЙ СИСТЕМЫ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

1. Введение

В работе изучается задача восстановления матричных коэффициентов A, B двускоростной динамической системы (2ДС), описываемой уравнением

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + A(x)u_x + B(x)u = 0; \quad x, t > 0, \tag{1}$$

с нулевыми начальными данными и неоднородным граничным условием Дирихле

$$u|_{x=0} = f(t).$$

Здесь $u = u^f$ – двухкомпонентная матрица функция (волна), $\rho = \operatorname{diag}[\rho_1, \rho_2] = \operatorname{diag}[1/c_1^2, 1/c_2^2]$ – постоянная диагональная матрица, причем $c_1 > c_2 > 0$. На A, B налагаются условия, обеспечивающие самосопряженность по Лагранжу оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + A(x)\frac{d}{dx}u_x + B(x)u$:

$$A^{\#}(x) = -A(x); \quad \frac{dA}{dx}(x) = B(x) - B^{\#}(x), \ x > 0; \tag{2}$$

(знак # означает транспонирование).

Рассматриваемая 2ДС представляет собой модель многоскоростных систем, в которых имеются волны разных типов, распространяющиеся с разными скоростями и взаимодействующие между собой. Такого рода системы встречаются в электротехнике (взаимодействующие линии) и теории упругости (балка Тимошенко [1], задачи с остаточным напряжением [2, 3], слоистые анизотропные среды [4]).

Работа поддержана РФФИ, грант No. 98-01-00314, грант No. 99-01-00107.

Модельная 2ДС (1) изучалась в работах [5, 6], посвященных динамической обратной задаче. Для пояснения результатов настоящей работы, опишем характерные особенности 2ДС. Если в уравнении (1) матрицы A, B диагональны, то 2ДС распадается на две невзаимодействующие системы (два канала, быстрый и медленный), волны в которых распространяются со скоростями c_1 и c_2. Если же каналы взаимодействуют (коэффициенты системы недиагональны), то картина волн усложняется. Во-первых, в медленном канале появляются возмущения, распространяющиеся с большей скоростью c_1 (эффект предвестника). Во-вторых, несмотря на взаимодействие, в системе существуют волны, передний фронт которых движется с медленной скоростью c_2. Эти медленные волны генерируются управлениями f, первая компонента которых выражается через свертку второй компоненты с некоторой функцией l: $f(t) = \begin{pmatrix} (l * f_2)(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$. В дальнейших рассмотрениях функциия l будет играть важную роль.

Роль данных динамической обратной задачи играет оператор реакции – отображение $f(\cdot) \longmapsto u_x(0, \cdot)$. В односкоростных системах по оператору реакции, заданному при $0 < t < 2T$ можно восстановить коэффициенты системы в области, захваченной волнами к моменту времени T; для одномерных задач см. [7], многомерные задачи – см. [8]).

Другими словами, наблюдение на границе позволяет восстановить коэффициенты в той части области, в которой они влияют на наблюдение. В 2ДС этот факт в точном смысле слова не имеет места, в чем легко убедиться рассмотрев систему с несвязанными каналами, $A = 0$, $B = \operatorname{diag}[b_{11}, b_{22}]$. Действительно, в этом случае за время наблюдения $2T$ в распавшейся системе возможно восстановить коэффициент b_{11} (быстрый канал) в области влияния $x \leqslant c_1 T$, в то время как коэффициент b_{22} в медленном канале восстанавливается лишь при $x \leqslant c_2 T < c_1 T$. В общем случае, для взаимодействующих каналов, следует иметь в виду правило “подсчета параметров”. Оператор реакции определяется [5, 6] так называемой функцией отклика – матричным ядром оператора реакции. Эта симметрическая матрица функция характеризуется тремя скалярными функциями, в то время как коэффициенты A, B, с учетом (2), – четырьмя. В работе [6] показано, что добавление к функции и отклика функции l позволяет уже однозначно определить пару A, B.

В настоящей работе изучается следующая обратная задача: при известной A, по заданной функции отклика восстановить коэффициент B. Такая постановка согласуется с правилом подсчета параметров. Приведем главный результат работы: однозначное восстановление возможно, по крайней мере, в малом – в некоторой окрестности $x = 0$.

Этот факт устанавливается на следующем пути:

1) выводится нелинейное уравнение, связывающее функцию l с данными обратной задачи; устанавливается его однозначная разрешимость относительно l в малом;

2) коэффициент B восстанавливается по функции отклика и функции l по схеме [5].

Авторы выражают благодарность А. С. Благовещенскому за полезные консультации.

2. 2ДС и основной результат

2.1. 2ДС. Рассмотрим двухскоростную динамическую систему (2ДС)

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0,\ t > 0, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

$$u|_{x=0} = f. \tag{5}$$

Здесь $\rho = \operatorname{diag}[\rho_1, \rho_2]$ есть постоянная 2×2 диагональная матрица, $\rho_j = 1/c_j^2$, $c_1 > c_2$; $A = A(x)$, $B = B(x)$, суть вещественные гладкие[1] 2×2 матрицы-функции (*коэффициенты системы*). На матричные коэффициенты налагаются условия самосопряженности (2).

Вектор-функцию $f = f(t) = \binom{f_1(t)}{f_2(t)}$, входящую в неоднородное граничное условие (5), будем называть *управлением*; будем считать, что, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty;\mathbb{R}^2)$. Через $u = u^f(x,t) = \left(u_1^f(x,t), u_2^f(x,t)\right)^\#$ обозначим решение задачи (*волну*).

2.2. Функция отклика.

В динамических обратных задачах роль данных играет так называемая функция отклика. Она определяется через фундаментальное решение задачи (3)–(5) – матрицу-функцию $U(x,t)$,

[1] Всюду далее “гладкий” означает C^∞–гладкий.

столбцы которой суть решения, отвечающие обобщенным управлениям $\binom{\delta(t)}{0}$ и $\binom{0}{\delta(t)}$ (δ – дельта-функция). Фундаментальное решение может быть записано в виде

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} \delta(t - x/c_1) & 0 \\ 0 & \delta(t - x/c_2) \end{pmatrix} + \tilde{U}(x,t), \;\; x,t > 0,$$

в котором $\tilde{U}(x,t)$ является гладкой вне характеристик $t = x/c_i$ уравнения (3). Матрица-функция $r(t) := \tilde{U}_x(+0,t)$ называется *функцией отклика* системы (3)–(5). Можно показать, что из условий самосопряженности (2) следует симметричность функции отклика, $r(t) = r^{\#}(t)$.

Б [6] получено следующее характеристическое описание функции отклика 2ДС. Обозначим пространство управлений на $(0,T)$ через $\mathcal{F}^T := L^2\left((0,T);\mathbb{R}^2\right)$.

Предложение 1. *Гладкая симметрическая матрица-функция $r(t)$, $t \in [0,2T]$, является функцией отклика 2ДС (3)–(5) тогда и только тогда, когда оператор*

$$(C^T f)(t) := \sqrt{\rho} f(t) + \int_0^T C^T(t,s) f(s) ds, \quad 0 < t < T, \tag{6}$$

с ядром вида

$$C^T(t,s) := \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta, \tag{7}$$

положительно определен в $\mathcal{F}^T$.

2.3. Основной результат

Содержание работы резюмируется следующим предложением.

Теорема 1. *Пусть двум динамическим системам с коэффициентами $\{A, B'\}$ и $\{A, B''\}$ (заданными на $[0, c_1 T]$) отвечает одна и та же функция отклика $r|_{(0,2T)}$. Тогда существует (достаточно малое) x_*, такое, что $B'(x) = B''(x)$ при $0 < x < x_*$.*

3. Свойства 2ДС

3.1. Медленные волны

Как отмечалось во введении, в 2ДС существуют решения (медленные волны), которые равны нулю вне медленного конуса:

$$u^f(x,t) \equiv 0 \text{ при } c_2 t < x. \tag{8}$$

Приведем, следуя [5], описание управлений, порождающих медленные волны.

Предложение 2. *Существует единственная гладкая функция $l = l(t)$, такая что соотношение (8) выполнено тогда и только тогда, когда компоненты управления $f = \binom{f_1}{f_2}$ связаны соотношением*

$$f_1(t) = (l * f_2)(t) = \int_0^t l(t-s) f_2(s)\, ds, \quad t > 0. \tag{9}$$

Если рассматривать задачу (3)–(5) на конечном интервале времени $0 < t < T$, то в этом случае удобнее называть медленными волнами те решения задачи, которые аннулируются вне части медленного конуса, отвечающей $t < T$:

$$u^f(x,t) \equiv 0 \text{ при } c_2 t < x, \text{ и } t < T. \tag{10}$$

Несложно получить из предложения 2 представление управлений, генерирующих такие волны: (10) имеет место тогда и только тогда, когда (9) выполнено при $t < \gamma := (1 - c_2/c_1)T$. Множество таких управлений образует подпространство $\mathcal{F}_l^T \subset \mathcal{F}^T$.

3.2. Восстановление коэффициентов

В работе [6], см. также [5], исследовалась обратная задача: восстановление пары $\{A, B\}$ матричных коэффициентов системы по паре $\{r, l\}$. Приведем основной результат.

Предложение 3. *Симметрическая матрица-функция $r(t)$, $0 < t < 2T$, порождающая по (6), (7) положительно определенный оператор C^T, и функция $l(t)$, заданная при $0 < t < \gamma = (1 - c_2/c_1)T$, однозначно определяют матричные коэффициенты A, B системы (3)–(5) на отрезке $[0, c_2 T]$.*

3.3. Формула ВКБ, проекторы и амплитудная формула

Приведем дополнительные факты о 2ДС, которые понадобятся при доказательстве основного результата. Прежде всего, из первого условия (2) имеем при $x > 0$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) \\ -a(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $c = \sqrt{\rho_1}/(\rho_1 - \rho_2)$.

Предложение 4. *При $f = \binom{\delta}{0}$, то справедливо предельное соотношение $\left[u^f(c_1 t - 0, t)\right]_2 = ca(c_1 t)$, $t > 0$.*

Таким образом, если управление представляет собой δ-функцию в быстром канале (в первой компоненте), то в медленном возникает волна, распространяющаяся с большей скоростью c_1 (предвестник), причем амплитуда переднего фронта предвестника пропорциональна недиагональному элементу A.

Предельное соотношение устанавливается методом ВКБ для системы (3)–(5). В оставшейся части п. 3.3 мы преобразуем его к виду, который позволит получить значение (амплитуду) предвестника на его переднем фронте по функции отклика и функции l.

Введем обозначения. В подпространстве $\mathcal{F}_l^T$ введем семейство расширяющихся подпространств $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$, $\xi \in [0, T]$,

$$\mathcal{F}_l^{T,\xi} := \{f | f(t) = 0, t < T - \xi; f_1(t) = \int\limits_{T-\xi}^{t} l(t-s) f_2(s) ds \quad \text{при } T - \xi < t < T - \frac{c_2}{c_1}\xi\},$$

состоящее из управлений, инициирующих медленные волны, лежащие в медленном конусе с вершиной в точке $x = 0$, $t = T - \xi$:

$$u^f(x, t) = 0, \quad \text{при}, \ x > c_2[t - (T - \xi)].$$

Пусть $X_l^{T,\xi}$ есть ортогональный проектор в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$. Положим $\alpha(\xi) := T - \xi$, $\beta(\xi) := T - \frac{c_2}{c_1}\xi$ и введем операторы свертки $\mathcal{L}_\xi$, действующие на интервале $(\alpha(\xi), \beta(\xi))$ по правилу

$$(\mathcal{L}_\xi \varphi)(t) := \int\limits_{\alpha(\xi)}^{t} l(t - \tau)\varphi(\tau) d\tau.$$

Предложение 5 [6]. *Для проектора $X_l^{T,\xi}$ справедливо представление*

$$\left(X_l^{T,\xi} f\right)(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leqslant \alpha(\xi), \\ (Zf)(t), & \alpha(\xi) < t \leqslant \beta(\xi), \\ f(t), & \beta(\xi) < t \leqslant T, \end{cases}$$

где

$$Z := \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\xi \left(\mathbf{1} + \mathcal{L}_\xi{}^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \mathcal{L}_\xi & \mathcal{L}_\xi \left(\mathbf{1} + \mathcal{L}_\xi{}^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \\ \left(\mathbf{1} + \mathcal{L}_\xi{}^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \mathcal{L}_\xi & \left(\mathbf{1} + \mathcal{L}_\xi{}^* \mathcal{L}_\xi\right)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{P}^\xi$ есть (косой) проектор в $\mathcal{F}_l^T$ на $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ параллельно подпространству

$$\mathcal{F}_\perp^{T,\xi} := (C^T)^{-1}(\mathcal{F}_l^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi})$$

Проекторы $\mathcal{P}^\xi$ допускают полезное операторное представление. Пусть $e_\xi : \mathcal{F}_l^{T,\xi} \to \mathcal{F}^T$ есть оператор вложения: $e_\xi^* e_\xi = Id$, $e_\xi e_\xi^* = X_l^{T,\xi}$. Оператор $e_\xi^* C^T e_\xi$ есть блок оператора C^T в подпространстве $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$; очевидно, что этот блок положительно определен. Теперь проектор может быть записан в виде

$$\mathcal{P}^\xi = e_\xi \left(e_\xi^* C^T e_\xi\right)^{-1} e_\xi^* C^T; \tag{11}$$

для проверки достаточно убедиться, что правая часть (11) обладает характеристическими свойствами косого проектора: $(\mathcal{P}^\xi)^2 = \mathcal{P}^\xi$, $\operatorname{Ker} \mathcal{P}^\xi = \mathcal{F}_\perp^{T,\xi}$, $\operatorname{Ran} \mathcal{P}^\xi = \mathcal{F}_l^{T,\xi}$.

Удобна следующая точка зрения на проекторы $\mathcal{P}^\xi$. Снабдим пространство $\mathcal{F}_l^T$ новой метрикой

$$(f, g)_{\Phi_l^T} := (C^T f, g)_{\mathcal{F}_l^T}.$$

Через Φ_l^T обозначим множество $\mathcal{F}_l^T$ снабженное новой нормой; в силу изоморфности C^T, новая и старая нормы эквивалентны. Легко видеть, что $\mathcal{P}^\xi$ есть *ортогональный* проектор в Φ_l^T.

Следующее соотношение (“амплитудная формула”) связывает значение (медленной) волны и проекции $\mathcal{P}^\xi f$.

Предложение 6 [5]. *Если $f \in \mathcal{F}_l^T$, то*

$$[u^f(c_2\xi - 0, T)]_2 = -(\mathcal{P}^\xi f)_2(T - \xi + 0). \tag{12}$$

Проекторы $\mathcal{P}^\xi$ определяются (через оператор C^T) функцией l и функцией отклика, поскольку последняя определяет метрику в Φ_l^T; благодаря этому формула (12) оказывается эффективным средством решения обратной задачи [6].

4. Основная лемма и доказательство теоремы 1

4.1. Основная лемма

Центральную роль в доказательстве теоремы 1 играет следующее утверждение, устанавливающее возможность восстановления функции l по известным A и r.

Лемма 1. *Пусть даны гладкая симметрическая матрица-функция $r(t)$, $t < 2T$, порождающая по* (6), (7) *положительно определенный оператор C^T, и гладкая функция $a(x)$, $x \leqslant c_2T$. Тогда для любого $R > R_0 = R_0(a, r)$ при достаточно малом $T_0 = T_0(R)$ существует единственная гладкая матрица-функция B на отрезке $[0, c_2T]$, такая, что*

а) *2ДС с коэффициентами $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, B, заданными на отрезке $[0, c_2T_0]$, имеет функцию отклика r,*

б) *для соответствующей функции $l(t)$ выполнена оценка $|l(t)| \leqslant R$, $t < \gamma_0 = T_0 - \frac{c_2}{c_1}T_0$.*

Схема доказательства: сначала дается представление косого проектора $\mathcal{P}^\xi$ на гладких функциях. Затем это представление продолжается естественным образом на обобщенные функции, что позволяет выразить $\mathcal{P}^\xi \binom{\delta}{0}$ через функцию отклика и l. Из амплитудной формулы (предложение 6) получаем выражение волны через $\mathcal{P}^\xi$. Привлекая предложение 4, мы получим нелинейное уравнение связывающее функцию l и недиагональный коэффициент a. Теорема о неподвижной точке для этого уравнения и приведет к утверждению основной леммы.

4.2. Доказательство основной леммы

Сначала опишем, как действуют проекторы. Запишем оператор C^T в блочном виде, $C^T = \{C^T_{ij}\}$, $i, j = I, II, III$, соответствующем представлению $\mathcal{F}^T = L^2((0,\alpha);\mathbb{R}^2) \oplus L^2((\alpha,\beta);\mathbb{R}^2) \oplus L^2((\beta,\gamma);\mathbb{R}^2)$.

Лемма 2. *Пусть $f = \binom{g}{0}$, причем $g \in L^2(0,T)$, $\operatorname{supp} g \subset [\alpha(\xi), \beta(\xi)]$ при некотором ξ. Тогда функция $\varphi_\xi := \left(\mathcal{P}^\xi f\right)_2$ при $t \in [\alpha, \beta]$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\mathcal{L}^*_\xi \quad \mathbf{1}\right) C^{(1)} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_\xi \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \varphi_\xi = \left(\mathcal{L}^*_\xi \quad \mathbf{1}\right) C^{(1)} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\begin{pmatrix}\mathcal{L}_\xi^* & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ *– матрица-строка действующая по правилу* $\begin{pmatrix}\mathcal{L}_\xi^* & \mathbf{1}\end{pmatrix} f = \mathcal{L}_\xi^* f_1 + f_2$; $C^{(1)}$ *– положительно определенная* 2×2 *матрица-функция*

$$C^{(1)} = C_{II} - C_{II\ III} C_{III}^{-1} C_{III\ II}.$$

Доказательство леммы 2. Положим $\Phi_\xi := \mathcal{P}^\xi f$. Умножая (11) слева на $e_\xi^* C^T = (e_\xi^* C^T e_\xi) e_\xi^*$ получим

$$e_\xi^* C^T f = (e_\xi^* C^T e_\xi)\Phi_\xi \tag{14}$$

(мы заменили C_l^T на C^T). Запишем (14) на подпространствах $L^2(\alpha,\beta;\mathbb{R}^2)$, $L^2(\beta,T;\mathbb{R}^2)$, снабжая соответствующие компоненты индексами II, III и учитывая, что $f_I = 0$, $f_{III} = 0$:

$$ZC_{II}^T f_{II} = Z(C_{II}^T \Phi_{\xi_{II}} + C_{III\ II}^T \Phi_{\xi_{III}})$$

$$C_{III\ II}^T f_{II} = C_{III\ II}^T \Phi_{\xi_{II}} + C_{III}^T \Phi_{\xi_{III}}$$

Выражая $\Phi_{\xi_{III}}$ с помощью 2-го уравнения и подставляя в первое, получаем

$$ZC^{(1)} f_{II} = ZC^{(1)}\Phi_\xi.$$

Выписывая 2-ую компоненту и используя вытекающее из условия $\Phi_\xi \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$ представление $\Phi_{\xi_{II}} = \binom{\mathcal{L}_\xi}{\mathbf{1}}\varphi_\xi$, приходим к утверждению леммы 2.

Далее фиксируем $R > 0$ и будем считать все рассматриваемые функции l удовлетворяющими оценке $|l(t)| < R$. Наша ближайшая цель – получить из леммы 2 интегральное уравнение на $(\mathcal{P}^\xi f)_2$ при $f = \binom{\delta(t-\beta)}{0}$.

Лемма 3. *При любом* ξ *функция* $\varphi_\xi(t) = (\mathcal{P}^\xi f)_2(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, *поточечно сходится к некоторой функции* φ_ξ^0 *при* g *стремящемся к* $\delta(t-\beta)$ *в смысле обобщенных функций. При этом* $\varphi_\xi^0(t)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$([\mathbf{1} + L_l]\varphi_\xi^0)(t) = d_1 l(\beta - t) + \lambda_l(t), \tag{15}$$

где L_l *– интегральный оператор в* $C[\alpha,\beta]$ *с гладким ядром, допускающий оценку*

$$\|L_l\|_{C[\alpha,\beta]} < C(R)T,$$

и обладающий свойством Гельдера по l:

$$||L_{l_1} - L_{l_2}||_{C[\alpha,\beta]} < C(R)T||l_1 - l_2||_{C[0,\gamma]}.$$

В правой части интегрального уравнения (15) функция λ_l гладкая и зависит от l аналогичным образом

$$||\lambda_l||_{C[\alpha,\beta]} < C(R)T,\ ||\lambda_{l_1} - \lambda_{l_2}||_{C[\alpha,\beta]} < C(R)T||l_1 - l_2||_{C[0,\gamma]}. \quad (16)$$

Доказательство леммы 3.

Из интегрального представления оператора C^T несложно получить аналогичное представление $C^{(1)}$:

$$(C^{(1)}f)(t) = \sqrt{\rho}f(t) + \int_\alpha^\beta C^{(1)}(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [\alpha,\beta],$$

где ядро $C^{(1)}(t,\tau)$ кусочно гладкое с особенностями лишь на диагонали $t = \tau$, поскольку из (7) вытекает, что ядро C^T кусочно-гладкое, непрерывное, и может иметь разрывы производных лишь на диагонали.

Обозначим через $C_{ij}^{(1)}$ “скалярные” блоки $C^{(1)}$, отвечающие координатным компонентам. Тогда (13) может быть переписано в виде

$$(\mathcal{L}_\xi^* C_{11}^{(1)}\mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_\xi^* C_{12}^{(1)} + C_{21}^{(1)}\mathcal{L}_\xi + C_{22}^{(1)})\varphi_\xi = (\mathcal{L}_\xi^* C_{11}^{(1)} + C_{21}^{(1)})g \quad (17)$$

Правая часть записывается в виде

$$\int_t^\beta l(\tau - t)\left[\sqrt{\rho_1}g(\tau) + \int_\alpha^\beta C_{11}^{(1)}(\tau,s)g(s)ds\right]d\tau + \int_\alpha^\beta C_{21}^{(1)}(t,\tau)g(\tau)d\tau.$$

Перейдем в этом выражении от гладкой функции g к $\delta(t-(\beta-0))$. Для этого при $\varepsilon > 0$ возьмем δ-образную последовательность $g_{n,\varepsilon}$, сходящуюся при $n \to \infty$ к $g = \delta(t-(\beta-\varepsilon))$. Легко видеть, что устремляя n к бесконечности, а затем ε к нулю, мы приходим к правой части в (15) с

$$d_1 := \sqrt{\rho_1}, \quad \lambda_l(t) := \int_t^\beta l(\tau - t)C_{11}^{(1)}(\tau,\beta)d\tau + C_{21}^{(1)}(t,\beta) \quad (18)$$

Для левой части (17) имеем представление

$$\left((\mathcal{L}_\xi^* C_{12}^{(1)} + C_{21}^{(1)}\mathcal{L}_\xi + C_{22}^{(1)}\right)\varphi_\xi^0(t) =$$

$$= \sqrt{\rho_2}(t) + \int\limits_\alpha^\beta C_{22}^{(1)}(t,\tau)\varphi_\xi^0(\tau)\,d\tau + \int\limits_\alpha^\beta L_{r,l}^{(1)}(t,\tau)\varphi_\xi^0(\tau)d\tau, \quad (19)$$

где ядро $L_{r,l}^{(1)}$ получается как композиция ядер $\mathcal{L}_\xi$, $\mathcal{L}_\xi^*$ и $C_{ij}^{(1)}$. Это ядро линейно по l, кусочно-гладкое с особенностями на диагонали, и $|L_{r,l}^{(1)}| < C(R)T$. Аналогично,

$$(\mathcal{L}_\xi^* C_{11}^{(1)}\mathcal{L}_\xi\varphi_\xi^0)(t) = \int\limits_\alpha^\beta L_{r,l}^{(2)}(t,\tau)\varphi_\xi^0(\tau)d\tau, \quad (20)$$

где ядро $L_{r,l}^{(2)}$ квадратично зависит от l, кусочно гладкое с особенностями на диагонали, и $L_{r,l}^{(2)} < C(R)T$. Деля обе части на $\sqrt{\rho_2}$ приходим к (15). Лемма 3 доказана.

Полученное интегральное уравнение (15) на φ_ξ^0 при малом T решается с помощью ряда Неймана и можно получить, что φ_ξ^0 обладает теми же свойствами, что и правая часть в (15). Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 4. *Пусть оператор $K(T,l)$ в гильбертовом пространстве имеет вид*

$$K = \mathbf{1} + W(T,l),$$

где оператор $W(T,l)$ удовлетворяют оценкам

а) $||W(T,l)|| < C(R)T$,

б) $||W(T,l_1) - W(T,l_2)|| < C(R)T||l_1 - l_2||$ *с постоянными, независящими от l и T. Тогда при достаточно малом $T = T(R)$ оператор K^{-1} имеет представление*

$$K^{-1} = \mathbf{1} + \tilde{W}(T,l),$$

где оператор $\tilde{W}$ также удовлетворяет оценкам а), б).

Доказательство леммы 4. При малых T имеем $||W|| < 1$, что позволяет получить утверждение а) леммы в силу известного неравенства $||K^{-1}|| < ||W||(1-||W||)^{-1}$. Для доказательства б) достаточно воспользоваться резольвентным тождеством:

$$K^{-1}(T,l_1)-K^{-1}(T,l_2)=K^{-1}(T,l_2)\,[W(T,l_2)-W(T,l_1)]\,K^{-1}(T,l_2).$$

Лемма доказана.

Из лемм 3, 4 теперь окончательно получаем для $f=\binom{\delta(t-\beta)}{0}$ представление для $\mathcal{P}^\xi f$

$$(\mathcal{P}^\xi f)_2=\varphi^0_\xi(t)=d_1 l(\beta-t)+\tilde{\lambda}_l(t),$$

где $\tilde{\lambda}$ – гладкая функция, удовлетворяющая неравенствам (16).

Привлекая предложение 6, заключаем отсюда, что

$$u^f(c_2\xi-0,T)=-d_1 l(\xi-\frac{c_2}{c_1}\xi)-\tilde{\lambda}_l(T-\xi),\quad \xi\in[0,T].$$

При выбранном управлении в силу предложения 4 имеем

$$u^f_2(c_2\xi-0,T)=ca(c_2\xi).$$

Из двух последних уравнений получаем уравнение на l:

$$l(\xi-\frac{c_2}{c_1}\xi)=d_2 a(c_2\xi)+\hat{\lambda}_l(T-\xi),\quad \xi\in[0,T], \tag{21}$$

при $d_2=c/d_1$, $\hat{\lambda}_l=\tilde{\lambda}/d_1$. Сделаем замену переменной $\tau=\xi-\frac{c_2}{c_1}\xi$ и введем функцию $m(r):=d_2 a(c_2\xi)$ Тогда, выделяя в $\tilde{\lambda}_l$ слагаемое, не зависящее от l (см. (18)), (21) можно записать в виде операторного уравнения

$$l=m+\Lambda(l), \tag{22}$$

в котором m – гладкая функция, а нелинейный оператор Λ переводит непрерывные функции в гладкие. При этом

$$|(\Lambda(l))(\tau)|_{C[0,\gamma]}\leqslant D_1(R)T, \tag{23}$$

$$||\Lambda(l_1)-\Lambda(l_2)||_{C[0,\gamma]}\leqslant D_2(R)T||l_1-l_2||_{C[0,\gamma]} \tag{24}$$

с постоянными D_1, D_2 не зависящими от T (напомним, что мы считаем $|l|<R$).

Применим к (22) принцип неподвижной точки.

Лемма 5. *Для любого* $R > R_0 := 2\|m\|_{C[0,\gamma]}$ *при достаточно малом* T_0 *в шаре* $\|l\|_{C[0,\gamma_0]} < R$, $\gamma_0 = T_0 - \frac{c_2}{c_1}T_0$, *существует единственное решение уравнения* (22).

Лемма проверяется непосредственно; если положить $l_0 := 0$, $l_n := m + \Lambda(l_{n-1})$, тогда из (23), (24) получаем

$$\|l_n\| \leqslant R_0/2 + D_1T,$$
$$\|l_n - l_{n-1}\| \leqslant D_2T\|l_{n-1} - l_{n-2}\|.$$

При $D_1T_0 < 1/2$, и $D_2T_0 < 1$ получаем, что Λ – сжимающий оператор в шаре $\|l\| < R$ и тогда последовательность l_n сходится к решению уравнения (22). Лемма доказана.

При непрерывной функции l функция $\Lambda(l)$ – гладкая, и, поскольку m также гладкая, то решение уравнения (22) принадлежит $C^\infty[0, \gamma_0]$.

Итак, мы располагаем гладкой функцией l на $[0, T_0 - \frac{c_2}{c_1}T_0]$ и функцией отклика (на $[0, 2T_0]$). В соответствии с предложением 3, найдется пара $\{\tilde{A}, B\}$ на $[0, c_2T_0]$ такая, что отвечающая этой паре 2ДС имеет l в качестве функции, определяющей медленные волны (в смысле предложения 2).

При этом, в силу построения, выполнено соотношение (12), что дает, по предложению 4, равенство $\tilde{A} = A$. Теорема 1 доказана.

4.3. Доказательство основной теоремы 1

Динамическим системам с коэффициентами $\{A, B'\}|_{(0,c_1T)}$ и $\{A, B''\}|_{(0,c_1T)}$ отвечают функции l' и l'', определяющие медленные волны. Положим

$$R := \max\{\|l'\|_{C[0,\gamma]}, \|l''\|_{C[0,\gamma]}\}.$$

Тогда по теореме 1 при достаточно малом T_0 найдется единственная функция l, которая вместе с r определяет 2ДС на $[0, c_2T_0]$ с матричным коэффициентом при производной равным A. Следовательно, $l' = l'' = l$ при $t < \gamma_0$. Поскольку r, l определяют 2ДС однозначно в силу предложения 3, то $B' = B''$. Теорема 1 доказана.

Литература

1. Э. Н. Григолюк, И. Т. Селезов, *Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек*. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел, **5** (1973).

2. P. Chadwick, R. W. Ogden, *On the description of elastic moduli.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **44(1)** (1971) 41–54.
3. P. Chadwick, R. W. Ogden, *A theorem of tensor calculus and its application to isotropic elasticity.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, **44(1)** (1971), 55–68.
4. P. Sacks, V. Yakhno, *The inverse problem for a layered anisotropic half space.* Journal of Mathematical Analysis and Application, **228** (1998), 377–398.
5. A. S. Blagoveschenskii, M. I. Belishev, S. A. Ivanov, *The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems.* Wave Motion, **25(1)** (1997), 83–107.
6. М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Характеризация данных динамической обратной задачи для двускоростной системы.* Записки научн. семин. ПОМИ, **259** (1999), 19–45.
7. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения* $y_{tt} - y_{xx} + v(x)y = 0$. Матем. сборник, **182(3)** (1991), 307–331.
8. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* Inverse Problems, **13(5)** (1997), R1–R45; **26(1)**, 99.

Belishev M.I. and Ivanov S.A. A local uniqueness in the dynamical inverse problem for the two–velosity system.

Dynamical inverse problem for a system with two types of waves propagating with two different velocities is under consideration. Local uniqueness of recovering the matrix potentials is proved.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 23 ноября 2000 г.

Российский центр лазерной
физики, С.-Петербургский
государственный университет
e-mail: Sergei.Ivanov@pobox.spbu.ru