Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Н. Я. Кирпичникова, В. Б. Филиппов

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ МАЛОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ, ПОМЕЩЕННОЙ В СЛОЙ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

Рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны от неоднородного включения, находящегося в слое и имеющего вид "провода" бесконечной длины и малого поперечного сечения. Предполагается, что неоднородное включение является круговым цилиндром радиуса a. Плоскость падения заданной волны перпендикулярна оси цилиндра. В этом случае общая задача переходит в частную плоскую задачу дифракции от малой неоднородности Ω_2 в слое. Малой неоднородностью Ω_2 является круг радиуса a, $a \ll \lambda$, где λ – длина падающей волны.

Наша задача состоит в исследовании рассеяния от включения, помещенного в слой. Толщина слоя имеет порядок длины волны.

§1 Постановка задачи дифракции от малой неоднородности в слое

Пусть на идеально проводящую поверхность Γ_{01} (рис.1), покрытую диэлектрическим слоем Ω_1 толщины $h + h_1$, падает из среды Ω_0 плоская электромагнитная волна. Внутри диэлектрического слоя Ω_1 помещена малая неоднородность Ω_2. Нижнюю среду под диэлектрическим слоем обозначим через Ω_3.

Выберем прямоугольную систему координат таким образом, чтобы плоскость xz совпадала с границей раздела сред, а плоскость xy с плоскостью падения волны. Иначе, в качестве верхней поверхности слоя Γ_{01} выберем плоскость $y = h > 0$. Нижняя граница диэлектрического слоя Γ_{13}, $y = -h_1$ находится на глубине $h + h_1$ от верхней Γ_{01}.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00107).

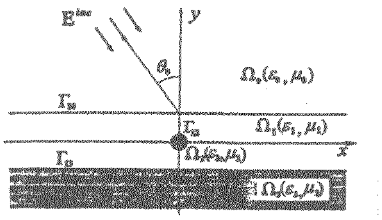

Рис. 1.

Начало координат находится внутри слоя. С центром в начале координат поместим в слой круговой цилиндр Ω_2, образующая которого параллельна оси z. Поверхность этого включения обозначим через Γ_{12}. Радиус цилиндра a мал по сравнению с длиной волны, т.е. $ka \ll 1$. Толщина слоя имеет порядок длины волны: $k(h+h_1) \sim O(1)$.

Известно, что плоская электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, у одной из которых вектор $\mathbf{E}^{inc}$ перпендикулярен плоскости падения, а у другой лежит в этой плоскости. Рассмотрения в обоих случаях близки, поэтому подробнее ограничимся случаем перпендикулярного падения (параллельное падение представим лишь окончательными формулами). Предположим, что падающее электрическое поле ориентировано либо перпендикулярно плоскости падения:

$$\mathbf{E}^{inc} = E_0 \mathbf{e}_z u^{inc}, \tag{$1.1_\perp$}$$

либо параллельно, т.е. магнитное поле ориентировано так же перпендикулярно

$$\mathbf{H}^{inc} = H_0 \mathbf{e}_z u^{inc}. \tag{$1.1_\parallel$}$$

Математически задача определения полного поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в областях Ω_j, $j = 0,1,2$ (см. рис. 1) выражается следующим образом. В областях Ω_j, $j = 0,1,2$, найти решения уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_j &= -i\frac{\omega}{c}\varepsilon_j \mathbf{E}_j, \quad j = 0,1,2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_j &= i\frac{\omega}{c}\mu_j \mathbf{H}_j. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Составляющие векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют условиям жесткого контакта на поверхностях раздела Γ_{01}, Γ_{12}, на металлической основе Γ_{13} они удовлетворяют условию Дирихле для электрической составляющей (условию Неймана – для магнитной составляющей) поля и условиям излучения.

Из предположения, что падающее электрическое поле $\mathbf{E}^{inc}$ поляризовано перпендикулярно (параллельно) к плоскости падения, будет следовать, что таким свойством обладает и полное поле $\mathbf{E}_j$, т.е. все сводится к нахождению скалярных функций u_j,

$$\mathbf{E}_j = E^0 \mathbf{e}_z u_j, (\mathbf{H}_j = H^0 \mathbf{e}_z u_j)$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1. u_j являются решениями уравнений Гельмгольца в своих областях

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \quad j = 0, 1, 2, \tag{1.3}$$

где

$$k_j = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_j \mu_j}.$$

Здесь через

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j' = \frac{4i\pi\sigma_j}{\omega}$$

обозначены комплексная диэлектрическая проницаемость и через μ_j магнитная проницаемость сред Ω_j, $j = 0, 1, 2$, соответственно.

2. На границах раздела Γ_{01}, Γ_{12} (см. рис. 1) u_j удовлетворяют условиям непрерывности касательных компонент электрического и магнитного поля, которые можно выразить следующим образом:

$$\begin{cases} u_i = u_j & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial n} & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.4$_\perp$}$$

$$\begin{cases} u_i = u_j & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{\varepsilon_i}\dfrac{\partial u_i}{\partial n} = \dfrac{1}{\varepsilon_j}\dfrac{\partial u_j}{\partial n} & \text{при} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.4$_\parallel$}$$

3. На границе металлической основы Γ_{13} u_j удовлетворяют условию Дирихле (Неймана)

$$u_{1\perp} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_{1\parallel}}{\partial n} = 0\right). \tag{1.5}$$

Для однозначности решения следует добавить условие излучения Зоммерфельда.

Данная задача была рассмотрена авторами ранее [1] с некоторыми ограничениями. Так авторам пришлось предположить, что подложка Γ_{13} является полностью поглощающей и нет формулы для диаграммы направленности поставленной задачи. Эти ограничения здесь будут сняты. Найдено рассеянное поле для магнитной составляющей. Изменения в скачках магнитных и диэлектрических проницаемостей внесет слой, в который помещена малая неоднородность.

§2. Решение задачи отражения плоской волны от слоя (без включения)

Решение задачи (1.3)–(1.5), если включение Ω_2 отсутствует, известно. Приведем здесь это решение, так как в дальнейшем оно будет необходимо нам. Мы рассматриваем гармонические волны с зависимостью всех величин от времени t и координаты x в виде $\exp i(\xi x - \omega t)$, где ξ есть горизонтальная компонента волнового числа, определяющаяся углом падения волны θ и сохраняющаяся при переходе через плоские границы раздела сред. В дальнейшем множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать. Условие на нижней границе Γ_{13} будет отличатся для Дирихле (Неймана) знаком $\pm$, причем верхний знак соответствует задаче Дирихле. Решение для задачи (1.3)–(1.5) в случае отсутствия включения в слое равно:

$$\begin{aligned} u_0 &= [u^{inc} + V u^{ref}] \exp\{i\xi x\}, \\ u_1 &= [T(u^{-\,tr} \mp u^{+\,tr})] \exp\{i\xi x\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} u^{inc} &= \exp\Big\{ -i\sqrt{k_0^2 - \xi^2 y)}\Big\}, \\ u^{ref} &= \exp\Big\{ i\sqrt{k_0^2 - \xi^2}(y - 2h))\Big\}, \\ u^{-tr} &= \exp\Big\{ -i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}(y - h))\Big\}, \\ u^{+tr} &= \exp\Big\{ i\sqrt{k_1^2 - \xi^2}(y + 2h_1 + h))\Big\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\xi = k_0 \sin\theta_0$, θ_0 – угол падения плоской волны в области Ω_0, т.е. угол между осью y-ов и направлением падения, θ_1 – угол преломления в слое Ω_1, который находится из закона Снеллиуса:

$$\xi = k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1. \tag{2.3}$$

Коэффициенты отражения V и преломления T находятся из условий непрерывности касательных составляющих поля и условий Дирихле (Неймана) на границах раздела:

$$V_{\perp(\|)} = \frac{\Delta'_{\perp(\|)}}{\Delta_{\perp(\|)}}, \tag{2.4}$$

$$T_{\perp(\|)} = \frac{2e^{-i\sqrt{k_0^2-\xi^2}h}}{\Delta_{\perp(\|)}}, \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_{\perp(\|)} = \left[1 \mp e^{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h+h_1)}\right] + \mathcal{E}\left[1 \pm e^{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h+h_1)}\right], \tag{2.6}$$

$$\Delta'_{\perp(\|)} = \left[1 \mp e^{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h+h_1)}\right] - \mathcal{E}\left[1 \pm e^{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(h+h_1)}\right], \tag{2.7}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{\mu_1\sqrt{k_0^2-\xi^2}}\left(\frac{\varepsilon_0\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{\varepsilon_1\sqrt{k_0^2-\xi^2}}\right) = \frac{\sqrt{k_1^2-\xi^2}}{\sqrt{k_0^2-\xi^2}}\varkappa_\mu(\varkappa_\varepsilon), \tag{2.8}$$

$$\varkappa_{\mu(\varepsilon)} = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right).$$

Здесь коэффициенты отражения V и преломления T соответствуют двум поляризациям. Случай падающего электрического поля ориентированного перпендикулярно плоскости падения $(1.4_\perp)$ дает в коэффициентах μ, а случай параллельно ориентированного поля $(1.4_\|)$ дает в коэффициентах ε. Верхний знак в формулах, где встречается $\pm$, отвечает условию Дирихле на подложке Γ_{13}, нижний знак отвечает условию Неймана. Коэффициенты отражения V и преломления T находятся из выражений (2.4), (2.5), в которых параметр $\xi = k_0\sin\theta_0 = k_1\sin\theta_1$. Введем, кроме того, угловые координаты φ_0, φ_1 падающей и преломленной волн по формулам $\varphi_0 = \theta_0 + \pi/2, \varphi_1 = \theta_1 + \pi/2$. Тогда $\sin\theta_0 = -\cos\varphi_0, \sin\theta_1 = -\cos\varphi_1, \cos\theta_0 = \sin\varphi_0, \cos\theta_1 = \sin\varphi_1$.

Окончательное решение задачи отражения плоской волны от слоя глубины $h + h_1$ имеет вид:

$$u_0(x,y) = e^{-ik_0\cos\varphi_0 x}\left[e^{-ik_0\sin\varphi_0 y} + Ve^{ik_0\sin\varphi_0(y-2h)}\right], \tag{2.9}$$

$$u_1(x,y) = Te^{-ik_1\cos\varphi_1 x}\left[e^{-ik_1\sin\varphi_1(y-h)} \mp e^{ik_1\sin\varphi_1(y+2h_1+h)}\right]. \quad (2.10)$$

Здесь коэффициенты отражения V и преломления T перепишем в несколько ином виде более согласованном с формулами работы [1], используя угловые координаты φ_0, φ_1 падающей и преломленной волн:

$$V_{\perp(\|)} = \frac{\Delta'_{\perp(\|)}}{\Delta_{\perp(\|)}} =$$

$$\frac{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1\mp E_1^2] - \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sin\varphi_1[1\pm E_1^2]}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1\mp E_1^2] + \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sin\varphi_1[1\pm E_1^2]}, \quad (2.11)$$

$$T_{\perp(\|)} = \frac{2e^{-i\sqrt{k_0^2-\xi^2}h}}{\Delta_{\perp(\|)}} =$$

$$\frac{2e^{-ik_0\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}h}\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}[1\mp E_1^2] + \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sin\varphi_1[1\pm E_1^2]}, \quad (2.12)$$

где

$$E_1^2 = e^{2ik_1\sin\varphi_1(h+h_1)}. \quad (2.13)$$

§3. Функция Грина

Для дальнейших построений нам потребуется функция Грина точечного источника, помещенного либо в области Ω_0 либо в слое Ω_1.

Сформулируем задачу, которой удовлетворяет функция Грина $\mathcal{G}_j(M,M')$, $j=0,1$, где точка M является точкой наблюдения, а в точке M' помещен точечный источник, который может находится как в области Ω_0, так и в слое Ω_1.

Итак, функции $\mathcal{G}_j(M,M')$ являются решениями уравнений Гельмгольца в своих областях

$$\Delta\mathcal{G}_j(M,M') + k_j^2\mathcal{G}_j(M,M') = \delta(M-M'), \quad j=0,1. \quad (3.1)$$

На границах раздела Γ_{01}, Γ_{13} (см. рис. 1) $\mathcal{G}_j(M,M')$ удовлетворяют условиям непрерывности функций и их нормальных к границам компонент, а также условиям Дирихле (Неймана) на Γ_{13} (см. формулы (1.4)–(1.5), в которых следует заменить u_j на

$\mathcal{G}_j(M,M')$). К этим уравнениям и равенствам на границах раздела следует добавить условие излучения Зоммерфельда.

Приведем теперь формулу для функции Грина $\mathcal{G}(M,M')$ задачи отражения от слоя для двух случаев, когда источник находится в верхнем полупространстве $M' \in \Omega_0$ или в слое $M' \in \Omega_1$

$$\mathcal{G}_j(M,M') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_j(x-x')\zeta_j} k_j G_j(y,y',\zeta_j)d\zeta_j, \quad j = 0,1. \tag{3.2}$$

Отметим, что в обоих случаях в формуле (3.2) интегрирование можно провести по переменной $\xi = k_j\zeta_j$, $j = 0,1$:

$$\mathcal{G}_j(M,M') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-x')\xi} G_j(y,y',\xi)d\xi, \quad j = 0,1. \tag{3.3}$$

Для источника находящегося в области Ω_0 функция Грина $G_0(y,y',\xi)$ принимает вид

$$G_0(M,M') = \frac{e^{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}y_>}}{2i\sqrt{k_0^2-\xi^2}}\left[e^{-i\sqrt{k_0^2-\xi^2}y_<} + \frac{\Delta'}{\Delta}e^{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}(y_<-2h)}\right]. \tag{3.4}$$

Здесь Δ, Δ' и $\mathcal{E}$ определены выражениями (2.6)–(2.8) параграфа §2. Ниже нам понадобится функция Грина $G_{10}(y_1,y',\xi)$ в случае, когда источник находится в верхнем полупространстве $M' \in \Omega_0$, $M_1 \in \Omega_1$. Она представлена формулой

$$G_{10}(y_1,y',\xi) =$$

$$= \frac{e^{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}(y'-h)}\left[e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y_1-h)} \mp E_1^2 e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y_1-h)}\right]}{i\sqrt{k_0^2-\xi^2}\Delta}, \tag{3.5}$$

где величина E_1^2 определена (2.13).

Функция $G_1(y,y',\xi)$ для источника принадлежащего области Ω_1 равна следуюшему выражению

$$G_1(y,y',\xi) = \frac{[(\mathcal{E}+1)e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}y_>} + (\mathcal{E}-1)e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y_>-2h)}]}{2i\sqrt{k_1^2-\xi^2}\Delta}\times$$

$$\times[e^{-i\sqrt{k_1^2-\xi^2}y_<} \mp e^{i\sqrt{k_1^2-\xi^2}(y_<+2h_1)}]. \tag{3.6}$$

§4. Интегральное уравнение для решения задачи дифракции плоской волны от слоя с включением Ω_2

Фактически мы решаем трехмерную задачу (см. рис. 1): между двумя неограниченными параллельными плоскостями $\Gamma_{10} : y = h$ и $\Gamma_{13} : y = -h_1$, образующими диэлектрический слой с проницаемостями μ_1, ε_1 и лежащими на полупространстве Ω_3, поместим тонкий бесконечной длины провод Ω_2 (круговой цилиндр) проницаемостей μ_2, ε_2. На этот слой из области Ω_0 падает плоская волна, скорость которой зависит от магнитной μ_0 и электрической ε_0 проницаемостей. *Исследуется задача рассеяния плоской волны от малой неоднородности (круговой цилиндр), ограниченной поверхностью* $\Gamma_{12} : r = a, z;$ $ka \ll 1$ *и помещенной в слой.*

Используя функции Грина $\mathcal{G}_j$, построенные в §3, сведем решение сформулированной задачи к решению интегральных уравнений. Затем, учитывая малость ядер этих уравнений, найдем решение интегральных уравнений методом последовательных приближений.

Построение интегральных уравнений базируется (см. [1, 2]) на применении формулы Грина в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2. Обозначим оператор Гельмгольца через $L \equiv (\Delta + k^2)$ и применим формулу Грина к решению u нашей задачи (1.3)–(1.5) и к функции Грина $\mathcal{G}$.

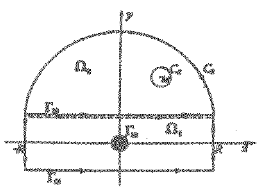

Рис. 2.

На рис. 2 отмечены контуры, по которым происходит интегрирование. Переменной интегрирования служит точка источника $M' = (x', y', z)$. Контур C_R есть полусфера большого радиуса R с центром в точке $(x' = 0, y' = h, z)$. Сфера C_ε отделяет точку наблюдения M от точки интегрирования M'. В конечных формулах радиус R устремим к бесконечности, а ε – к нулю. На боковых контурах в области Ω_1 при $y' = \pm R$ и на полусфере C_R выполняются условия излучения для решения и функции Грина, следовательно подинтегральные выражения устремляются к нулю при $R \to \infty$. Применив в трех областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2 формулу Грина, получим три интегральных уравнения:

$$u_0(M) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u_0}{\partial y'}\mathcal{G}_0(x,y;x',y'=h+0) - \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial y'}u_0(x',y'=h+0)\right]dx' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{\mu_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'}\mathcal{G}_1(x,y;x',y'=h-0) - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y'}u_1(x',y'=h-0)\right]dx'. \quad (4.1)$$

Здесь точка интегрирования принадлежит верхнему берегу контура Γ_{10}^{+}, а затем, после применения формулы (1.4) для значков $j = 1, 2$, нижнему берегу $M' \in \Gamma_{10}^{-}$.

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'}\mathcal{G}_1(x,y;x',y'=h-0) - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y'}u_1(x',y'=h-0)\right]dx' =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'}\mathcal{G}_1(x,y;x',y'=-h_1) - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y'}u_1(x',y'=-h_1)\right]dx' + \quad (4.2)$$

$$+\int\limits_{0}^{2\pi} r'\left[\frac{\partial u_1}{\partial r'}\mathcal{G}_1(r,\varphi;r'=a,\varphi') - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial r'}u_1(r'=a,\varphi')\right]d\varphi', \quad M' \in \Omega_1.$$

Учтем граничные условия (1.4), (1.5) для решения u и функции Грина $\mathcal{G}$ на контурах Γ_{10}, Γ_{12} и Γ_{13}. Тотчас получаем, что интеграл по контуру Γ_{13} пропадает и формула (4.2) обращается в следующую

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u_1}{\partial y'}\mathcal{G}_1(x,y;x',y'=h-0) - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y'}u_1(x',y'=h-0)\right]dx' =$$

$$a\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial u_2}{\partial r'}\mathcal{G}_1 - \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial r'}u_2(r'=a,\varphi')\right]d\varphi', \quad M' \in \Omega_1. \quad (4.3)$$

Применив формулу Грина к функциям u_2, $\mathcal{G}_1$ и к области Ω_2, получим

$$a\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u_2}{\partial r'}\mathcal{G}_1(r,\varphi;r'=a,\varphi')-\frac{\partial\mathcal{G}_1}{\partial r'}u_2(r'=a,\varphi')\right]d\varphi'=$$

$$=(k_1^2-k_2^2)\iint\limits_{|r'|\leqslant a}\mathcal{G}_1(r,\varphi;r',\varphi')u_2(r,\varphi;r',\varphi')r'\,dr'\,d\varphi'. \tag{4.4}$$

Далее три интегральных уравнения (4.1), (4.3) и (4.4) переходят в одно:

$$u_0(M)=\frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)a\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_2}{\partial r'}\mathcal{G}_1(M;r'=a,\varphi')d\varphi'+$$

$$+\frac{\mu_0}{\mu_1}(k_1^2-k_2^2)\iint\limits_{|r'|\leqslant a}\mathcal{G}_1(r,\varphi;r',\varphi')u_2(r,\varphi;r',\varphi')r'\,dr'\,d\varphi'. \tag{4.5}$$

Здесь $M\in\Omega_0$, а интегрирование происходит по поверхности цилиндра $r'=a,z$ и по самому цилиндру $|r'|\leqslant a,z$. Отметим, что для параллельной поляризации всюду в формуле (4.5) следует вместо магнитной проницаемости μ поставить диэлектрическую ε.

§5. Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения (4.5)

Решать уравнение (4.5) будем следующим образом. Представим функции $u_j(M)$, $j=0,1,2$ в виде суммы неизвестных слагаемых $U_j(M)$ и известных функций u_j^0, которые равны отраженной u_0 волне в области Ω_0 (см. формулы (2.4), (2.9)) и преломленной волне u_1 в области Ω_1 (см. формулы (2.5), (2.10)) при падении на слой плоской волны:

$$u_j=U_j+u_j^0,\quad j=0,1,\quad u_2=U_2+u_1^0. \tag{5.1}$$

Для неизвестных функций $U_j(M)$ получаем следующие задачи:

$$(\Delta+k_j^2)U_j=0,\quad j=0,1,\quad (\Delta+k_2^2)U_2=(k_1^2-k_2^2)u_1^0, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} U_0 = U_1 & \text{при} \quad y = h, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial U_0}{\partial n} = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial U_1}{\partial n} & \text{при} \quad y = h, \end{cases} \tag{5.3$_\perp$}$$

$$\begin{cases} U_0 = U_1 & \text{при} \quad y = h, \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{\partial U_0}{\partial n} = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{\partial U_1}{\partial n} & \text{при} \quad y = h, \end{cases} \tag{5.3$_\parallel$}$$

$$U_{1\perp} = 0, \quad \left(\frac{\partial U_{1\parallel}}{\partial n} = 0\right) \text{при} \quad y = -h_1, \tag{5.4}$$

$$\begin{cases} U_1 = U_2 & \text{при} \quad r = a, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial r} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\partial U_2}{\partial r} + \dfrac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2}\dfrac{\partial u_1^0}{\partial r} & \text{при} \quad r = a, \end{cases} \tag{5.5$_\perp$}$$

$$\begin{cases} U_1 = U_2 & \text{при} \quad r = a, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial r} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{\partial U_2}{\partial r} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\dfrac{\partial u_1^0}{\partial r} & \text{при} \quad r = a. \end{cases} \tag{5.5$_\parallel$}$$

Сюда следует добавить условия излучения Зоммерфельда.

Решать зти задачи (5.2)–(5.5) будем точно также, как и задачу для функции u в предыдущем параграфе. Применим формулу Грина к неизвестному решению U и к функции Грина $\mathcal{G}$. После некоторых преобразований получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестного решения U:

$$U_0(M) = \frac{\mu_0}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) a \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial U_2}{\partial r'} + \frac{\partial u_1^0}{\partial r'}\right] \mathcal{G}_1(M; r' = a, \varphi') d\varphi' +$$
$$+ \frac{\mu_0}{\mu_1}(k_1^2 - k_2^2) \iint\limits_{|r'| \leqslant a} \mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi')(U_2 + u_1^0)(r, \varphi; r', \varphi') r' dr' d\varphi'. \tag{5.6}$$

Интегральное уравнение (5.6) можно решать методом последовательных приближений, выбрав в качестве нулевой итерации для функции U значение $U^0 = 0$. Это возможно, так как из физических соображений и по условию задачи U конечно, а область интегрирования мала ($ka \ll 1$).

Следовательно, первая итерация к решению U^1 равна:

$$U^1(M) = \frac{\mu_0(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} a \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial r'} \mathcal{G}_1(M; r' = a, \varphi')\right] d\varphi' +$$

$$+\frac{\mu_0}{\mu_1}(k_1^2 - k_2^2)\iint\limits_{|r'|\leqslant a} \mathcal{G}_1(r,\varphi;r',\varphi')u_1^0 r'dr'd\varphi'. \tag{5.7}$$

§6. Асимптотика функции Грина $\mathcal{G}_1$

Мы изучаем задачу рассеяния ($kr \gg 1$) от малой неоднородности, помещенной в слой толщины $(h + h_1) \sim O(\lambda)$. Для этого исследуем в данном параграфе функцию Грина $\mathcal{G}_1$, определенную формулами (3.3), (3.5), при $kr \gg 1$, $kr' \ll 1$, $y_1 = y'$. Эта функция входит под интеграл формулы (5.7).

Исследуем формулу (5.7) в предположении, что $kr \gg 1$, $kr' \ll 1$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r' = \sqrt{(x')^2+(y')^2}$. Асимптотику функции Грина $\mathcal{G}_1$ получим, используя стандартные приемы метода стационарной фазы (см. [3, 4]). Обычно в слое Ω_1 скорость волн меньше, чем в верхнем полупространстве Ω_0, т.е. $k_1 > k_0$. Разрезы на плоскости комплексного переменного $\xi = k_0\zeta_0$ в формулах (3.3), (3.5) располагаются, как и в работе [1]. Асимптотика функции Грина $\mathcal{G}_1$ при $kr \gg 1$, $kr' \ll 1$ запишется в следующем виде:

$$\mathcal{G}_1(r,\varphi;r',\varphi') = \frac{e^{i(k_0 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}}\times$$

$$\times\frac{\sin\varphi e^{-ik_0 h\sin\varphi} e^{ik_1 h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\left[1 \mp e^{2ik_1 h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right]}{\sin\varphi[1\mp E^2] + \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}[1\pm E^2]}, \tag{6.1}$$

где

$$E^2 = e^{2ik_1(h+h_1)\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}. \tag{6.2}$$

Обозначим знаменатели формул (6.1), (2.11) или (2.12) через $\Delta(\varphi)$, $\Delta(\varphi_0)$ соответственно:

$$\Delta(\varphi) = \sin\varphi[1\mp E^2] + \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}[1\pm E^2], \tag{6.3}$$

$$\Delta(\varphi_0) = \sin\varphi_0[1\mp E_1^2] + \frac{\mu_0(\varepsilon_0)k_1}{\mu_1(\varepsilon_1)k_0}\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}[1\pm E_1^2]. \tag{6.4}$$

Множители

$$\frac{\mu_0 k_1}{\mu_1 k_0},\quad \frac{\varepsilon_0 k_1}{\varepsilon_1 k_0}$$

выразятся через импеданс g границы раздела $\Gamma_{01} : y = h$ для двух поляризаций $\perp$ и $\|$ по формулам

$$\frac{\mu_0 k_1}{\mu_1 k_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_0}} = g_\perp, \frac{\varepsilon_0 k_1}{\varepsilon_1 k_0} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_0}{\mu_0 \varepsilon_1}} = g_\|. \tag{6.5}$$

Тогда функция Грина $\mathcal{G}_1$ (6.1) перепишется в виде

$$\mathcal{G}_1(r, \varphi; r', \varphi') = \frac{e^{i(k_0 r - 3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0 r}} \times$$

$$\times \frac{\sin\varphi e^{-ik_0 h \sin\varphi} e^{ik_1 h \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}} \left[1 \mp e^{2ik_1 h_1 \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right]}{\sin\varphi[1 \mp E^2] + g_\perp(g_\|)\sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}[1 \pm E^2]}, \tag{6.6}$$

а функция u_1^0 имеет следующее выражение в круге радиуса $|r'| \leqslant a$

$$u_1^0(r', \varphi') = \frac{2e^{-ik_0 h \sin\varphi_0} e^{ik_1 h \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}} \sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0)} \times$$

$$\times \left[e^{-ik_1 r' \cos(\varphi_1 - \varphi')} \mp e^{-ik_1 r' \cos(\varphi_1 + \varphi')} e^{2ik_1 h_1 \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\right]. \tag{6.7}$$

Мы рассматриваем малую неоднородность, для которой $kr' \ll 1$. Формула (6.7) упростится и даст более простое решение для поля в слое. Это решение не будет зависеть от переменных r' и φ':

$$u_1^0 = \frac{2e^{-ik_0 h \sin\varphi_0} e^{ik_1 h \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}} \sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0)} \times$$

$$\times \left[1 \mp e^{2ik_1 h_1 \sqrt{1 - \frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\right]. \tag{6.8}$$

§7. Дифракционная добавка от неоднородности, помещенной в слой

Подставляя (6.6), (6.8) в формулу (5.7) для первой итерации функции U, мы получим добавочное слагаемое от неоднородности к решению задачи отражения плоской волны от слоя глубины

$h+h_1$. Эта добавка представляет собой цилиндрическую волну, рассеивающуюся от неоднородности с некоторой диаграммой направленности.

Введем обозначения, согласованные с работой [1]. Пусть через $T_{01}(\varphi_0)$, $T_{10}(\varphi)$ будут обозначены коэффициенты прохождения из верхней среды в слой и соответственно обратно:

$$T_{01}(\varphi_0)=\frac{e^{-ik_0h\sin\varphi_0}e^{ik_1h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\sin\varphi_0}{\Delta(\varphi_0)}\times$$

$$\times\left[1\mp e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}}\right]. \tag{7.1}$$

$$T_{10}(\varphi)=\frac{e^{-ik_0h\sin\varphi}e^{ik_1h\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\sin\varphi}{\Delta(\varphi)}\times$$

$$\times\left[1\mp e^{2ik_1h_1\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi}}\right]. \tag{7.2}$$

Приведем формулы дифракционной добавки к решению задачи отражения электромагнитной плоской волны поляризованной как перпендикулярно, так и параллельно плоскости падения волны. Рассеяние электромагнитной плоской волны поляризованной перпендикулярно (параллельно) плоскости падения от неоднородности в слое дается формулой

$$U^1_{E(H)}(r,\varphi)=\frac{\mu_0(\varepsilon_0)}{\mu_1(\varepsilon_1)}(\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}-1)\pi(k_2a)^2\frac{2e^{i(k_0r-3\pi/4)}}{\sqrt{2\pi k_0r}}F(\varphi_0,\varphi), \tag{7.3}$$

где диаграмма направленности $F(\varphi_0,\varphi)$ равна

$$F(\varphi_1,\varphi)=T_{01}(\varphi_0)T_{10}(\varphi). \tag{7.4}$$

В формулах (7.1)–(7.4) прослеживается симметрия относительно углов φ_0 и φ, так как

$$k_0\cos\varphi_0=k_1\cos\varphi_1, \sin\varphi_1=\sqrt{1-\frac{k_0^2}{k_1^2}\cos^2\varphi_0}, \sin\varphi_0=\sqrt{1-\frac{k_1^2}{k_0^2}\cos^2\varphi_1}.$$

Дифракционная добавка (7.3) мала ввиду того, что она содержит два малых множителя $(k_2a)^2$, $k_2a\ll 1$ и $(k_0r)^{-1/2}$, $k_0r\gg 1$.

Если *сравнивать рассеяние* плоской электромагнитной волны *от неоднородности в неограниченном пространстве* с рассеянием этой волны *от неоднородности в слое*, то *качественная картина сохранится. Неоднородность будет излучать как точечный источник, мощность* которого *пропорциональна площади сечения* этой неоднородности и *скачкам диэлектрической и магнитной проницаемостей* на границах разделов.

Изменились количественные характеристики рассеиваемого поля. Так скачки диэлектрических и магнитных проницаемостей в задаче дифракции на неоднородности в отсутствии слоя $\varepsilon_2 - \varepsilon_1(\mu_2 - \mu_1)$ заменятся на скачок квадрата скоростей в слое и в неоднородности $\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1$. Присутствие слоя скажется и в диаграмме направленности.

Литература

1. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304–322.
2. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* Изд-во “Советское радио,” М. (1970).
3. Ф. Франк и Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* ОНТИ ГРОТЛ, Л.-М. (1937).
4. Г. И. Макаров, В. В. Новиков, *Теория распространения радиоволн.* — В сб.: 1-ая Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн. Изд. АН СССР, Паланга, (1968) 242–304.

Kirpichnikova N. Ya., Philippov V. B. Diffraction of plane electromagnetic waves on a small inhomogeneity in a layer.

The problem of the diffraction of the electromagnetic plane wave, scattered on a small inhomogeneity in a layer is investigated. The inhomogeneity is supposed to be a circular cylinder, radius of which is small in comparision with the length of the falling wave. It is proved that the small inhomogeneity radiates as a point source, the power of wich is proportional to the cross-section area and the jumps of the dielectric and magnetic constants on the interfaces.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 ноября 2000 г.