Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

А. П. Киселев

ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИСКАЖАЮЩИЕСЯ ВОЛНЫ. НОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича

1. Введение. Мы рассматриваем решения волнового уравнения

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{c^2}u=0,\ \ c=\mathrm{const}, \tag{1}$$

имеющие вид

$$u=gf(\theta) \tag{2}$$

где фаза $\theta=\theta(x,y,z,t)$ и амплитуда $g=g(x,y,z,t)$ – фиксированные функции, а форма волны $f(\theta)$ – произвольная функция одной переменной. Такие решения названы в [1] относительно неискажающими волнами.

В [1] приведено два примера: плоская волна с $\theta = z-ct,\ g=1$ и сферическая волна, где $\theta=R-ct,\ g=1/R,\ R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Авторы [1], по-видимому, не знали любопытного примера Пуассона–Вольтерры, в котором $\theta=r-ct,\ g=e^{i\varphi/2}/\sqrt{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}, \cos\varphi=x/r$.

Фридлендер [2] показал, что для фаз вида $\theta=t-h(x,y,z)$, где h вещественно, линии уровня функции $h(x,y,z)$ являются алгебраическими поверхностями 4 порядка, известными как циклиды Дюпена, и их вырожденными формами, что покрывает предыдущие примеры.

Бейтмен [3] привел пример

$$\theta=z-ct+\frac{x^2+y^2}{z+ct},\ \ g=\frac{1}{z+ct}, \tag{4}$$

который оказался (см. [4] и ссылки там) полезен для конструирования решений обладающих свойствами сильной локализован-

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 00-01-00485

ности. В [3] имеется и другой пример,

$$\theta = \frac{x+iy}{z+ct},\ g = \frac{1}{z+ct}. \tag{5}$$

Впоследствии, для фазы (4) (точнее, для ее комплексификации путем замены $z+ct \to z+ct-i\epsilon$, с которой и связаны локализованные решения) были найдены новые амплитуды. Исследователей привлекали также решения вида (2), получающихся при преобразовании Лоренца из сферических волн.

В этой заметке приводятся новые решения уравнения (1) из класса (2).

2. Результат. Как известно, фаза должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$(\nabla\theta)^2 = c^{-2}\theta_t^2, \tag{6}$$

а амплитуда – уравнению переноса и волновому уравнению, [1, 3, 4]. Для заданного решения (6) амплитуда может не существовать, а если существует, то может быть не единственна (произвол не обязан ограничиваться умножением на постоянную).

Мы замечаем, что если Ψ и Φ -решения уравнения (6), то условие

$$\nabla\Psi\nabla\Phi = c^{-2}\Psi_t\Phi_t \tag{7}$$

гарантирует, что

$$\theta = F(\Psi, \Phi)$$

также будет решением (6) для любой (скажем, непрерывно дифференцируемой) функции $F(\cdot,\cdot)$ двух переменных. Отвечает ли такому θ какая-нибудь амплитуда, не ясно. В дальнейшем функция $F(\cdot,\cdot) : \mathbb{C}^1 \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{C}^1$ аналитична по первому аргументу и дважды непрерывно дифференцируема.

Теорема 1. *Для любой* $F(\cdot,\cdot)$

$$\theta = F(x+iy, z+ct) \tag{8}$$

есть фаза, которой отвечает амплитуда

$$g = C,\ C = \text{const}\,. \tag{9}$$

Амплитуда (9) *не единственна. Например, для однородной функции* F,

$$\theta = \frac{x+iy}{z+ct}, \tag{10}$$

амплитудой будет и

$$g = C_0 + C_1(x^2 + y^2 - z^2 + c^2t^2) + \frac{c_2}{z + ct}, \tag{11}$$

где C_j – константы, а для квадратичной,

$$\theta = (x + iy)(z + ct), \tag{12}$$

среди возможных амплитуд имется

$$g = C + \frac{C_1}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2}. \tag{13}$$

Теорема 2. *Для любого $F(\cdot, \cdot)$*

$$\theta = F\left(\frac{x + iy}{z + ct},\ z - ct + \frac{x^2 + y^2}{z + ct}\right) \tag{14}$$

является фазой, которой отвечает амплитуда

$$g = \frac{C}{z + ct}\left(\frac{x + iy}{z + ct}\right)^{\mu}, \tag{15}$$

где μ – произвольная постоянная.

Обе теоремы доказываются элементарной проверкой. Рассуждение, приведшее к фазам (8) и (14) основывалось скорее на догадке, чем на систематическом подходе.

Заметим, что второй аргумент функции F в (14) – это фаза Бейтмена (4).

3. Обсуждение. Решений уравнения (1) вида (2) много. Мы далеки от описания и классификации фаз, а тем более – отвечающих им амплитуд. Эти вопросы, по-видимому, тесно связаны с геометрией.

Изложенное можно трактовать как построение решений (1) вида

$$u = gf(\Psi, \Phi), \tag{16}$$

где $f(\cdot, \cdot)$ – произвольная функция двух переменных.

4. Благодарность. Автор признателен Виктору Васильевичу Борисову за полезнейшие обсуждения на всех этапах работы.

Литература

1. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики.* Гостехиздат, Москва (1957).
2. F. G. Friedlander, *Simple progressing solutions of the wave equation.* Proc. Roy. Soc. London, **A313** (1947), 348–359.
3. Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн.* ГИФ-МЛ, Москва (1957).
4. A. P. Kiselev, V. V. Perel, *Highly localised solutions of the wave equation.* J. Math. Phys. **41**, No. 4 (2000), 1934–1955.

Kiselev A. P. Relatively undistorted waves. New examples.

New solutions of the wave equation with three spacial variables of the form $u = g(x, y, z, t)f(\theta)$ where g and $\theta = \theta(x, y, z, t)$ are some specialised functions, and f is an arbitrary function of one variable are presented.

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 14 апреля 2001 г.