Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Д. П. Коузов, Г. Л. Никитин, В. Г. Яковлева

МАТРИЦА ТРАНСФОРМАЦИИ ВИБРАЦИОННЫХ ВОЛН

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

Авторы статьи сердечно поздравляют Василия Михайловича Бабича с прекрасным юбилеем и с удовольствием посвящают ему эту работу, к последователям школы которого они себя причисляют (а один из авторов статьи был непосредственным учеником В. М. Бабича и выполнил работу над кандидатской диссертацией под его руководством).

1. Введение.

При расчетах распространения низкочастотных вибрационных волн в зданиях, судах и других конструкциях вместо уравнений пространственной теории упругости обычно используются уравнения динамики тонких пластин. Прохождению вибрационных волн через сочленения упругих пластин посвящено достаточно много работ. В качестве примера укажем на работы [1–7]. В первых из них [1–3], учитывались только изгибные смещения. В более поздних работах [4–7] принимались во внимание также и симметричные (продольные и сдвиговые) движения и определялась их взаимная трансформация.

Различные типы волн в пластинах при равных амплитудах порождают разные по величине потоки энергии, а формулы для нахождения волновых полей при учете всех основных типов колебаний достаточно громоздки. Поэтому возникают вопросы о рациональном выборе расчетных характеристик исследуемого объекта и вычислительного алгоритма, а также об организации контроля полученных результатов. Этим вопросам и посвящена настоящая работа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант РКЦФЕ "Матрица трансформации").

Традиционным объектом исследования в задачах дифракции является матрица (оператор) рассеяния [8], однако, при изучении ближнего поля она недостаточна, поскольку описывает асимптотическое поведение решений в дальней зоне. Для изучения полей в ближней зоне можно привлечь обобщенную матрицу рассеяния [9]. В случаях трансляционно-инвариантных моделей, когда при наклонном падении нет отражения назад (именно такие модели рассматриваются в этой работе), полная информация о процессе рассеяния содержится в одном блоке обобщенной матрицы рассеяния, который мы будем называть матрицей трансформации. В настоящей работе дается определение матрицы трансформации вибрационных волн на узловом сочленении пластин, описывается алгоритм ее нахождения и проводится изучение общих свойств этой матрицы. Для данной модели наряду с проверкой наличия обычных свойств матрицы рассеяния – унитарности и симметричности (мы полагаем, что такую проверку необходимо делать при изучении любой новой модели), мы установили новое свойство обобщенной матрицы рассеяния. Это свойство является следствием закона сохранения энергии при рассеянии неоднородных (затухающих) волн. Заметим, что оно не является отличительной чертой рассматриваемой механической модели, а имеет общий характер и справедливо для широкого круга родственных по геометрии моделей, в которых имеет место трансформация волн произвольной физической природы.

2. Матрица трансформации плоских волн на границе акустических полупространств. Поясним цели дальнейшего изложения простым примером. Рассмотрим модель, состоящую из двух полубесконечных акустических сред с плотностями ρ_1 и ρ_2, скоростями звука c_1 и c_2, смыкающихся по некоторой плоскости. Введем декартову систему координат, направив оси Oy и Oz по границе раздела сред, а ось Ox вглубь среды с номером 1. Акустическое поле в средах будем описывать с помощью акустического давления P. Здесь и всюду в дальнейшем процессы будем предполагать гармоническими, зависимость поля от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, который условимся всюду опускать.

Пусть колебания в системе порождаются плоской волной с комплексной амплитудой $\widetilde{\alpha}_1$, падающей на границу раздела двух сред из первой среды. Выбрав ось Oz параллельно фронту этой волны, мы исключим зависимость волнового поля от координаты z. Имеем

$$P(x, y) = \widetilde{\alpha}_1 e^{i\mu y} \begin{cases} e^{-i\lambda_1 x} + \tau_{11} e^{i\lambda_1 x}, & x > 0, \\ \tau_{21} e^{-i\lambda_2 x}, & x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь τ_{11} и τ_{21} – коэффициенты отражения и преломления, λ_1, λ_2, μ компоненты волновых векторов, $\lambda_j = \sqrt{k_j^2 - \mu^2}$, k_j – волновые числа, $k_j = \omega / c_j$ $(j = 1, 2)$.

В предположении непрерывности давления и нормального смещения на границе сред имеем известные выражения для коэффициентов отражения τ_{11} и преломления τ_{21}

$$\tau_{11} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \tau_{21} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}, \tag{2.2}$$

где Z_1 и Z_2 – нормальные волновые сопротивления сред:

$$Z_j = \rho_j \omega / \lambda_j, \quad j = 1, 2. \tag{2.3}$$

При этом, в случае идеальной среды, каждая из величин λ_1, λ_2 может быть вещественной (распространяющаяся волна) или мнимой (затухающая волна) – последнее имеет место, например, при полном внутреннем отражении $(\lambda_j = +i\sqrt{\mu^2 - k_j^2})$.

Пусть теперь источником поля служит волна (с той же составляющей волнового вектора вдоль оси Oy), падающая из второй среды

$$P(x) = \widetilde{\alpha}_2 e^{i\mu y} \begin{cases} \tau_{12} e^{i\lambda_1 x}, & x > 0, \\ e^{i\lambda_2 x} + \tau_{22} e^{-i\lambda_2 x}, & x < 0, \end{cases}$$

тогда

$$\tau_{12} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \tau_{22} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1}.$$

Матрица

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} & \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} \\ \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} & \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

полностью описывает процесс трансформации (отражения и преломления) плоских волн с заданной составляющей волнового вектора μ вдоль границы сред в рассматриваемой модели. По заданным амплитудам падающих волн $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ амплитуды трансформированных волн $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_2$ могут быть найдены по формуле

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widetilde{\mathbf{T}} \widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \tag{2.5}$$

где $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2)^t$, $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_2)^t$, а символ t обозначает транспонирование.

Хотя описание процесса трансформации плоских волн с помощью матрицы $\widetilde{\mathbf{T}}$ является исчерпывающим, оно имеет очевидный недостаток, вызванный произвольностью выбора базиса. В качестве векторов $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$, описывающих процесс, мы использовали амплитуды давления падающих и рассеянных волн. Заменив давление P на величину другой физической природы, мы, вообще говоря, придем к другому выражению для матрицы $\mathbf{T}$. Поэтому, в частности, матрица $\mathbf{T}$, определяемая формулой (2.4), для идеальных сред и при отсутствии полного внутреннего отражения $(\operatorname{Im} Z_1 = \operatorname{Im} Z_2 = 0)$ не является унитарной.

Для получения инвариантного описания процесса трансформации прибегнем к энергетической нормировке базисных функций. При этом следует учитывать лишь нормальную к плоскости раздела сред составляющую вектора плотности потока энергии $\boldsymbol{\Pi}$. Для бегущих $(\lambda_j > 0)$ волн $\widetilde{\alpha}_j \exp(i\lambda_j x + i\mu y)$ имеем

$$\Pi_x = \frac{1}{2\rho_j \omega} \operatorname{Im} P^* \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\lambda_j}{2\rho_j \omega} |\widetilde{\alpha}_j|^2 = \frac{1}{2Z_j} |\widetilde{\alpha}_j|^2, \quad j = 1, 2$$

В соответствии с этим заменим базис из ненормированных плоских волн $e^{\pm i\lambda_j x + i\mu y}$ на нормированный $\sqrt{2Z_j}\, e^{\pm i\lambda_j x + i\mu y}$. При этом новые координаты α_j, β_jвыражаются через старые по формулам

$$\alpha_j = \widetilde{\alpha}_j (2Z_j)^{-1/2}, \quad \beta_j = \widetilde{\beta}_j (2Z_j)^{-1/2},$$

а давление в падающих P_{in} и трансформированных P_{out} волнах будет иметь вид

$$P_{\text{in}}(x, y) = \alpha_j \sqrt{2Z_j}\, e^{-i\lambda_j |x| + i\mu y},$$
$$P_{\text{out}}(x, y) = \beta_j \sqrt{2Z_j}\, e^{i\lambda_j |x| + i\mu y} \quad (j = 1, 2).$$

Радикал $\sqrt{2Z_j}$ для вещественных значений λ_j естественно считать арифметическим. В случае полного внутреннего отражения энергетическая нормировка плоских волн невозможна ввиду того, что уединенная затухающая волна энергию (от границы полупространств) не переносит. Тем не менее аналитическое продолжение по параметру μ с учетом принципа предельного поглощения (при этом считается, что $k_j = k_j + iO$) позволяет обосновать использование введенной нормировки и в этом случае. В результате для $\lambda_j = +i\sqrt{\mu^2 - k_j^2}$ аргумент радикала $\sqrt{2Z_j}$ следует считать равным $(-\pi/4)$. Заметим, что имеется и другая возможность выбора нормировки в случае мнимых λ_j, основанная на принципе взаимности, которую мы будем использовать в дальнейшем.

Для векторов $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^t$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ формула (2.5) примет вид

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha},$$

где матрица $\mathbf{T}$ определяется формулой

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} & \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 + Z_1} \\ \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2 + Z_1} & \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} \end{pmatrix}$$

Матрицу $\mathbf{T}$ условимся называть матрицей трансформации. Матрица трансформации удобна при решении многих практических задач, однако, для изучения общих свойств модели принято рассматривать матрицу рассеяния $\mathbf{S}$. По поводу матрицы (оператора) рассеяния или $\mathbf{S}$-матрицы, следует заметить, что в ситуации рассеяния на компактном препятствии в двумерном или трехмерном пространствах она унитарна, симметрична и превращается в единичный (тождественный) оператор при исчезновении препятствия [8]. Однако, в одномерном случае приходится одним из двух последних свойств жертвовать при выборе расположения коэффициентов отражения r_1, r_2 и прохождения t_1, t_2 как в [10] или [11]

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r_1 & t_2 \\ t_1 & r_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} t_1 & r_2 \\ r_1 & t_2 \end{pmatrix}.$$

Мы будем, следуя [10], придерживаться первой из этих формул, в которой есть симметрия, но при отсутствии препятствий она дает не единичную матрицу, а

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для получения матрицы рассеяния в рассмотренной выше модели следует принимать во внимание и встречные волны, т.е.

плоские волны с проекцией волнового вектора на границу раздела сред равной $(-\mu)$. Таким образом

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{T}(\mu) \\ \mathbf{T}(-\mu) & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1} & \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2+Z_1} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2+Z_1} & \frac{Z_1-Z_2}{Z_2+Z_1} \\ \frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1} & \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2+Z_1} & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_2+Z_1} & \frac{Z_1-Z_2}{Z_2+Z_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{S}$ имеет блочную антидиагональную структуру, что является следствием однородности рассматриваемой модели по переменной y.

Перечислим основные свойства матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$.

1. Матрица $\mathbf{S}$ симметрична ($s_{lm} = s_{ml}$). Это свойство выражает принцип взаимности или инвариантность модели относительно обращения времени (с учетом вещественности физических полей). В терминах матрицы $\mathbf{T}$ имеем $\mathbf{T}(-\mu) = \mathbf{T}^t(\mu)$.
2. В идеальной среде и при отсутствии полного внутреннего отражения, когда $Z_{1,2} > 0$, матрица $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ унитарны. Данное свойство является следствием закона сохранения энергии.
3. В идеальной среде в случае полного внутреннего отражения (будем для определенности предполагать, что $c_1 > c_2$, тогда сопротивление Z_1 активное: $Z_1 = X_1 > 0$, а Z_2 – реактивное: $Z_2 = -iY_2$, $Y_2 > 0$) матрица $\mathbf{T}$ имеет вид
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{X_1+iY_2}{X_1-iY_2} & \frac{2\sqrt{X_1 Y_2}}{X_1-iY_2}\, e^{-i\pi/4} \\ \frac{2\sqrt{X_1 Y_2}}{X_1-iY_2}\, e^{-i\pi/4} & \frac{X_1+iY_2}{X_1-iY_2} \end{pmatrix}.$$

Видно, что $|t_{11}| = 1$, т.е. вся энергия падающей волны из первой среды передается отраженной волне. Матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ в этом случае не являются унитарными (матрицу $\mathbf{S}$ в этом случае естественно назвать обобщенной матрицей рассеяния [9]), но они имеют унитарные подматрицы (для $\mathbf{S}$ это классическая матрица рассеяния), которые получаются из $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ после вычеркивания строк и столбцов, соответствующих затухающим волнам.

Кроме того, имеет место соотношение
$$2\,\mathrm{Im}\, t_{22} = |t_{12}|^2, \tag{2.6}$$
которое легко получить непосредственным вычислением. Доказательство аналогичного соотношения, не использующее непосредственные вычисления, для более сложной модели приводится ниже.

Выясним смысл последнего равенства. Правая часть определяет относительный поток энергии, уносимой от границы сред волной, распространяющейся в первую среду. Возникает вопрос: что служит источником этой энергии, если учесть, что падающая из второй среды волна является затухающей и непосредственно энергии не переносит? Ответ таков: поток энергии во второй среде возникает в результате взаимодействия падающей и отраженной волн. Действительно, поле во второй среде представляет собой суперпозицию двух волн

$$P(x,y) = \alpha_2\sqrt{2Z_2}\, e^{i\mu y}(e^{-|\lambda_2|x} + t_{22}e^{|\lambda_2|x}, \quad x<0,$$

причем $\lambda_2 = i|\lambda_2|$. Вычисление относительного потока энергии для такой пары волн приводит к равенству $\Pi_x/|\alpha_2|^2 = 2\,\mathrm{Im}\, t_{22}$. Таким образом, равенство (2.6) выражает закон сохранения энергии для случая, когда источником поля служит нераспространяющаяся волна.

Будем для краткости (по аналогии с известной оптической теоремой) утверждение (2.6) называть акустической теоремой, хотя аналогичное соотношение верно и для других типов волн: упругих, вибрационных, электромагнитных и т.д.

3. Узловое сочление пластин. Принцип взаимности. Основной целью настоящей публикации является получение матрицы трансформации вибрационных волн на жестком узловом сочленении полубесконечных пластин и исследование ее общих свойств.

Схема модели пояснена на рис. 1 (на рисунке число пластин n взято равным трем). Как и в работах [4–7] в пластинах будем учитывать все основные типы движений: продольные, сдвиговые, изгибные. Пластины будем предполагать тонкими, их толщины и материалы в общем случае считаются различными.

Отметим характерные трудности, встречающиеся при изучении этой модели.

1. Громоздкость формул. Исследуется объект, содержащий произвольное число сред – носителей волновых процессов (полубесконечных пластин), в каждой из которых могут распространяться волны четырех различных типов: продольные, сдвиговые, изгибные распространяющиеся и затухающие. Это обстоятельство приводит к сложным матричным формулам, которые аналитически "непрозрачны" – свойства матрицы трансформации из этих выражений непосредственно не видны.

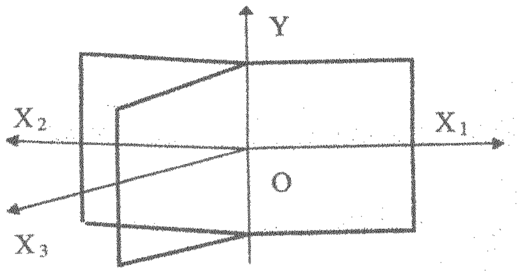

Рис. 1.

2. Наличие в модели волн, которые ни при каких значениях параметров не являются распространяющимися. В рассмотренном выше примере нормировка по энергии выбиралась для распространяющихся волн, а в случае полного внутреннего отражения нормировка получалась аналитическим продолжением по параметру μ. В модели, которую мы сейчас рассмотрим, будут присутствовать волны, которые никогда не являются распространяющимися и поэтому данный путь является невозможным. Поэтому в основу определения матрицы трансформации будет положен принцип взаимности (этот подход предложен в работах [12, 13]). Такой путь по-видимому является наиболее общим, в частности и потому, что он применим не только для идеальных сред, но и при наличии в средах внутренних или иных потерь.

Основные идеи данной работы были изложены в докладах авторов [14–16].

На каждой из пластин введем свою декартову систему координат (x_q, y), $q = 1, 2, \dots, n$; причем ось Oy и начало координат для всех пластин являются общими. Координата x_q в каждой пластине отсчитывается в сторону удаления от кромки (рис. 1). Изгибные колебания будем описывать уравнением Кирхгофа

$$D_q \Delta_q^2 w_q - \rho_q h_q \omega^2 w_q = 0, \tag{3.1}$$

а симметричные – уравнениями Файлона (уравнениями обобщенных плоских движений)

$$\begin{aligned}
&\frac{E_q h_q}{1-\sigma_q^2}\left(\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_q^2}+\frac{1-\sigma_q}{2}\frac{\partial^2 u_q}{\partial y^2}+\frac{1+\sigma_q}{2}\frac{\partial^2 v_q}{\partial x_q \partial y}\right)-\rho_q h_q \omega^2 u_q=0\\
&\frac{E_q h_q}{1-\sigma_q^2}\left(\frac{\partial^2 v_q}{\partial y^2}+\frac{1-\sigma_q}{2}\frac{\partial^2 v_q}{\partial x_q^2}+\frac{1+\sigma_q}{2}\frac{\partial^2 u_q}{\partial x_q \partial y}\right)-\rho_q h_q \omega^2 v_q=0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь u_q, v_q, w_q – составляющие вектора смещений, h_q – толщина пластины, $\Delta_q = \frac{\partial^2}{\partial x_q^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $D_q = \frac{E_q h_q^3}{12(1-\sigma_q^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины.

Подобно тому, как это сделано в [13] для одиночной пластины, выделим в каждой пластине прямоугольник $G_q : 0 \leqslant x_q \leqslant q_q$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $q = 1, 2, \ldots, n$. Все прямоугольники имеют одну общую сторону ($x_q = 0$, $-b \leqslant y \leqslant b$) и в совокупности составляют некоторую мысленно выбранную конструкцию G с узловым сочленением.

Сформулируем для каждой прямоугольной пластины G_q, входящей в эту конструкцию, принцип взаимности, причем поверхностную внешнюю силу (см. [13]) сразу будем предполагать отсутствующей

$$-i\omega \int\limits_{\partial G_q} \mathbf{f}_q^t \widetilde{\mathbf{u}}_q d\,l - i\omega \sum_{j=1}^{4} f_{qj}(A_{qj})\widetilde{w}(A_{qj}) =$$

$$-i\omega \int\limits_{\partial G_q} \widetilde{\mathbf{f}}_q^t \mathbf{u}_q d\,l - i\omega \sum_{j=1}^{4} \widetilde{f}_{qj}(A_{qj}) w(A_{qj}). \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{u}_q = \left(u_q, , v_q, w_q, \frac{\partial w_q}{\partial n}\right)^t$ – обобщенный вектор смещений (в качестве четвертой составляющей взят угол поворота), $\mathbf{f}_q = (f_{qx}, f_{qy}, f_{qz}, m_q)^t$ – обобщенный вектор сил, действующих на контуре ∂G_q q-й пластины (в качестве четвертой составляющей взят изгибающий момент), f_{qj} – уголковая нормальная сосредоточенная сила, j – номер угловой точки. Произведения $f_{qj}\widetilde{w}$ и $\widetilde{f}_{qj} w$ вычисляются в угловых точках контура $\partial G_q : A_{q1}(0, -b)$, $A_{q2}(a_q, -b)$, $A_{q3}(a_q, b)$, $A_{q4}(0, b)$. Смещения u_q, v_q, w_q и силы f_{qx}, f_{qy}, f_{qz} отсчитываются в том же направлении, что и декартовы координаты (x_q, y, z_q). Ось Oz_q для каждой пластины выбирается таким образом, чтобы система координат (x_q, y, z_q) была правой. Выражения для сил $\mathbf{f}_q$ и f_{qj} приведены в [13]. Смещения второго состояния выделены тильдой. Верхний индекс t – символ транспонирования. $\widetilde{\mathbf{f}}_q = \mathbf{f}_q(\widetilde{\mathbf{u}}_q)$, $\widetilde{f}_{qj}(A_{qj}) = f_{qj}(\widetilde{w}(A_{qj}))$.

Для пояснения обозначений формулы (3.3) расшифруем запись применительно к отрезку $x_q = a_q$, $-b < y < b$ границы ∂G_q области G_q.

Здесь

$$f_{qx} = \frac{E_q h_q}{1-\sigma_q^2}\left(\frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \sigma_q \frac{\partial v_q}{\partial y}\right), \quad f_{qy} = \frac{E_q h_q}{1+\sigma_q}\left(\frac{\partial u_q}{\partial y} + \frac{\partial v_q}{\partial x_q}\right),$$

$$f_{qz} = -D_q\left(\frac{\partial^3 w_q}{\partial x_q^3} + (2-\sigma_q)\frac{\partial^3 w_q}{\partial x_q \partial y^2}\right),$$

$$m_q = D_q\left(\frac{\partial^2 w_q}{\partial x_q^2} + \sigma_q \frac{\partial^2 w_q}{\partial y^2}\right).$$

Для уголковых сил имеют место выражения

$$f_{qj} = \pm 2 D_q (1-\sigma_q)\frac{\partial^2 w_q}{\partial x_q \partial y}.$$

При этом знак “плюс” имеет место в точках A_{q1} и A_{q3}, а знак “минус” – в двух остальных точках.

Просуммируем равенства (3.3) по всем пластинам, входящим в конструкцию G

$$-i\omega \sum_{q=1}^{n} \int_{\partial G_q} \mathbf{f}_q^t(\mathbf{u}_q)\widetilde{\mathbf{u}}_q \, dl - i\omega \sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{4} f_{qj}(w_q(A_{qj}))\widetilde{w}(A_{qj}) =$$

$$= -i\omega \sum_{q=1}^{n} \int_{\partial G_q} \mathbf{f}_q^t(\widetilde{\mathbf{u}}_q)\mathbf{u}_q \, dl - i\omega \sum_{q=1}^{n}\sum_{j=1}^{4} f_{qj}(\widetilde{w}_q(A_{qj}))w(A_{qj}). \tag{3.4}$$

В силу наличия жесткого контакта (спая) между пластинами на их общей кромке ($x_q = 0$) смещения должны совпадать, а сумма всех сил должна обращаться в нуль. Поскольку векторы $\mathbf{u}_q$ и $\mathbf{f}_q$ в выражении (3.3) представлены в местных координатах, мы должны сначала перейти от этих координат к некоторой единой системе (x, y, z). Пусть этот переход осуществляется с помощью ортогональных матриц $\mathbf{Q}_{q0}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{qx} \\ \mathbf{e}_{qy} \\ \mathbf{e}_{qz} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{q0} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x} \\ \mathbf{e}_{y} \\ \mathbf{e}_{z} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{e}_{qx}$, $\mathbf{e}_{qy}$, $\mathbf{e}_{qz}$, $\mathbf{e}_{x}$, $\mathbf{e}_{y}$, $\mathbf{e}_{z}$ – координатные орты. Добавив к матрицам $\mathbf{Q}_{q0}$ четвертую строку и четвертый столбец с единицей на главной диагонали и с нулями на остальных позициях (все углы поворота и моменты отсчитываются в одном направлении)

$$\mathbf{Q}_q = \operatorname{diag}(\mathbf{Q}_{q0}, 1),$$

мы сможем записать условия жесткого скрепления пластин в виде

$$\sum_{q=1}^{n} \mathbf{Q}_q \mathbf{f}_q(\mathbf{u}_q) = 0, \quad \mathbf{Q}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{Q}_2\mathbf{u}_2 = \ldots = \mathbf{Q}_n\mathbf{u}_n \equiv \mathbf{u}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь в равенстве (3.4) интеграл по линии скрепления пластин ($x_q = 0$, $-b \leqslant y \leqslant b$). С учетом ортогональности матриц $\mathbf{Q}_q$ и равенств (3.5) имеем:

$$\int_{-b}^{b} \sum_{q=1}^{n} \mathbf{f}_q^t(\mathbf{u}_q)\widetilde{\mathbf{u}}_q\, d\,y = \int_{-b}^{b} \sum_{q=1}^{n} (\mathbf{Q}_q \mathbf{f}_1(\mathbf{u}_q))^t \mathbf{Q}_q \widetilde{\mathbf{u}}_q\, d\,y =$$

$$\int_{-b}^{b} \sum_{q=1}^{n} (\mathbf{Q}_q \mathbf{f}_q(\mathbf{u}_q))^t \widetilde{\mathbf{u}}\, d\,y = \int_{-b}^{b} \left(\sum_{q=1}^{n} \mathbf{Q}_q \mathbf{f}_q(\mathbf{u}_q) \right)^t \widetilde{\mathbf{u}}\, d\,y = 0.$$

Таким образом, в равенстве (3.3) интегрирование по общей стороне всех прямоугольников G_q ($x_q = 0$, $-b \leqslant y \leqslant b$) может быть опущено (следует интегрировать только по внешней границе конструкции).

Предположим теперь, что зависимость полей $\mathbf{u}_q(x_q, y)$ и $\widetilde{\mathbf{u}}_q(x_q, y)$ от переменной y задается формулами

$$\mathbf{u}_q(x_q, y) = \mathbf{U}_q(x_q)e^{i\mu y}, \quad \widetilde{\mathbf{u}}_q(x_q, y) = \widetilde{\mathbf{U}}_q(x_q)e^{-i\mu y}.$$

В этом случае (см. [13]) интегралы по отрезкам контура ∂G_q, ортогональным оси Oy ($0 \leqslant x_q \leqslant a_q$, $y = \pm b$), а также уголковые члены взаимно сокращаются, а в интегралах по отрезкам $x_q =$

a_q, $-b \leqslant y \leqslant b$, параллельным оси Oy, пропадает зависимость подынтегральной функции от переменной интегрирования y.

Поделив полученное равенство на $2b$, придадим принципу взаимности (3.3) следующий вид:

$$\sum_{q=1}^{n} \{\mathbf{U}_q(x_q), \widetilde{\mathbf{U}}_q(x_q)\} = 0,$$

где

$$\{\mathbf{U}_q, \widetilde{\mathbf{U}}_q\} = -i\omega[\mathbf{F}_q^t \widetilde{\mathbf{U}}_q - \widetilde{\mathbf{F}}_q^t \mathbf{U}_q],$$

$$\mathbf{F}_q^t(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{E_q h_q}{1-\sigma_q^2}\left(\frac{\partial U_q}{\partial x_q} + i\sigma_q \mu V_q\right) \\ \frac{E_q h_q}{2(1+\sigma_q)}\left(i\mu U_q + \frac{\partial V_q}{\partial x_q}\right) \\ -D_q\left(\frac{\partial^3 W_q}{\partial x_q^3} - (2-\sigma_q)\mu^2 \frac{\partial W_q}{\partial x_q}\right) \\ D_q\left(\frac{\partial^2 W_q}{\partial x_q^2} - \sigma_q \mu^2 W_q\right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_q(\mu), \quad \widetilde{\mathbf{F}}_q = \mathbf{F}_q(-\mu).$$

В силу произвольности величин a_q в равенстве (3.4) они заменены текущими абсциссами x_q.

Поле в q-й пластине с заданной зависимостью от y в общем случае представляет собой некоторое наложение прямолинейных (распространяющихся или затухающих) волн, падающих на кромку пластины $\mathbf{U}_q^-(x_q)$, $\widetilde{\mathbf{U}}_q^-(x_q)$ и отраженных от нее $\mathbf{U}_q^+(x_q)$, $\widetilde{\mathbf{U}}_q^+(x_q)$. В рамках теории тонких пластин таких волн четыре: продольная ($l = 1$), сдвиговая ($l = 2$), распространяющаяся изгибная ($l = 3$) и затухающая изгибная ($l = 4$). Соответственно нумеруются и волновые числа этих волн. Решая уравнения Файлона и Кирхгофа, получим:

$$\mathbf{U}_{q1}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} \pm i\lambda_{q1} \\ i\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q1}x_q}, \quad \mathbf{U}_{q2}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} -i\mu \\ \pm i\lambda_{q2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q2}x_q},$$

$$\mathbf{U}_{q3}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm i \\ -\lambda_{q3} \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q3}x_q}, \quad \mathbf{U}_{q4}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm i \\ -\lambda_{q4} \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q4}x_q}, \quad (3.6)$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{q1}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} \pm i\lambda_{q1} \\ -i\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q1}x_q}, \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{q2}^{\pm}(x_q) = \begin{pmatrix} -i\mu \\ \mp i\lambda_{q2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i\lambda_{q2}x_q},$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{q3}^{\pm}(x_q) = -\mathbf{U}_{q3}^{\pm}(x_q), \quad \widetilde{\mathbf{U}}_{q4}^{\pm}(x_q) = -\mathbf{U}_{q4}^{\pm}(x_q),$$

где $\lambda_{qj} = \sqrt{k_{qj}^2 - \mu^2}$, k_{qj} – волновое число j-ой волны в пластине с номером q:

$$k_{q1} = \frac{\rho_q\omega^2(1-\sigma_q^2)}{E_q}, \quad k_{q2}^2 = \frac{2\rho_q\omega^2(1+\sigma_q)}{E_q},$$

$$k_{q^3}^2 = \frac{\rho_q h_q\omega^2}{D_q}, \quad k_{q4} = ik_{q3}.$$

В приведенных выше формулах для $\mathbf{U}_{qj}^{\pm}(x_q)$, $\widetilde{\mathbf{U}}_{qj}^{\pm}(x_q)$ следует одновременно использовать либо верхние (для отраженных волн) либо нижние (для падающих волн) знаки.

Отметим, что ввиду равенства $k_{q4} = ik_{q3}$ величины λ_{q4} всегда мнимые и соответствуют затухающим изгибным волнам. Прочие волновые числа λ_{q1}, λ_{q2}, λ_{q3} в зависимости от частоты, угла падения и параметров пластин могут быть как вещественными – случай распространяющихся волн, так и мнимыми – случай затухающих волн. Последнее имеет место при полном внутреннем отражении.

Пусть теперь источником поля служит прямолинейная волна $\mathbf{U}_{qj}^{-}(x_q)$ с номером j, набегающая по пластине с номером q. Тогда поле в пластине с номером m имеет вид

$$\mathbf{U}_m(x_m) = \widetilde{\alpha}\left(\delta_{mq}\mathbf{U}_{qj}^{-}(x_q) + \sum_{l=1}^{4}\tau_{mqlj}\mathbf{U}_{ml}^{+}(x_m)\right). \qquad (3.7)$$

Здесь: $\widetilde{\alpha}$ – коэффициент (размерный) задающий амплитуду возбуждающей волны, $\tau_{mqlj}(\mu)$ – относительный коэффициент возбуждения l-й волны в m-й пластине, если источником поля является волна $\mathbf{U}_{qj}^{-}(x_q)$; δ_{mq} – символ Кронекера.

В качестве источника встречного по оси Oy поля выберем волну с номером j', набегающую по q'-ой пластине

$$\widetilde{\mathbf{U}}_m(x_m) = \widetilde{\beta}\left(\delta_{mq'}\widetilde{\mathbf{U}}_{q'j'}^{-}(x_{q'}) + \sum_{l'=1}^{4}\tau_{mq'l'j'}\widetilde{\mathbf{U}}_{ml'}^{+}(x_m)\right).$$

Воспользуемся частным принципом взаимности в форме (3.4):

$$\sum_{m=1}^{n}\{\mathbf{U}_m(x_m),\widetilde{\mathbf{U}}_m(x_m)\}=\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\Big\{2\delta_{qq'}\varphi^{--}_{qjj'}e^{-i(\lambda_{qj}+\lambda_{qj'})x_q}+$$

$$\sum_{l=1}^{4}\tau_{q'qlj}(\mu)\varphi^{+-}_{q'lj'}e^{i(\lambda_{q'l}-\lambda_{q'j'})x_{q'}}+\sum_{l'=1}^{4}\tau_{qq'l'j'}(-\mu)\varphi^{-+}_{qjl'}e^{i(\lambda_{ql'}-\lambda_{qj})x_q}+$$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{4}\sum_{l'=1}^{4}\tau_{mqlj}(\mu)\tau_{mq'l'j'}(-\mu)\varphi^{++}_{mll'}e^{i(\lambda_{ml}+\lambda_{ml'})x_m}\Big\}=0. \qquad (3.8)$$

Здесь величины

$$\varphi^{\pm+}_{mjj'}=\{\mathbf{U}^{\pm}_{mj}(x_m),\widetilde{\mathbf{U}}^{+}_{mj'}(x_m)\}e^{-i(\pm\lambda_{mj'}+\lambda_{mj'})x_m},$$

$$\varphi^{\pm-}_{mjj'}=\{\mathbf{U}^{\pm}_{mj}(x_m),\widetilde{\mathbf{U}}^{-}_{mj'}(x_m)\}e^{-i(\pm\lambda_{mj'}-\lambda_{mj'})x_m} \qquad (3.9)$$

не зависят от абсциссы x_m (экспоненциальный множитель, возникающий при счете $\{\mathbf{U}^{\pm}_{mj}(x_m),\widetilde{\mathbf{U}}^{\pm}_{mj'}(x_m)\}$ скомпенсирован).

Переменные x_m для разных значений m между собой никак не связаны, а экспоненты с разными коэффициентами в показателях при одинаковых аргументах являются линейно независимыми. Поэтому для выполнения равенства (3.8) необходимо потребовать обращения в нуль итоговых множителей при каждой отдельной экспоненте, и в частности, свободного члена:

$$\tau_{q'qj'j}(\mu)\varphi^{+-}_{q'j'j'}+\tau_{qq'jj'}(-\mu)\varphi^{-+}_{qjj}=0. \qquad (3.10)$$

Для коэффициентов φ^{+-}_{mjj} (см. [13]) имеем выражения:

$$\begin{gathered}\varphi^{+-}_{m11}=2\rho_m h_m\omega^3\lambda_{m1},\quad \varphi^{+-}_{m22}=2\rho_m h_m\omega^3\lambda_{m2},\\ \varphi^{+-}_{m33}=4\rho_m h_m\omega^3\lambda_{m3},\quad \varphi^{+-}_{m44}=4\rho_m h_m\omega^3\lambda_{m4},\\ \varphi^{-+}_{mjj}=-\varphi^{+-}_{mjj}.\end{gathered} \qquad (3.11)$$

Нетрудно убедиться (это мы сделаем ниже в п. 7), что выражение $|\widetilde{\alpha}|^2\varphi^{+-}_{mjj}$ $(j=1,2,3)$ в том случае, когда волна $\alpha\mathbf{U}^{+}_{mj}(x_m)e^{i\mu y}$ является распространяющейся, дает учетверенную величину составляющей плотности потока энергии в направлении оси Ox_q. Равенства (3.11) имеют место и для затухающих волн (т.е. для $j=4$ всегда, а для $j=1,2,3$ при полном внутреннем отражении), хотя в этом случае физическая интерпретация другая. Ниже мы используем величины φ_{mjj}^{+-} для нормировки базисных векторов, не ограничивая себя рассмотрением бегущих волн (как это мы делали в п. 2).

4. Матрица трансформации. От базисных векторов $\mathbf{U}_{qj}^{\pm}(x_q)$ перейдем (см. [13]) к нормированным базисным векторам $\mathring{\mathbf{U}}_{qj}^{\pm}(x_q)$ по формуле

$$\mathring{\mathbf{U}}_{qj}^{\pm}(x_q) = 2\mathbf{U}_{qj}^{\pm}(x_q)\Big/\sqrt{\varphi_{qjj}^{+-}}.$$

В соответствии с этим выражение (3.7) для поля $\mathbf{U}_m(x_m)$ примет вид

$$\mathbf{U}_m(x_m) = \alpha_{qj}\left(\delta_{mq}\mathring{\mathbf{U}}_{qj}^{-}(x_q) + \sum_{l=1}^{4} t_{mqlj}(\mu)\mathring{\mathbf{U}}_{ml}^{+}(x_m)\right).$$

Здесь положено

$$\alpha_{qj} = \frac{\widetilde{\alpha}_{qj}}{2}\sqrt{\varphi_{qjj}^{+-}}.$$

$$t_{mqlj}(\mu) = \sqrt{\frac{\varphi_{mll}^{+-}}{\varphi_{qjj}^{+-}}}\,\tau_{mqlj}(\mu). \tag{4.2}$$

Заметим, что в выражениях аналогичных (4.2), в работе [13] допущена ошибка.

Введенную таким образом матрицу $\mathbf{T} = \{t_{qq'jj'}\}$, $(q, q' = 1, 2, \ldots, n;\ j, j' = 1, 2, 3, 4)$ будем называть матрицей трансформации (блок расширенной матрицы рассеяния). Она задает степерь трансформации волны с номером j', набегающей по пластине с номером q', в волну с номером j, уходящую по q-ой пластине. Матрица $\mathbf{T}$ представляет собой квадратную матрицу размерности $4n$.

С учетом (4.1) равенство (3.10), выражающее принцип взаимности, запишется так

$$t_{q'qj'j}(\mu) = t_{qq'jj'}(-\mu). \tag{4.2}$$

Определим транспонирование матрицы с четырьмя индексами как взаимную замену двух пар индексов q и q', j и j', тогда равенство (4.2), выражающее частный принцип взаимности, в матричной форме может быть записано в виде, идентичном указанному в работе [13]

$$\mathbf{T}^t(\mu) = \mathbf{T}(-\mu). \tag{4.3}$$

Удобно представить матрицу $\mathbf{T}$, в виде квадратной "суперматрицы" $\{\mathbf{T}_{pq}\}$ размерности $n \times n$ $(q, q' = 1, 2, \dots, n)$, элементами которой являются матрицы $\mathbf{T}_{pq}$, размерности 4×4

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \dots & \mathbf{T}_{1n} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \dots & \mathbf{T}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_{n1} & \mathbf{T}_{n2} & \dots & \mathbf{T}_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$
$$\mathbf{T}_{pq} = \begin{pmatrix} t_{pq11} & t_{pq12} & t_{pq13} & t_{pq14} \\ t_{pq21} & t_{pq22} & t_{pq23} & t_{pq24} \\ t_{pq31} & t_{pq32} & t_{pq33} & t_{pq34} \\ t_{pq41} & t_{pq42} & t_{pq43} & t_{pq44} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{T}_{pq}$ задает при этом степень возбуждения волн в p-ой пластине волнами набегающими по пластине с номером q.

Пусть вектор $\boldsymbol{\alpha}_q = (\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \alpha_{q3}, \alpha_{q4})$ задает состав падающего поля

$$\mathbf{U}_q^-(x_q) = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{qj} \mathring{\mathbf{U}}_{qj}^-(x_q)$$

падающего на сочление пластин по пластине с номером q. Тогда порожденное им поле $\mathbf{U}_p^+(x_p)$, расходящееся в пластине с номером p, имеет вид

$$\mathbf{U}_p^+(x_p) = \sum_{l=1}^{4} \beta_{pl} \mathring{\mathbf{U}}_{pl}^+(x_p)$$

где вектор $\boldsymbol{\beta}_p = (\beta_{p1}, \beta_{p2}, \beta_{p3}, \beta_{p4})^t$ определяется с помощью матрицы T_{pq} по формуле

$$\boldsymbol{\beta}_p = \mathbf{T}_{pq} \boldsymbol{\alpha}_q.$$

Применительно к матрицам $\mathbf{T}_{pq}$ принцип взаимности имеет вид

$$\mathbf{T}_{qp}^t(\mu) = \mathbf{T}_{pq}(-\mu)$$

и, в частности, для матриц $\mathbf{T}_{qq}$, расположенных на диагонали суперматрицы $(p = q)$, выражает обычный принцип взаимности для каждой из полубесконечных пластин рассматриваемой модели, который был сформулирован в [13]. Следует подчеркнуть, что принцип взаимности не предполагает энергетической изоляции объекта, для которого он рассматривается. В соответствии с этим, он справедлив не только для системы в целом, но и для любой ее части, состоящей в энергетическом контакте с прочими элементами системы.

Если ввести теперь "супервекторы" $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \ldots, \alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \alpha_{q3}, \alpha_{q4}, \ldots, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \alpha_{n4})^t,$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \ldots, \beta_{p1}, \beta_{p2}, \beta_{p3}, \beta_{p4}, \ldots, \beta_{n1}, \beta_{n2}, \beta_{n3}, \beta_{n4})^t,$$

задающие полные составы падающего и трансформированное полей во всех пластинах, то матрица трансформации $\mathbf{T}$ устанавливает между ними следующую связь

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha}. \tag{4.5}$$

5. Расчет матрицы трансформации. Матричный метод вычисления трансформации волн на узловом сочленении пластин с использованием итоговой формулы типа (4.5) описан в [6]. Однако матрица $\mathbf{T}$ этой работы отлична от введенной выше матрицы трансформации, поскольку нормировка затухающих волн в [6] осуществлялась произвольным образом. Поэтому целесообразно повторить рассмотрения соответствующей части работы [6], внося в формулы надлежащие уточнения. Зависимость полей от переменных y и t, задаваемая фактором $\exp(i\mu y - i\omega t)$, будет попрежнему опускаться.

В качестве основной кинематической переменной условимся впредь использовать вектор $\mathbf{V}_q(x_q)$ скорости смещений пластины с номером q

$$\mathbf{V}_q(x_q) = -i\omega \mathbf{U}_q(x_q).$$

С учетом равенств $\mathbf{V}^{\pm}_{qj}(x_q) = -i\omega \overset{\circ}{\mathbf{U}}{}^{\pm}_{qj}(x_q)$ введем нормированный базис $\mathbf{V}^{\pm}_{qj}(x_q)$. Имеем

$$\mathbf{V}^{\pm}_{q1}(x_q) = \sqrt{\frac{2}{\rho_q h_q \omega \lambda_{q1}}} \begin{pmatrix} \pm\lambda_{q1} \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\pm i\lambda_{q1}x},$$

$$\mathbf{V}^{\pm}_{q2}(x_q) = \sqrt{\frac{2}{\rho_q h_q \omega \lambda_{q2}}} \begin{pmatrix} -\mu \\ \pm\lambda_{q2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\pm i\lambda_{q2}x}, \tag{5.1}$$

$$\mathbf{V}_{q3}^{\pm}(x_q) = \sqrt{\frac{2}{\rho_q h_q \omega \lambda_{q3}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ i\lambda_{q3} \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\pm i\lambda_{q3} x},$$

$$\mathbf{V}_{q4}^{\pm}(x_q) = \sqrt{\frac{2}{\rho_q h_q \omega \lambda_{q4}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \\ i\lambda_{q4} \end{pmatrix} \mathbf{e}^{\pm i\lambda_{q4} x}.$$

В случае, если λ_{qj} является мнимым положительным числом (т.е. при полном внутреннем отражении одной из первых трех типов волн и всегда для четвертого типа волн) радикал $\sqrt{\lambda_{qj}}$ следует понимать так

$$\sqrt{\lambda_{qj}} = e^{i\pi/4}\sqrt{|\lambda_{qj}|}.$$

Разложение произвольного поля скоростей $\mathbf{V}_q(x_q)$ в пластине с номером q по базису $\mathbf{V}_{qj}^{\pm}(x_q)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ имеет вид

$$\mathbf{V}_q(x_q) = \sum_{j=1}^{4} \beta_{qj} \mathbf{V}_{qj}^{+}(x_q) + \sum_{j=1}^{4} \alpha_{qj} \mathbf{V}_{qj}^{-}(x_q). \tag{5.2}$$

Введем матрицы $\mathbf{V}_q^{\pm}$ и $\mathbf{\Lambda}_q^{\pm}$

$$\mathbf{V}_q^{\pm} = \mathrm{diag}(\mathbf{V}_{qs}^{\pm}, \mathbf{V}_{qa}^{\pm}),$$

$$\mathbf{V}_{qs}^{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\rho_2 h_q \omega}} \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_{q1}} & -\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_{q2}}} \\ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_{q1}}} & \pm\sqrt{\lambda_{q2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_{qa}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\rho_2 h_q \omega}} \begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda_{q13}}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda_{q4}}} \\ i\sqrt{\lambda_{q3}} & i\sqrt{\lambda_{q4}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}_q^{\pm} = \mathrm{diag}(e^{\pm i\lambda_{q1} x_q}, e^{\pm i\lambda_{q2} x_q}, e^{\pm i\lambda_{q3} x_q}, e^{\pm i\lambda_{q4} x_q}).$$

С помощью матриц $\mathbf{V}_q^{\pm}$ и $\mathbf{\Lambda}_q^{\pm}$ равенству (5.2) можно придать вид

$$\mathbf{V}_q(x_q) = \mathbf{V}_q^{+}\mathbf{\Lambda}_q^{+}\boldsymbol{\beta}_q + \mathbf{V}_q^{-}\mathbf{\Lambda}_q^{-}\boldsymbol{\alpha}_q. \tag{5.3}$$

Аналогичным образом поле сил в пластине может быть записано так

$$\mathbf{F}_q(x_q) = -\mathbf{F}_q^{+}\mathbf{\Lambda}_q^{+}\boldsymbol{\beta}_q - \mathbf{F}_q^{-}\mathbf{\Lambda}_q^{-}\boldsymbol{\alpha}_q. \tag{5.4}$$

Здесь

$$\mathbf{F}_q^{\pm} = \mathrm{diag}\,(\mathbf{F}_{qs}^{\pm}, \mathbf{F}_{qa}^{\pm}),$$

$$\mathbf{F}_{qs}^{\pm} = \sqrt{2\rho_q h_q \omega} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{q1}^2 + \sigma_q \mu^2}{k_{q1}^2 \sqrt{\lambda_{q1}}} & \mp \frac{2\mu\sqrt{\lambda_{q2}}}{k_2^2} \\ \pm(1-\sigma_q)\frac{\mu\sqrt{\lambda_{q1}}}{k_{q1}^2} & \frac{\lambda_{q2}^2 - \mu^2}{k_{q2}^2\sqrt{\lambda_{q2}}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{qa}^{\pm} = \sqrt{2\rho_q h_q \omega} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\lambda_{q3}}}{k_{q3}^3}(k_{q3}^2 + (1-\sigma_q)\mu^2) & \frac{\sqrt{\lambda_{q4}}}{k_{q4}^3}(k_{q4}^2 + (1-\sigma_q)\mu^2) \\ \pm i\frac{k_{q3}^2 - (1-\sigma_q)\mu^2}{k_{q3}^3\sqrt{\lambda_{q3}}} & \pm i\frac{k_{q4}^2 - (1-\sigma_q)\mu^2}{k_{q4}^3\sqrt{\lambda_{q4}}} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся граничными условиями (3.5) на стыке пластин. Имеем

$$\sum_{q=1}^{n} \mathbf{Q}_q \mathbf{F}_q^{+} \alpha_q + \sum_{q=1}^{n} \mathbf{Q}_q \mathbf{F}_q^{-} \boldsymbol{\beta}_q = 0,$$

$$\mathbf{Q}_1(\mathbf{V}_1^{+}\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{V}_1^{-}\boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{Q}_2(\mathbf{V}_2^{+}\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{V}_2^{-}\boldsymbol{\alpha}_2) = \ldots$$

$$\ldots = \mathbf{Q}_n(\mathbf{V}_n^{+}\boldsymbol{\beta}_n + \mathbf{V}_n^{-}\boldsymbol{\alpha}_n) \equiv \mathbf{v}.$$

Падающее поле, характеризуемое “супервектором” $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)^t$, предполагаем известным. Решая эту систему относительно $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n)^t$, получим

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}\boldsymbol{\alpha},$$

где $\mathbf{T}$ определяется формулой (4.4), в которой

$$\mathbf{T}_{pq} = (\mathbf{V}_p^{+})^{-1}\mathbf{Q}_p^{-1}(\mathbf{Y}^{-1}(\mathbf{Y}_q^{-} - \mathbf{Y}_q) + \mathbf{E}\delta_{pq})\mathbf{Q}_q\mathbf{V}_q^{-}, \qquad (5.5)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \ldots + \mathbf{Y}_n \qquad (5.6)$$

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{Q}_p\mathbf{F}_p^{+}(\mathbf{V}_p^{+})^{-1}\mathbf{Q}_p^{-1}, \quad \mathbf{Y}_p^{-} = \mathbf{Q}_p\mathbf{F}_p^{-}(\mathbf{V}_p^{-})^{-1}\mathbf{Q}_p^{-1}, \qquad (5.7)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Матричные величины $\mathbf{Y}_p^{\pm}$ будем называть волновыми проводимостями (адмитансами), поскольку формула (5.6) означает, что при параллельном соединении пластин они складываются.

6. Численный пример матрицы трансформации. Для большей наглядности приведем пример матрицы трансформации вибрационных волн на узловом сочленении пластин. Во избежание громоздкости ограничимся случаем двух пластин. Программа расчета составлена О. Б. Аграновой.

Пластины выберем стальными с плотностями $\rho_1 = \rho_2 = 7800$кг/м^3, модулями Юнга $E_1 = E_2 = 2,0610^{11}$н/м, модулями Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$ и толщинами $h_1 = 0,01$м, $h_2 = 0,03$м. Потери в материале учитывать не будем. Угол сочленения пластин равен $110°$. Все матрицы соответствуют углу падения изгибной волны θ_3 (отсчитанному от нормали) равному $3°$ и описывают трансформацию всех видов волн во все (привязка к изгибной волне используется только для вычисления величины $\mu = k_3 \sin\theta_3$.

Матрицы сосчитаны для частоты 500гц (таблица 1). В этом случае имеет место полное внутреннее отражение лишь для самой быстрой волны – продольной. Коэффициенты трансформации распространяющихся волн в распространяющиеся (классическая матрица рассеяния **S**) выделены жирным шрифтом.

Таблица 1

$\mathbf{T}_{11}$			
$-0.455+0.104i$	$0.258-0.009i$	$-0.011-0.074i$	$+0.091+0.049i$
$-0.258+0.009i$	**0.664+0.270i**	**+0.208+0.122i**	$-0.145+0.212i$
$0.011+0.047i$	**0.208+0.122i**	**+0.086-0.871i**	$+1.267+0.044i$
$-0.091-0.049i$	$-0.145+0.212i$	$+1.267+0.044i$	$+0.007+0.902i$
$\mathbf{T}_{12}$			
$0.817-0.061i$	$0.136-0.082i$	$-0.267+0.204i$	$-0.078+0.312i$
$0.018+0.071i$	**-0.081+0.075i**	**+0.011-0.645i**	$-0.349-0.529i$
$-0.072-0.024i$	**0.172+0.195i**	**+0.301+0.135i**	$-0.332-0.120i$
$0.021-0.028i$	$-0.024+0.251i$	$-0.250+0.056i$	$+0.349-0.231i$
$\mathbf{T}_{21}$			
$0.817-0.016i$	$-0.018-0.071i$	$+0.072+0.024i$	$-0.021+0.028i$
$-0.136+0.082i$	**-0.081+0.075i**	**+0.172+0.195i**	$-0.024+0.251i$
$0.267-0.204i$	**0.011-0.645i**	**+0.301+0.135i**	$-0.250+0.056i$
$0.078-0.312i$	$-0.349-0.529i$	$-0.332-0.120i$	$+0.349-0.231i$
$\mathbf{T}_{22}$			
$0.535+0.051i$	$0.159-0.163i$	$+0.101-0.168i$	$-0.025-0.204i$
$-0.159+0.163i$	**0.953+0.075i**	**-0.020-0.071i**	$+0.007-0.095i$
$-0.101+0.168i$	**-0.020-0.071i**	**+0.673-0.129i**	$-0.179+0.095i$
$0.025+0.204i$	$0.007-0.095i$	$-0.179+0.095i$	$+0.772+0.289i$

В приведенном численном примере изотропность рассматриваемой модели реализуется как соотношение

$$t_{pqrs} = \pm t_{qpsr}.$$

При этом знак плюс характерен для трансформации продольных волн в продольные и поперечных (изгибных, сдвиговых) в поперечные. Знак минус возникает при взаимной трансформации продольных волн в поперечные и наоборот.

Не должны смущать также большие значения (> 1) модулей некоторых элементов (коэффициентов отражения и трансформации) в случаях, когда источником поля является нераспространяющаяся волна. Это не является нарушением закона сохранения энергии, поскольку поток энергии, вносимой в систему, здесь определяется не просто модулем амплитуды падающей волны, а произведением этого модуля на мнимую часть соответствующего диагонального элемента матрицы (см. п. 8).

7. Закон сохранения энергии при падении распространяющейся волны. Матрица рассеяния. Принцип взаимности позволил нам сформулировать некоторое свойство симметрии матрицы трансформации. На основании закона сохранения энергии можно прийти к другим полезным свойствам этой матрицы, имеющим место, однако, лишь при отсутствии потерь в системе. Рассмотрим составляющую потока энергии, нормальную по отношению к линии скрепления пластин. Для пластины с номером m она имеет вид:

$$\Pi_{mx} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{E_m h_m \omega}{2(1-\sigma_m^2)} \times \right.$$
$$\times \left[u_m^* \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \sigma_m \frac{\partial v_m}{\partial y} \right) + \frac{1-\sigma_m}{2}\, v_m^* \left(\frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \right) \right] +$$
$$+ D_m \omega \left[\sigma_m \Delta w_m \frac{\partial w_m^*}{\partial x_m} + \left(\frac{\partial w_m^*}{\partial x_m}\, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial w_m^*}{\partial y}\, \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_m \partial y} \right) - \right.$$
$$\left.\left. - w_m^* \frac{\partial}{\partial x_m}\, \Delta w_m \right] \right\}. \tag{7.1}$$

Потоки энергии для распространяющихся волн различных типов аддитивны (не взаимодействуют). Также нет взаимодействия и при встречном движении двух распространяющихся волн одного типа – величина суммарного потока двух таких волн равна разности величин соответствующих потоков, а итоговый поток энергии направлен в сторону волны с большей амплитудой. Вычисление абсолютной величины потока энергии Π_{mj}, переносимой распространяющейся волной $\mathbf{u}(x,y) = \widetilde{\alpha}\mathbf{U}^{\pm}_{mj}(x_m)\exp(\pm i\mu y)$ (см. формулы (3.6)) с (размерной) амплитудой $\widetilde{\alpha}$ согласно (7.1) приводит к следующему результату

$$\Pi_{mj} = \frac{1}{4}\varphi^{+-}_{mjj}|\widetilde{\alpha}|^2.$$

Пусть падающая распространяющаяся волна с номером r, набегающая по пластине с номером p и имеющая амплитуду $\widetilde{\alpha}$ является источником поля. Обозначим Π_{in} энергию, вносимую ею в систему

$$\Pi_{in} = \frac{1}{4}\,\varphi^{+-}_{prr}|\widetilde{\alpha}|^2. \tag{7.2}$$

Совокупная энергия Π_{out}, уносимая расходящимися волнами, порожденными этой волной, имеет вид

$$\Pi_{out} = \frac{1}{4}\,|\widetilde{\alpha}|^2 \sum_{m=1}^{n}\sum_{j}\varphi^{+-}_{mjj}|\tau_{mpjr}|^2,$$

причем суммирование по j распространяется только на бегущие волны и может быть различным для различных пластин. В силу закона сохранения энергии (после сокращения на $(1/4)|\alpha|^2$) имеем равенство

$$\varphi^{+-}_{prr} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j}\varphi^{+-}_{mjj}|\tau_{mpjr}|^2.$$

Переходя от коэффициентов τ_{mpjr} к коэффициентам матрицы трансформации t_{mpjr}, получим равенство

$$1 = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j}|t_{mpjr}|^2, \tag{7.3}$$

выражающее закон сохранения энергии в терминах матрицы трасформации. Очевидно, что квадраты модулей коэффициентовэтой матрицы имеют смысл долей энергии, уносимых соответствующими волнами. Аналогичное нормировочное равенство справедливо и для строк матрицы $\mathbf{T}$. Для доказательства этого достаточно рассмотреть волновой процесс с зависимостью от y в виде множителя $\exp(-i\mu y)$, получить из закона сохранения энергии равенство

$$1 = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j} |t_{mpjr}(-\mu)|^2$$

для матрицы $\mathbf{T}(-\mu)$ и воспользоваться принципом взаимности (4.3).

Традиционным путем, рассматривая поле, возбужденное двумя падающими распространяющимися волнами $\widetilde{\alpha}\mathbf{U}^{-}_{pr}(x_p)$ и $\widetilde{\beta}\mathbf{U}^{-}_{qs}(x_q)$ получим для матрицы равенство

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{j} t_{mpjr} t^{*}_{mqjs} = 0. \tag{7.4}$$

Таким образом, после вычеркивания из матрицы $\mathbf{T}$ строк и столбцов, соответствующих нераспространяющимся волнам, остается унитарная (в силу (7.3) и (7.4)) матрица. Она входит как в матрицу рассеяния, так и в матрицу трансформации. Унитарная часть матрицы трансформации в примере предыдущего пункта лежит на пересечении второго, третьего, шестого и седьмого столбцов со строками с теми же номерами.

Как и для матрицы трансформации (4.3) для расширенной матрицы рассеяния справедлив принцип взаимности, выражающийся формулой

$$\mathbf{S}^{t}_{e} = \mathbf{S}_{e}.$$

8. Закон сохранения энергии для случая падения нераспространяющейся волны. Обратимся к рассмотрению строк и столбцов матрицы $\mathbf{T}$, соответствующим нераспространяющимся волнам и соответственно не входящим в матрицу $\mathbf{S}$. Отметим, что характерным, хотя и необязательным их признаком является наличие в их составе элементов, превосходящих единицу по модулю. Квадраты модулей коэффициентов матрицы $|t_{mpjr}|^2$, расположенные в таких строках и столбцах, относящиеся к распространяющимся волнам, по-прежнему, выражают здесь некоторые относительные количества энергии, уносимые расходящимися волнами. Эта энергия возникает в результате взаимодействия падающей и отраженной нераспространяющихся волн.

Пусть комплексная амплитуда падающей нераспространяющейся волны $\mathbf{U}_{ps}^{-}$ равна $\widetilde{\alpha}$, а отраженной нераспространяющейся волны $\mathbf{U}_{ps}^{+}$, соответственно, $\widetilde{\alpha}\tau_{ppss}$. Вычисляя по формуле (7.1) поток энергии, переносимой такой парой волн, получим:

$$\Pi_{ps} = \frac{1}{2}\,|\varphi_{pss}^{+-}|\,\mathrm{Im}\,\tau_{ppss}. \tag{8.1}$$

В силу закона сохранения энергии эти потоки должны равняться суммарным энергиям, уносимым от сочленения пластин распространяющимися волнами:

$$\frac{1}{2}\,|\varphi_{pss}^{+-}|\,\mathrm{Im}\,\tau_{ppss} = \frac{1}{4}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j}\varphi_{mjj}^{+-}|\tau_{mpjs}|^2. \tag{8.2}$$

Переходя от коэффициентов τ_{mpjs} к элементам t_{mpjs} матрицы трансформации, получим

$$2\,\mathrm{Im}\,t_{ppss} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j}|t_{mpjs}|^2. \tag{8.3}$$

Данные равенства справедливы соответственно для 1, 4, 5 и 8 столбцов матрицы, приведенной в таблице 1.

Утверждение (8.3) имеет некоторое сходство с оптической теоремой [17, 18]. Помимо очевидного внешнего сходства в обоих случаях речь идет о законе сохранения энергии для процессов с различной природой источника энергии и механизма ее рассеяния. В рассмотренных в [17, 18] ситуациях источником поля является плоская падающая волна, а рассеяние энергии определяется расходящимися от препятствия цилиндрическими (сферическими) волнами. В нашем случае в этих ролях выступают, соответственно, нераспространяющиеся и распространяющиеся волны. Отметим также и принципиальное отличие физического смысла равенств (8.3) от оптической теоремы. В классической теории рассеяния всегда рассматриваются источники поля непосредственно переносящие энергию. В данном случае процесс переноса энергии осуществляется лишь в результате взаимодействия двух волн, каждая из которых непосредственно энергию не переносит.

Подчеркнем, что равенства (8.3) имеют место для столбцов матрицы трансформации не входящих в матрицу рассеяния.

9. Заключение. Данная работа посвящена общей теории процесса трансформации упругих волн на жестком узловом сочленении произвольного числа тонких пластин. Введено понятие матрицы трансформации, дан способ ее вычисления, приведен численный пример, проведено исследование ее свойств, вытекающих из принципа взаимности и закона сохранения энергии. Получено, в частности, новое соотношение ("акустическая теорема"), выражающее закон сохранения энергии для случая, когда источником поля служит волна, затухающая в направлении стыка пластин.

Несмотря на то, что объект исследования конкретен, использованная теоретическая процедура обладает значительной общностью. Данная схема без принципиальных изменений может быть перенесена на родственные волновые модели произвольной физической природы. При надлежащем введении матрицы трансформации для нее также будут иметь место подобные полученным выше свойства, вытекающие из принципа взаимности и закона сохранения энергии.

Перечислим теперь основные типы моделей, в которых применима использованная выше теоретическая схема.

1. Угловая структура одномерных носителей волновых процессов.

Основным механическим примером моделей такого типа является произвольная система полубесконечных упругих стержней. Концы стержней соединены друг с другом непосредственно или через произвольную ограниченную упругую структуру. Если считать, что в каждом стержне может существовать шесть нормальных волн (в симметричном стержне: продольная, крутильная и четыре изгибных), то матрица трансформации здесь имеет структуру, определенную формулой (4.4), причем размер субматриц $\mathbf{T}_{pq}$ равен 6×6. В отличие от нашей модели, в которой положение пластины в пространстве характеризовалось одним углом, а матрица $\mathbf{T}$ зависела от одного параметра (составляющей μ волнового числа, $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mu)$), здесь пространственное расположение стержней определяется двумя угловыми координатами, а свободный параметр отсутствует. Последнее обстоятельство приводит к упрощению процедуры использования принципа взаимности.

Другой типовой случай моделей этого класса – узловое сочленение волноводов произвольной физической природы с компактным сечением. Здесь матрицы $\mathbf{T}_{pq}$ счетномерны (с учетом конечного числа распространяющихся и счетного множества затухающих нормальных волн в волноводе).

Применению принципа взаимности при расчете волновых процессов в моделях этого класса, посвящена работа [12].

2. Узловая структура двумерных носителей волновых процессов.

Пример такой модели рассмотрен в настоящей работе. Наиболее общая ситуация состояла бы в узловой структуре плоских волноводов, непосредственно соединенных между собой или исходящих из резонатора.

3. Два полупространства с плоскими границами, заполненные средами, и контактирующие между собой непосредственно или через систему плоских слоев (в частном случае одно полупространство). Здесь угловые координаты, задающие расположение сред, отсутствуют, зато имеется два свободных параметра (две компоненты волнового вектора-проекции на границу полупространств).

Литература

1. L. Cremer, M. Heckl, *Körperschall. Physikalische Grundlagen und Technische Anwendungen.* Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York (1967).
2. А. С. Никифоров, С. В. Будрин, *Распространение и поглощение звуковой вибрации на судах.* Изд-во "Судостроение" Ленинград (1968).
3. М. Д. Генкин, В. П. Маслов, *Переход вибраций через звуковой мостик.* В кн.: Динамика и акустика машин. М., Наука (1971), 28–34.
4. P. G. Craven, B. M. Gibbs, *Sound transmission and mode coupling in junction of thin plates I. Representation of the problem.* J. of Sound and Vibr., **77**, No. 3 (1981), 417–427.
5. B. M. Gibbs, P. G. Craven, *Sound transmission and mode coupling in junction of thin plates II. Parametric survey.* J. of Sound and Vibr., **77**, No. 3 (1981), 429–435.
6. Д. П. Коузов, Т. С. Кравцова, В. Г. Яковлева, *О рассеянияя вибрационных волн на узловом сочленении пластин.* Акуст. ж., **35**, No. 4 (1989).
7. R. S. Langley, K. H. Heron, *Elastic wave transmission through plate/beam junction.* J. Sound and Vibr., **143**, No. 2 (1990), 241–253.
8. P. D. Lax, R. S. Phillips, *Scattering Theory.* New York-London (1967).
9. R. Mittra, S. W. Lee, *Analytical techniques in the theory of guided waves.* The Macmillan Company. New York-London (1971); русский перевод: Р. Митра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов, Москва "Мир" (1974).
10. В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., Наука (1978).

11. Л. Д. Фаддеев, О. А. Якубовский, *Лекции по квантовой механике для студентов-математиков.* Ленинград, изд-во Ленингр. ун-та (1980).
12. B. R. Mace, *Reciprocity, conservation of energy and some properties of reflection and transmission coefficients.* J. of Sound and Vibr., **155**, No. 2 (1992), 375–381.
13. D. P. Kouzov, V. G. Yakovleva, *On the Reciprocity Principle for the Transformation of Linear Waves at a Rectilinear Plate Edge.* Acustica, **81**, No. 2 (1995), 167–172.
14. D. P. Kouzov, G. L. Nikitin, O. B. Agranova, V. G. Yakovleva, *Transformation matrix of vibrational waves on a nodal junction of plates.* Day on diffraction'96 International seminar, St.-Petersburg, 1996, Abstracts, 15–16.
15. Д. П. Коузов, Г. Л. Никитин, О. Б. Агранова, В. Г. Яковлева, *Матрица трансформации.* Труды XXIII школы-семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург (1996), 65–90.
16. D. P. Kouzov, *Transformation matrix and the law of energy conserve for the inhomogeneous wave field stimulation.* Day on diffraction'99. International seminar. St. Petersbourg 1999, Abstracts, 25.
17. B. J. Barratt, W. D. Collins, *The Scattering Cross-section of an Obstacle in an Elastic Solid for Plane Harmonic Waves.* Proc. Cambridgs Philos. Soc., **61**, No. 4 (1965).
18. Б. П. Белинский, *Оптическая теорема для волн в упругой пластине.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **104** (1981), 20–23.

Kouzov D. P., Nikitin G. L., Yakovleva V. G. The matrix of the transforming of vibration waves.

Scattering of the linear vibration waves on a nodal junction of elastic plates is considered. For description of transforming (transmission, reflection, refraction and transformation into other types) of such waves we use the transformation matrix. We have proved for this matrix some usual properties related with the reciprocity principle and with conservation of energy. In the case when a source of field is evanescent wave we have found a new property of the generalized scattering matrix. This property reflects the conservation of energy at such process.

Морской государственный
технический университет
Санкт-Петербург

Поступило 3 декабря 1999 г.

Военный инженерно-технический
университет
Санкт-Петербург

Чувашский государственный университет
Чебоксары