Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2001 г.

А. Я. Казаков

СИММЕТРИИ КОНФЛЮЭНТНОГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

1. Введение

Мы будем рассматривать конфлюэнтное уравнение Гойна (КУГ), которое мы запишем в виде:

$$\mathbf{R}_z[\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon]v(z) \equiv \\ \equiv \left\{(z^2-z)\frac{d^2}{dz^2} + (\alpha z^2+\beta z+\gamma)\frac{d}{dz} + dz + \varepsilon\right\} v(z) = 0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет две регулярно особые точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, и одну иррегулярно особую точку $z_\infty = \infty$. Оно имеет более сложную природу, чем уравнение для классических спецфункций, таких, как функции Бесселя, гипергеометрические функции и вырожденные гипергеометрические функции (см. [1, 2]). Уравнение (1) включает как частные (или конфлюэнтные) случаи уравнение Матье, уравнение для кулоновских сфероидальных функций и ряд других уравнений, известных в математической физике и прикладной математике. Однако это уравнение не может быть решено с помощью контурных интегралов и известно мало аналитических средств для исследования его решений. Одним из таких средств, полезным для изучения уравнения (1) и связанных с ним объектов, являются интегральные соотношения. Интегральные соотношения для решений уравнений класса Гойна обсуждались в [3–9]. Например, в [8] интегральные соотношения использовались для вывода интегральных уравнений Фредгольма для собственных функций спектральных задач, связанных с уравнениями класса Гойна. в [9] были получены интегральные соотношения, связывающие собственные функции,

Работа частично поддержана РФФИ, гранты 98-01-01075, 99-01-01262.

отвечающие различным уравнениям класса Гойна. Существование интегральных соотношений приводит к некоторым симметриям для матриц связи. Описание этих симметрий для КУГ является основной целью данной статьи. Отметим, что, в отличие от [8, 9], мы обсуждаем интегральные соотношения в виде контурных интегралов. Эта форма интегральных соотношений упрощает их использование для аналитического продолжения решений уравнения (1).

Опишем план данной работы. В следующем разделе мы введем основные аналитические объекты, в том числе матрицу связи, для КУГ. В разделе 3 мы обсудим элементарные симметрии матрицы связи, которые позволяют выразить всю матрицу связи с помощью одного ее элемента $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$. Затем, в разделе 4, мы опишем интегральные соотношения, которые приводят к некоторым дополнительным симметриям функции $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$, и обсудим симметрию Лапласа, которая позволяет выразить параметры Стокса для КУГ в терминах функции $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$. Отметим, что мы понимаем под симметрией такое преобразование уравнения (1), которое не меняет его структуры, приводя лишь к изменению параметров $\alpha,\beta,\ldots$

2. Основные понятия

Согласно аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [10, 11], уравнение (1) имеет решение $v_b^{(0)}(z)$ $(v_b^{(1)}(z))$ фиксированное своим поведением в окрестности точки $z_0=0$ $(z_1=1)$:

$$v_b^{(0)}(z)=z^{\rho_0}V_b^{(0)}(z),$$

$$v_b^{(1)}(z)=(1-z)^{\rho_1}V_b^{(1)}(z),$$

$$\rho_0=1+\gamma,\quad \rho_1=1-\alpha-\beta-\gamma,$$

причем функция $V_b^{(0)}(z)$ $(V_b^{(1)}(z))$ голоморфна в окрестности z_0 (z_1). Функция $v_b^{(0)}(z)$ $(v_b^{(1)}(z)$ мы называем ветвящимся в окрестности z_0 (соответственно z_1) решением. Кроме того, существует голоморфное в окрестности $z_0(z_1)$ решение уравнения (1), $v_h^{(m)}(z)$, $m=0$ $(m=1)$. Для фиксации нормировки этих решений мы полагаем:

$$V_b^{(0)}(z_0)=v_h^{(0)}(z_0)=V_b^{(1)}(z_1)=v_h^{(1)}=1. \tag{2}$$

Здесь функция z^{ρ_0} (функция $(1-z)^{\rho_1}$) вещественна при $z = \mathrm{Re}\, z > 0$ и $\rho_0 = \mathrm{Re}\, \rho_0$ (при $z = \mathrm{Re}\, z < 1$ и $\rho_1 = \mathrm{Re}\, \rho_1$ соответственно); если величины ρ_0, ρ_1 комплексны, тогда значения этих функций определяются с помощью аналитического продолжения по соответствующему параметру.

Замечание 1. Здесь и далее мы обсуждаем "общую" ситуацию, когда характеристические показатели ρ_0 и ρ_1 не являются целыми числами.

Введем теперь пары фундаментальных решений, вектор-функции

$$\mathrm{v}^{(0)}(z) = \begin{pmatrix} v_b^{(0)}(z) \\ v_h^{(0)}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{v}^{(1)}(z) = \begin{pmatrix} v_b^{(1)}(z) \\ v_h^{(1)}(z) \end{pmatrix}.$$

Если мы продолжим пару $\mathrm{v}^{(0)}(z)$ в окрестность точки z_1, мы можем выразить результат с помощью линейных комбинаций решений, фиксированных в окрестности точки z_1. В итоге возникает матрица связи $\mathbf{K}$:

$$\mathrm{v}^{(0)}(z) = \mathbf{K}\mathrm{v}^{(1)}(z). \tag{3}$$

Очевидно, что $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Эта матрица зависит от пути аналитического продолжения. Мы в качестве такого пути фиксируем интервал вдоль вещественной оси от z_0 до z_1. Мы будем использовать обозначение $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \equiv \mathbf{K}_{11}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

Опишем результат аналитического продолжения решения $v_b^{(0)}(z)$ вдоль пути L (см. рис. 1).

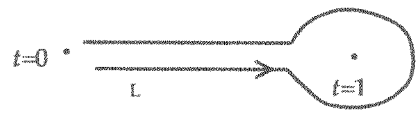

Рис. 1. Путь L для аналитического продолжения функции $v_b^{(0)}(z)$.

Лемма 1. *Результат аналитического продолжения $v_b^{(0)}(z)$ вдоль L описывается с помощью соотношения*

$$v_b^{(0)}(z) \Longrightarrow \mathbf{K}_{11}\{\exp[2\pi i \rho_1] - 1\} v_b^{(1)}(z) + v_b^{(0)}(z). \tag{4}$$

Доказательство. Верхняя строка соотношения (3) дает:

$$v_b^{(0)}(z) = \mathbf{K}_{11} v_b^{(1)}(z) + \mathbf{K}_{12} v_h^{(1)}(z). \tag{5}$$

После поворота вокруг точки z_1 по часовой стрелке мы получаем:

$$v_b^{(0)}(z) \Longrightarrow \mathbf{K}_{11}\{\exp[2\pi i\rho_1]v_b^{(1)}(z) + \mathbf{K}_{12}v_h^{(1)}(z).$$

Используя соотношение (5) в обратном направлении, мы приходим к соотношению (4).

3. Элементарные симметрии конфлюэнтного уравнения Гойна

В данном разделе мы обсудим набор элементарных симметрий КУГ. Они возникают, когда мы подвергаем уравнение (1) элементарным преобразованиям. Эти симметрии для уравнений класса Гойна обсуждались в [13].

3.1. Симметрии относительно s-гомотопных преобразований. Уравнение (1) сохраняет свою форму относительно s-гомотопных преобразований (соответствующую терминологию см. в [12]). Этот факт ведет к соответствующим симметриям матрицы $\mathbf{K}$.

После подстановки

$$v(z) = z^{1+\gamma}u(z)$$

в уравнение (1), для функции $u(z)$ мы получаем:

$$\mathbf{R}_z[\alpha, \beta+2+2\gamma, -2-\gamma, \delta+\alpha\gamma+\gamma, \varepsilon+(\beta+\gamma)(\gamma+1)]u(z) = 0. \quad (6)$$

В этом случае соотношения (3) дают:

$$u_b^{(0)}(z) = \widehat{\mathbf{K}}_{11}u_b^{(1)}(z) + \widehat{\mathbf{K}}_{12}u_h^{(1)}(z), \quad (7)$$

$$u_h^{(0)}(z) = \widehat{\mathbf{K}}_{21}u_b^{(1)}(z) + \widehat{\mathbf{K}}_{22}u_h^{(1)}(z), \quad (8)$$

где $\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\alpha, \beta+2+2\gamma, -2-\gamma, \delta+\alpha\gamma+\gamma, \varepsilon+(\beta+\gamma)(\gamma+1))$. Из наших определений следует, что

$$z^{1+\gamma}u_b^{(0)}(z) = v_h^{(0)}(z), z^{1+\gamma}u_h^{(0)}(z) = v_b^{(0)}(z).$$

$$z^{1+\gamma}u_{b,h}^{(1)}(z) = v_{b,h}^{(1)}(z).$$

Умножая соотношения (7), (8) на $z^{1+\gamma}$ и сравнивая с (3), мы находим:

$$\widehat{\mathbf{K}}_{11} = \mathbf{K}_{21}, \widehat{\mathbf{K}}_{12} = \mathbf{K}_{22},$$

или, в иных терминах,

$$\mathbf{K}_{21}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) =$$

$$= \mathbf{k}(\alpha,\beta+2+2\gamma,-2-\gamma,\delta+\alpha\gamma+\gamma,\varepsilon+(\beta+\gamma)(\gamma+1)), \qquad (9)$$

$$\mathbf{K}_{22}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) =$$

$$= \mathbf{K}_{12}(\alpha,\beta+2+2\gamma,-2-\gamma,\delta+\alpha\gamma+\gamma,\varepsilon+(\beta+\gamma)(\gamma+1)). \qquad (10)$$

Далее, уравнение (1) инвариантно относительно s-гомотопных преобразований $v(z) = (1-z)^{1-\alpha-\beta-\gamma}u(z)$. Для функции $u(z)$ мы имеем:

$$\mathbf{R}_z[\alpha,2-2\alpha-2\gamma-\beta,\gamma,\delta+\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma),\varepsilon+\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)]u(z) = 0. \qquad (11)$$

Соотношения (3) для уравнения (11) означают:

$$u_b^{(0)}(z) = \widetilde{\mathbf{K}}_{11}u_b^{(1)}(z) + \widetilde{\mathbf{K}}_{12}u_h^{(1)}(z),$$

$$u_h^{(0)}(z) = \widetilde{\mathbf{K}}_{21}u_b^{(1)}(z) + \widetilde{\mathbf{K}}_{22}u_h^{(1)}(z),$$

где

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(\alpha,2-2\alpha-2\gamma-\beta,\gamma,\delta+\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma),\varepsilon+\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)).$$

Учитывая соотношения

$$(1-z)^{1-\alpha-\beta-\gamma}u_{b,h}^{(0)}(z) = v_{b,n}^{(0)}(z),$$

$$(1-z)^{1-\alpha-\beta-\gamma}u_b^{(1)}(z) = v_h^{(1)}(z),\ (1-z)^{1-\alpha-\beta-\gamma}u_h^{(1)}(z) = v_b^{(1)}(z),$$

мы получаем:

$$\widetilde{\mathbf{K}}_{11} = \mathbf{K}_{12}, \widetilde{\mathbf{K}}_{21} = \mathbf{K}_{22}.$$

В результате мы находим:

$$\mathbf{K}_{22}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) =$$

$$\mathbf{K}_{21}(\alpha,2-2\alpha-2\gamma-\beta,\gamma,\delta+\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma),\varepsilon+\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)). \qquad (12)$$

$$\mathbf{K}_{12}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) =$$

$$\mathbf{k}(\alpha,2-2\alpha-2\gamma-\beta,\gamma,\delta+\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma),\varepsilon+\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)), \qquad (13)$$

Из (9), (10), (12), (13) следует, что матрица $\mathbf{K}$ может быть определена по значению одного ее элемента $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$. Именно, соотношения (9), (13) и

$$\mathbf{K}_{22}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) =$$

$$\mathbf{k}(\alpha, 4-2\alpha-\beta, -2-\gamma, \delta+\alpha(2-\alpha-\beta), \varepsilon+2-\gamma\alpha-2\alpha-\beta) \quad (14)$$

определяют всю матрицу $\mathbf{K}$. Последнее соотношение может быть получено двумя путями: используя соотношения (10) и (13), или соотношения (12) и (9).

3.2. Отражение. Уравнение (1) инвариантно относительно отражения $z = 1-t$. Если $w(z) = u(t)$, где $w(z)$ является решением уравнения (1), то $u(t)$ является решением уравнения

$$\mathbf{R}_t[-\alpha, \beta+2\alpha, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta, \varepsilon+\delta]u(t) = 0.$$

Пусть $\widehat{\mathbf{K}}$ будет матрицей связи последнего уравнения,

$$\mathbf{u}^{(0)}(t) = \widehat{\mathbf{K}}\,\mathbf{u}^{(1)}(t),$$

соответствующей тому же пути аналитического продолжения. Наша замена переменных приводит к соотношениям:

$$w^{(k)}_{b,h}(z) \leftrightarrow u^{(1-k)}_{b,n}(t),$$

$k = 0, 1$. Таким образом, мы получаем:

$$\widehat{\mathbf{K}}\,\mathbf{K} = \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ есть единичная 2×2-матрица. Если

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(-\alpha, \beta+2\alpha, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta, \varepsilon+\delta),$$

то мы находим:

$$\mathbf{K}(-\alpha, \beta+2\alpha, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta, \varepsilon+\delta)\mathbf{K}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \mathbf{I}.$$

Выписывая отдельные компоненты последнего соотношения и используя соотношения (9), (13) и (14) мы получаем тождества для функции $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$:

$$\mathbf{k}(-\alpha, \beta+2\alpha, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta, \varepsilon+\delta)\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)+$$

$$\mathbf{k}(-\alpha, 2+\beta+2\alpha+2\gamma, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta-\alpha(1+\gamma), \varepsilon+\delta+(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+1))$$

$$\mathbf{k}(\alpha, \beta+2(\gamma+1), -2-\gamma, \delta+\alpha(\gamma+1), \varepsilon+(\beta+\gamma)(\gamma+1)) = 1,$$

$$\mathbf{k}(-\alpha, \beta+2\alpha, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta, \varepsilon+\delta)$$

$$\mathbf{k}(\alpha, 2-2\alpha-\beta-2\gamma, \gamma, \delta+\alpha(1-\alpha-\beta-\gamma), \varepsilon+\gamma(\alpha+\beta+\gamma-1))+$$

$$\mathbf{k}(-\alpha, 2+\beta+2\alpha+2\gamma, -\alpha-\beta-\gamma, -\delta-\alpha(\gamma+1), \varepsilon+\delta+(\alpha+\beta+\gamma)(\gamma+1))$$

$$\mathbf{k}(\alpha, 4-2\alpha-\beta, -2-\gamma, \delta+\alpha(2-\alpha-\beta), \varepsilon+2-2\alpha-\beta-\alpha\gamma) = 0.$$

Отметим, что имеется только 2 независимых тождества.

4. Интегральные симметрии

В этом разделе мы обсудим интегральные симметрии КУГ. Каждая такая симметрия приводит к некоторым соотношениям для функции $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$. Если мы выразим $v_b^{(0)}(z)$, описанное выше решение уравнения (1), в виде контурного интеграла, мы можем использовать этот интеграл для аналитического продолжения этого решения. При этом мы получим два соотношения для описания результата этого аналитического продолжения: первое с помощью леммы 1 и второе с помощью контурного интеграла. Сравнивая, мы можем найти некоторую симметрию для функции $\mathbf{k}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$.

Отметим, что приведенные ниже интегральные соотношения сами по себе не являются новыми. Их аналоги описаны, например, в [8].

4.1. Интегральное преобразование Эйлера. Введем "стандартные" контура интегрирования, которые мы будем использовать в дальнейшем (см. рис. 2). Контур $C_0(C_1)$ является двойной восьмеркой, охватывающей точки $t=0$ $(t=1)$ и $t=z$. Отметим точку $J_0(J_1)$ на этом контуре. В этой точке мы фиксируем фазу подинтегрального выражения. А именно, мы полагаем, что $t^{\rho_0}((1-t)^{\rho_1})$ при $t=J_0(t=J_1)$ вещественна в этой точке, если вещественна ρ_0 (ρ_1 соответственно); в ином случае значение фазы определяется с помощью аналитического продолжения по соответствующему параметру. Такие точки мы будем называть "начальными" точками контура.

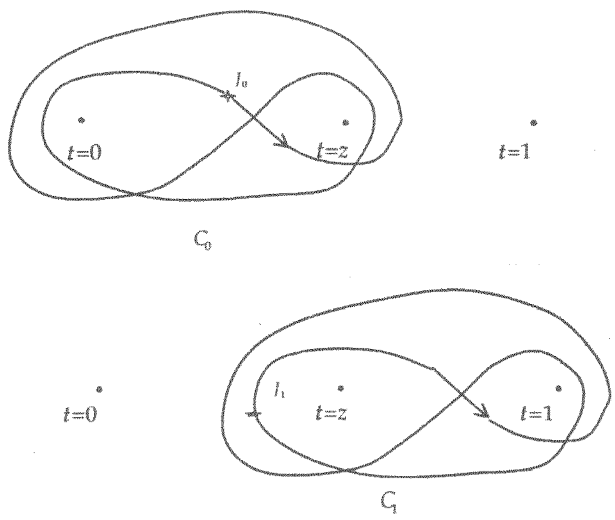

Рис. 2. Контура интегрирования C_0 и C_1.

Замечание 2. Отметим, что любая деформация контура интегрирования, не приводящая к пересечению с особенностями подинтегрального выражения, не изменяет значения интеграла. После такой деформации контур остается гомотопным исходному на комплексной плоскости с соответственно выколотыми особыми точками.

Теорема 1. *Пусть* $u_b^{(k)}(t)$ *– ветвящееся при* t_k $(t_0 = 0,\ t_1 = 1)$ *решение уравнения*

$$\mathbf{R}_t[\alpha, 2+\beta-2\delta/\alpha, \gamma-1+\delta/\alpha, 2\alpha-\delta, \varepsilon-(\beta+1-\delta/\alpha)\delta/\alpha]u(t) = 0. \quad (15)$$

Тогда для некоторой константы q_k *(которую естественно назвать нормировкой) справедливо соотношение:*

$$\int\limits_{C_k} (z-t)^{-\delta/\alpha} u_b^{(k)}(t)dt = q_k v_b^{(k)}(z), \quad (16)$$

где $v_b^{(k)}(z)$ *– описанное выше решение уравнения* (1), $k = 0, 1$. *При этом подинтегральное выражение фиксировано в отмеченной* *точке контура способом, указанным выше, а в других точках его значение получено с помощью аналитического продолжения вдоль контура.*

Доказательство. Покажем, что левая часть (16) является решением уравнения (1). Пусть $\zeta = -\delta/\alpha$. Подставляя левую часть (16) в уравнение (1), мы получаем:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_z[\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon]\int\limits_{C_k}(z-t)^{\zeta}u_b^{(k)}(t)dt =$$

$$\int\limits_{C_k}\left[\frac{(z^2-z)(\zeta-1)}{(z-t)^2}+\frac{(\alpha z^2+\beta z+\gamma)\zeta}{z-t}+\delta z+\varepsilon\right](z-t)^{\zeta}u_b^{(k)}(t)dt =$$

$$\int\limits_{C_k}\left[\frac{(t^2-t)(\zeta-1)}{(z-t)^2}+\frac{\alpha z^2+(\beta+2\zeta-2)t+\gamma+1-\zeta)\zeta}{z-t}+\right.$$

$$\left. z(\delta+\alpha\zeta)+\alpha\zeta t+\zeta(\beta+\zeta-1)+\varepsilon\right](z-t)^{\zeta}u_b^{(k)}(t)dt.$$

Используя тривиальное соотношение

$$\zeta(z-t)^{\zeta-1} = -\frac{d}{dt}(z-t)^{\zeta}. \tag{17}$$

и интегрируя по частям, мы получаем:

$$\mathbf{A} = \int\limits_{C_k}(z-t)^{\zeta}\mathbf{R}_t[\alpha, 2+\beta-2\delta/\alpha, \gamma-1+\delta/\alpha, 2\alpha-\delta,$$

$$\varepsilon-(\beta+1-\delta/\alpha)\delta/\alpha]u_b^{(k)}(t)dt.$$

Внеинтегральные члены исчезают из-за нашего выбора контура интегрирования. То, что правая часть (16) ветвится надлежащим образом в окрестности точки z_k – очевидный факт.

Константу нормировки вычислить нетрудно. Как следует из (16),

$$u_b^{(0)}(t) \sim t^{\gamma+\delta/\alpha},$$

$$u_b^{(1)}(t) \sim (1-t)^{\delta/\alpha-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Следовательно, мы получаем:

$$q_0 = 4\exp[\pi i\gamma]\sin[\pi\delta/\alpha]\sin[\pi(\gamma+\delta/\alpha)]B(\gamma+\delta/\alpha+1, 1-\delta/\alpha),$$

$$q_1 = 4\exp[\pi(\delta/\alpha - \alpha - \beta - \gamma)]\sin[\pi\delta/\alpha]$$

$$\sin[\pi(\delta/\alpha - \alpha - \beta - \gamma)]B(1 - \delta/\alpha, -\alpha - \beta - \gamma).$$

Мы можем использовать соотношение (16) для аналитического продолжения соответствующего решения $v_b^{(0)}(z)$ вдоль контура L. Используя затем лемму 1, мы можем выразить интегральную симметрию в терминах матрицы связи, точнее, с помощью функции $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

Следствие 1. *Из соотношения* (16) *следует, что*

$$\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) = \exp[\pi i(\delta/\alpha - 1)]\frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma - 1)\Gamma(2 + \gamma)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma - \delta/\alpha)\Gamma(1 + \gamma + \delta/\alpha)}$$

$$\mathbf{k}[\alpha, 2 + \beta - 2\delta/\alpha, \gamma - 1 + \delta/\alpha, 2\alpha - \delta, \varepsilon - (\beta + 1 - \delta/\alpha)\delta/\alpha]. \qquad (18)$$

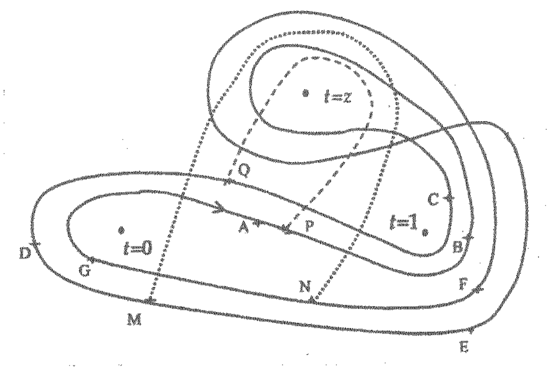

Рис. 3. Деформация контура C_0 после аналитического продолжения вдоль пути L.

Доказательство. Используем соотношение (16) для аналитического продолжения $v_b^{(0)}(z)$ вдоль L. При таком аналитическом продолжении контур C_0 деформируется в $\widetilde{C}_0$ (см. рис. 3),

$$v_b^{(0)}(z) \Longrightarrow q_0^{-1}\int\limits_{\widetilde{C}_0}(z - t)^{-\delta/\alpha}u_b^{(0)}(t)dt,$$

Для удобства обозначений отметим некоторые точки на $\widetilde{C}_0$, так что $\widetilde{C}_0 = ABCDEFGA$. Включим дополнительные петли PQ, MN. Особенности сомножителей подинтегрального выражения отделены друг от друга. Это означает, что результаты аналитического продолжения подинтегрального выражения вдоль путей $PBCQ$ и PQ совпадают. (При аналитическом продолжении вдоль этих петель только вращение вокруг точки $t = z$ изменяет подинтегральное выражение, обходы вокруг точки $t = 1$ происходят в разных направлениях и в итоге не меняют подинтегральное выражение.) Аналогичные соображения справедливы и для петель $MEFGN$, MN. Это дает возможность расщепить контур интегрирования $ABCDEFGA$:

$$\int\limits_{ABCDEFGA} = \int\limits_{APQDMNA} + \int\limits_{PBCQP} + \int\limits_{MEFGNM} .$$

Обсудим отдельно интегралы по этим контурам. Контур $APQDMNA$ гомотопен контуру C_0, причем A является "отмеченной" точкой этого контура. Это означает, что

$$\int\limits_{APQDMNA} = q_0 v_b^{(0)}(z).$$

Далее, контура $PBCQP$ и $-MEFGNM$ гомотопны контуру C_1. Для того, чтобы вычислить соответствующие интегралы, мы используем для $u_b^{(0)}(t)$ следующие выражения:

$$u_b^{(0)}(t) = \widetilde{K_{11}} u_b^{(1)} + \widetilde{K_{12}} u_h^{(1)}(t),$$

где $\widetilde{K}$ – матрица связи для уравнения (15). Вклад членов, голоморфных в точке $t = 1$, равен нулю. Нам следует определить фазовые множители, которые приобретает подинтегральное выражение при аналитическом продолжении от "начальной" точки контура C_0 к "начальным" точкам контуров $PBCQP$ и $MEFGNM$. Для контура $PQCBP = -PBCQP$ фазовый множитель равен $\exp[-\pi i\delta/\alpha]$, для контура $MEFGNM - \exp[\pi i(2\gamma + \delta/\alpha)]$. Суммируя, мы находим результат аналитического продолжения вдоль пути L:

$$v_b^{(0)}(z) \Longrightarrow v_b^{(0)}(z) + q_1 q_0^{-1} \{\exp[-\pi i\delta/\alpha] - \exp[\pi i(2\gamma + \delta/\alpha)]\} \widetilde{K_{11}} v_b^{(1)}(z).$$

Используя выражения для q_0, q_1 и сравнивая с соотношением (4), мы получаем (18).

4.2. Гипергеометрическая интегральная симметрия. КУГ устойчиво относительно интегрального преобразования, ядром которого является (с точностью до степенного множителя) конфлюэнтная гипергеометрическая функция.

Теорема 2. *Пусть* $u_b^{(k)}(t)$ *– ветвящееся в* t_k *решение уравнения*

$$\mathbf{R}_t[\alpha, 4-\beta-2\alpha, \alpha+\beta+\gamma-2, 2\alpha-\delta, \varepsilon+\delta+2-\beta-2\alpha]u(t) = 0, \quad (19)$$

$\Phi(x)$ *– ветвящееся в* $x = 0$ *решение конфлюэнтного гипергеометрического уравнения*

$$x\Phi''(x) + (\alpha x + \alpha + \beta)\Phi'(x) + \delta\Phi(x) = 0. \quad (20)$$

$\Phi(x) \sim 1 \cdot x^{1-\alpha-\beta}$. *Тогда для некоторой (нормирующей) константы* p_k

$$\int\limits_{C_k} \Phi(z-t)u_b^{(k)}(t)dt = p_k v_b^{(k)}(z), \quad (21)$$

где $v_b^{(k)}(z)$ *является ветвящимся в* z_k *решением уравнения* (1).

Мы опускаем доказательство этой теоремы, оно подобно доказательству теоремы 1 (следует использовать соотношение (20) вместо (17)).

Вычислим константы нормировки. Как следует из уравнения (19), $u_b^{(0)}(t) \sim t^{\alpha+\beta+\gamma-1}$, $u_b^{(1)}(t) \sim (1-t)^{-1-\gamma}$ и $\Phi(z-t) \sim (z-t)^{1-\alpha-\beta}$. Тогда

$$p_0 = -4\exp[\pi i\gamma]\sin[\pi(\alpha+\beta+\gamma-1)]\sin[\pi(1-\alpha-\beta)]B(\alpha+\beta+\gamma, 2-\alpha-\beta),$$

$$p_1 = 4\exp[-\pi i\gamma]\sin[\pi(\alpha+\beta-1)]\sin[\pi(\gamma+1)]B(2-\alpha-\beta, -\gamma).$$

Мы можем использовать соотношение (21) для аналитического продолжения решения уравнения (1), как это было сделано выше. При этом мы получим еще одну симметрию функции $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

Следствие 2. *Справедливо соотношение:*

$$\mathbf{k}[\alpha, 4-\beta-2\alpha, \alpha+\beta+\gamma-2, 2\alpha-\delta, \varepsilon+\delta+2-\beta-2\alpha] =$$
$$= \exp[\pi i(-\alpha-\beta)](1-\alpha-\beta-\gamma)(1+\gamma)^{-1}\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon). \quad (22)$$

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство следствия 1 и мы опускаем его.

4.3. Интегральная симметрия Лапласа. Известна еще одна симметрия уравнения (1) – оно устойчиво относительно преобразования Лапласа. Эта симметрия также может быть выражена в терминах матрицы связи. Однако в данном случае соответствующее соотношение связывает поведение решений в окрестности регулярно особой точки и их поведение в иррегулярной особенности.

Положим для простоты, что $\alpha = \operatorname{Re}\alpha > 0$. В окрестности иррегулярно особой точки $z = \infty$, при $|\operatorname{Arg} z| < \pi/2$, имеется фундаментальная пара решений уравнения (1), фиксированных асимптотическим поведением,

$$v_1^{(\infty)}(z) \sim \exp(-\alpha z) z^{\delta/\alpha - \alpha - \beta},$$

$$v_0^{(\infty)}(z) \sim z^{-\delta/\alpha}, \quad |z| \to \infty, \quad |\operatorname{Arg} z| < \pi/2.$$

Мы будем в дальнейшем использовать два контура интегрирования, D_0 и D_1 (см. рис. 4). Как и ранее, мы отмечаем "начальные" точки на этих контурах, J_0 и J_1. В этих точках мы фиксируем значение функции t^κ (или $(1-t)^\kappa$, соответственно), которое мы полагаем вещественным в этой точке при вещественной κ. Основу наших рассмотрений составляет следующий результат.

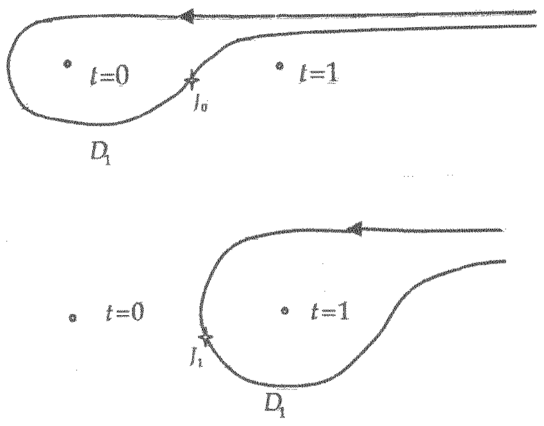

Рис. 4. Контура интегрирования D_0 и D_1.

Теорема 3. *Пусть* $u_b^{(k)}(t)$, $k = 0, 1$ – *ветвящиеся при* $t = t_k$ *решения уравнения*

$$\mathbf{R}_z[-\alpha, 4-\beta, \delta/\alpha - 2, -\alpha(\gamma+2), 2+\varepsilon-\beta]u(t) = 0. \qquad (23)$$

Тогда для некоторых констант θ_0 *и* θ_1

$$\int\limits_{D_k} \exp(-\alpha z t) u_b^{(k)}(t) dt = \theta_k v_k^{(\infty)}(z). \qquad (24)$$

Доказательство очевидно.

Простые вычисления приводят к следующим значениям констант нормировки:

$$\theta_0 = [1 - \exp(-2\pi i \chi_0)]\alpha^{-\chi_0 - 1}\Gamma(\chi_0 + 1),$$

$$\theta_1 = [\exp(\pi i \chi_1) - \exp(-\pi i \chi_1)]\alpha^{-\chi_1 - 1}\Gamma(\chi_1 + 1),$$

где $\chi_0 = \delta/\alpha - 1$ и $\chi_1 = \alpha + \beta - 1 - \delta/\alpha$ – характеристические показатели уравнения (23).

Обсудим теперь результат аналитического продолжения $v_0^{(\infty)}(z)$, когда точка z движется вокруг точки $z = \infty$ в отрицательном направлении (против часовой стрелки). В этом случае, для сохранения сходимости интегралов, следует вращать контур интегрирования в положительном направлении. После такого продолжения мы получим интеграл по деформированному контуру $\widehat{D}_0$, который можно расщепить на три контура (рис. 5), один из которых гомотопен D_0, а два других гомотопны D_1:

$$\theta_0 v_0^{(\infty)}(z) \Longrightarrow \int\limits_{\widehat{D}_0} \exp(-\alpha z t) u_b^{(k)}(t) dt.$$

Вычисляя для каждого контура фазовые множители, которые возникают при аналитическом продолжении от “начальной” точки D_0 до “начальных” точек этих контуров, используя соотношение (4) для решений уравнения (23) и последнюю теорему, мы приходим к следующему соотношению:

$$\theta_0 v_0^{(\infty)}(z) \Longrightarrow \exp[2\pi i \chi_0]\theta_0 v_0^{(\infty)}(z) + \{\exp[2\pi i \chi_0] - 1\}\mathbf{K}'_{11}\theta_1 v_1^{(\infty)}(z),$$

где $\mathbf{K}'_{11}$ – соответствующий элемент матрицы связи уравнения (23). Из этих рассмотрений следует:

$$\mathbf{K}'_{11} = \mathbf{k}(-\alpha, 4-\beta, \delta/\alpha - 2, -\alpha(\gamma+2), 2+\varepsilon-\beta).$$

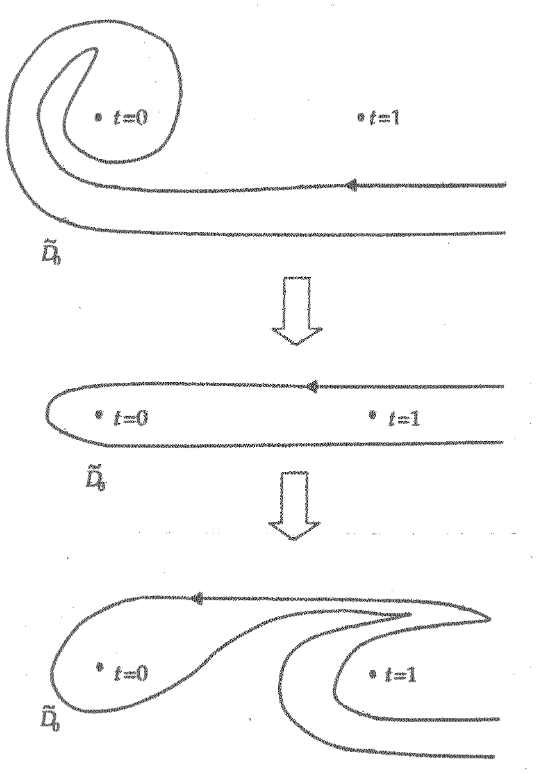

Рис. 5. Деформация контура D_0 после аналитического продолжения вокруг точки z_∞.

В итоге мы получаем следующий результат.

Следствие 3. *В результате аналитического продолжения вокруг точки $z = \infty$ в отрицательном направлении решение $v_0^{(\infty)}(z)$ преобразуется согласно соотношению:*

$$v_0^{(\infty)}(z) \Longrightarrow \exp[2\pi i\chi_0] v_0^{(\infty)}(z) + \zeta v_1^{(\infty)}(z), \tag{25}$$

где

$$\zeta = \{\exp[2\pi i\chi_0] - 1\}\mathbf{k}(-\alpha, 4-\beta, \delta/\alpha - 2, -\alpha(\gamma+2), 2+\varepsilon-\beta)\theta_1/\theta_0.$$

Аналогичная формула справедлива для результата аналитического продолжения решения $v_1^{(\infty)}(z)$. Итак, аналитическое продолжение вокруг точки z_∞ (и, следовательно, описание явления Стокса для КУГ) может быть получено в терминах матрицы связи, которая, напомним, связывает решения, фиксированные в окрестностях точек $z = 0$ и $z = 1$.

5. Заключение

Мы обсудили симметрии КУГ в терминах ее матрицы связи. Было показано, что элементарные симметрии дают возможность выразить матрицу связи $\mathbf{K}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ в терминах одного ее элемента $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ и получить некоторые тождества для этой функции. Интегральные симметрии КУГ приводят к дополнительным симметриям функции $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Интегральная симметрия Лапласа позволяет описать поведение решений уравнения (1) в окрестности иррегулярной особенности $z = \infty$ в терминах функции $\mathbf{k}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$.

В данной работе мы обсудили набор дискретных симметрий КУГ. Для более общих уравнений интегральные симметрии могут порождать непрерывные симметрии соответствующих матриц связи, см. [14].

Я благодарен С. Ю. Славянову за полезные дискуссии.

Литература

1. H. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions.* McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, v. 1 (1953).
2. M. Abramovitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications Inc., New York (1968).
3. A. Erdelyi, *Integral equations for Heun functions.* Quart. J. Math., **13** (1942), 107–112.
4. Д. А. Абрамов, И. В. Комаров, *Интегральные уравнения для кулоновских сфероидальных функций.* ТМФ, **29** (1976), 235–243.
5. B. C. Carlson, *The Laplace transform of a product of a Bessel functions.* SIAM J. Math. Anal., **11** (1980), 428–437.
6. G. Valent, *An Integral transform involving Heun functions and a related eigenvalue problem.* SIAM J. Math. Anal., **17** (1986), 688–703.
7. А. Я. Казаков, *Преобразование Лапласа решений дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами.* Диффер. уравнен., **22** (1986), 354–356.
8. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Integral equations for special functions of Heun class.* Meth. Appl. Anal., **3** (1996), 447–456.

9. A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov, *Integral relations for Heun-class special functions.* Theor. Math. Phys., **107** (1996), 733–739.
10. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Наука, Москва (1983).
11. E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain.* Dover Publications Inc., New York (1997).
12. *Heun's Differential Equations.* with contribution by F. M. Arscott, S. Yu. Slavyanov, D. Schmidt, G. Wolf, P. Maroni, and A. Duval, Edited by A. Ronveaux, Oxford University Press (1995).
13. R. Schäfke and D. Schmidt, *The connection problem for general linear ordinary differential equation at two regular singular points with application in the theory of special functions.* SIAM J. Math. Anal., **11** (1980), 848–862.
14. А. Я. Казаков, *Интегральные симметрии и их инварианты для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* ТМФ, **116** (1998), 225–236.

Kazakov A. Ya. Symmetries of the confluent Heun equation.

The group of the discrete symmetries of the confluent Heun equation is under consideration. This group has as generators the elementary symmetries and the integral symmetries. Such lead to the corresponding symmetries of the connection matrix, which describe the relations between the different fundamental sets of the solutions. The symmetry of the confluent Heun equation with respect to the integral Laplace transform leads to the corresponding relations between the Stokes parameters and connection matrix.

Сю-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Поступило 15 августа 1999 г.