Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Л. А. Молотков

ЭФФЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ БЛОЧНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ С КОНТАКТАМИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦАХ

Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича

Для изучения распространения волн в пористых и трещиноватых средах используются эффективные модели. Такими моделями, в частности, являются пористые среды Био, а также эффективные модели, полученные в результате осреднения слоистых и блочных структур. В последние годы был получен и исследован ряд новых эффективных моделей, описывающих чередующиеся упругие, жидкие и пористые слои с учетом различных контактов на границах [1–3].

Эффективные модели блочных структур представляют особый интерес при изучении волновых процессов в трещиноватых и пористых средах, поскольку такие модели могут описывать две системы параллельных трещин и среды с инородными включениями. В то же время вывод уравнений эффективных моделей блочных структур представляет дополнительные трудности, так как в этом случае осреднение проводится по двум или трем направлениям. Такое осреднение удалось провести в случае блочной упругой среды, в которой на границах имеет место контакт с проскальзыванием. Уравнения эффективной модели выводились с помощью осреднения сперва по одной, а затем по другой координате, при этом результат не зависел от порядка осреднения. Кроме того, с учетом граничных условий и малых размеров блоков устанавливались выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий и на основании этих выражений выводились уравнения, которые совпадали с уравнениями, полученными при осреднении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), гранты 99-01-00107, 99-05-64127.

Рассматриваемая в настоящей работе среда имеет такое же блочное строение, как и среда в работе [4], и отличается тем, что блоки являются пористыми средами Био. В случае, когда на границах имеет место контакт с проскальзыванием, эту блочную среду удается осреднить, при этом уравнения эффективной модели не зависят от порядка осреднения вдоль осей. На основании уравнений эффективной модели выводятся выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий и эти выражения являются обобщениями соответствующих формул работы [4]. Сама эффективная модель может рассматриваться как пятифазная среда, содержащая четыре упругих фазы и одну жидкую фазу. Анализ волнового поля в этой среде показывает, что в ней распространяются пять объемных волн. Проведенные исследования устанавливают форму волновых фронтов и уравнения, корни которых являются скоростями волн вдоль осей.

§1. Установление эффективной модели блочной среды

Пусть задана двумерная периодическая вдоль осей x и z пористая система $0 \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, в которой в направлениях осей x и z расположены соответственно n и $\widetilde{n}$ периодов с длинами h и $\widetilde{h}$ (рис. 1). Эта система разделяется на $n\widetilde{n}$ одинаковых

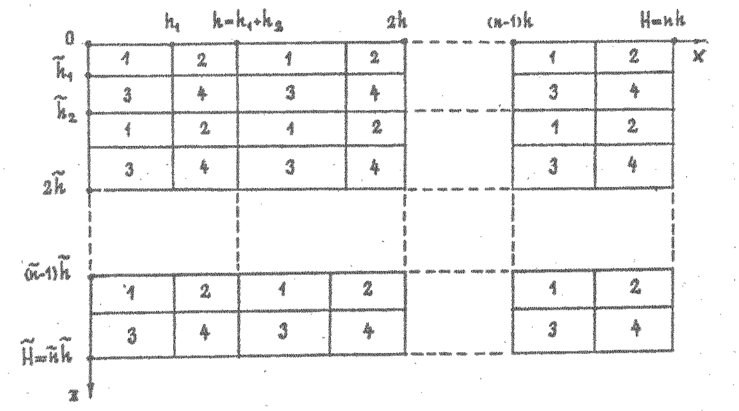

Рис. 1.

прямоугольных ячеек, размеры которых совпадают с длинами периодов h и $\widetilde{h}$. Каждая ячейка состоит из четырех однородных изотропных пористых сред Био, заполняющих прямоугольники 1, 2, 3 и 4, изображенные на рис. 1. Размеры первого, второго, третьего и четвертого прямоугольников выражаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} &h_1 = h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1; \\ &h_2 = h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_1; \\ &h_1 = h\varepsilon_1, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2; \\ &h_2 = h\varepsilon_2, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}\widetilde{\varepsilon}_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пористая среда Био с номером $i = 1, 2, 3, 4$ описывается [5, 6] уравнениями закона Гука

$$\begin{aligned} &\tau_{xxi} = H_i \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + B_i \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + C_i\left(\frac{\partial w_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right), \\ &\tau_{zzi} = B_i \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + H_i \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + C_i\left(\frac{\partial w_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right), \\ &-p_i = C_i \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + C_i \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + M_i\left(\frac{\partial w_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right), \\ &\tau_{xzi} = L_i\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

и уравнениями сплошной среды

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tau_{xxi}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xzi}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2} + \rho_{fi} \frac{\partial^2 w_{xi}}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial \tau_{xzi}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zzi}}{\partial z} = \rho_i \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2} + \rho_{fi} \frac{\partial^2 w_{zi}}{\partial t^2}, \\ &-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{fi} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2} + m_i \frac{\partial^2 w_{xi}}{\partial t^2}, \\ &-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{fi} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial t^2} + m_i \frac{\partial^2 w_{zi}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.2) и (1.3) u_{xi}, u_{zi} – смещения твердой фазы, w_{xi} и w_{zi} – относительные смещения жидкой фазы, τ_{xxi}, τ_{zzi}, τ_{xzi} – полные напряжения и p_i – давление в жидкой фазе. Коэффициенты в равенствах (1.2) являются модулями пористой среды.

Величины ρ_i и ρ_{fi} – средняя плотность и плотность жидкой фазы. Что касается коэффициента m_i, то он выражается соотношением

$$m_i = \rho_{fi}\alpha_i/\varepsilon \tag{1.4}$$

через коэффициент извилистости α_i и пористость ε_i. Матрицы

$$\begin{pmatrix} H_i & B_i & C_i \\ B_i & H_i & C_i \\ C_i & C_i & M_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_i, & \rho_{fi} \\ \rho_{fi}, & m_i \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

определяющие уравнения (1.2) и (1.3), предполагаются положительно определенными. Это предположение обеспечивает положительность плотностей потенциальной и кинетической энергий. На внутренних границах между пористыми средами имеет место контакт с проскальзыванием, который выражается условиями

$$\begin{aligned} &u_{x1} = u_{x2}, \quad w_{x1} = w_{x2}, \quad \tau_{xx1} = \tau_{xx2}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2} = 0, \\ &u_{x3} = u_{x4}, \quad w_{x3} = w_{x4}, \quad \tau_{xx3} = \tau_{xx4}, \quad \tau_{xz3} = \tau_{xz4} = 0, \\ &p_1 = p_2, \qquad p_3 = p_4 \end{aligned} \tag{1.6}$$

на границах, параллельных оси z, и условиями

$$\begin{aligned} &u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = w_{z3}, \quad \tau_{zz1} = \tau_{zz3}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz3} = 0, \\ &u_{z2} = u_{z4}, \quad w_{z2} = w_{z4}, \quad \tau_{zz2} = \tau_{zz4}, \quad \tau_{xz2} = \tau_{xz4} = 0, \\ &p_1 = p_3, \qquad p_2 = p_4 \end{aligned} \tag{1.7}$$

в случае границ, параллельных оси x. На внешних границах системы выполняются некоторые линейные краевые условия, но конкретный вид этих условий оказывается для нашей задачи несущественным. Также несущественным являются характер и расположение линейных источников, возбуждающих систему.

Для заданной системы блоков построим эффективную модель. С этой целью в волновом поле системы совершим предельный переход при условиях

$$\begin{aligned} &n \to \infty, \quad \widetilde{n} \to \infty, \quad h_1 \to 0, \quad \widetilde{h}_1 \to 0, \quad h_2 \to 0, \quad \widetilde{h}_2 \to 0, \\ &H = \text{const}, \quad \widetilde{H} = \text{const}, \quad \varepsilon_1 = \text{const}, \\ &\widetilde{\varepsilon}_1 = \text{const}, \quad \varepsilon_2 = \text{const}, \quad \widetilde{\varepsilon}_2 = \text{const} \end{aligned} \tag{1.8}$$

и выясним, каким уравнениям удовлетворяет предельное волновое поле. Эти уравнения описывают эффективную модель, учитывающую осреднение блочной структуры. Особенность этого осреднения состоит в том, что осреднение проводится одновременно по двум осям. Результаты такого осреднения с учетом контакта с проскальзыванием на границах совпадают с результатами осреднений сперва по одному из направлений, а затем по другому. Осреднение слоистых сред вдоль оси, перпендикулярной слоям, было исследовано в работе [2], где предлагается и обосновывается упрощенный способ осреднения. Этот способ может быть также использован и в случае двойного осреднения заданной системы.

Так как при $n \gg 1$ и $\widetilde{n} \gg 1$ внутренние границы становятся довольно частыми, то, согласно указанному способу, предположим, что граничные условия (1.6) и (1.7) выполняются не только на границах, но и во всей системе. Это предположение приводит к равенствам

$$
\begin{array}{lll}
t_{xzi}=0, & u_{x1}=u_{x2}=\widetilde{u}_x^{(1.2)}, & u_{x3}=u_{x4}=\widetilde{u}_x^{(3.4)}, \\
u_{z1}=u_{z3}=\widetilde{u}_z^{(1.3)}, & u_{z2}=u_{z4}=\widetilde{u}_z^{(2.4)}, & w_{x1}=w_{x2}=\widetilde{w}_x^{(1.2)}, \\
w_{z2}=w_{z4}=\widetilde{w}_z^{(2.4)}, & w_{x3}=w_{x4}=\widetilde{w}_x^{(3.4)}, & w_{z1}=w_{z3}=\widetilde{w}_z^{(1.3)}, \\
t_{zz1}=t_{zz3}=t_{zz}^{(1.3)}, & t_{xx1}=t_{xx2}=t_{xx}^{(1.2)}, & t_{xx3}=t_{xx4}=t_{xx}^{(3.4)}, \\
 & t_{zz2}=t_{zz4}=t_{zz}^{(2.4)}, & p_1=p_2=p_3=p_4=p,
\end{array}
\tag{1.9}
$$

связывающим смещения и напряжения в разных блоках. Производные этих величин определяются соотношениями

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \widetilde{u}_x^{(1.2)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial u_{x1}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial u_{x2}}{\partial x}, & \dfrac{\partial \widetilde{u}_x^{(3.4)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial u_{x3}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial u_{x4}}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{u}_z^{(1.3)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial u_{z1}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial u_{z3}}{\partial z}, & \dfrac{\partial \widetilde{u}_z^{(2.4)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial u_{z2}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial u_{z4}}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{w}_x^{(1.2)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial w_{x1}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial w_{x2}}{\partial x}, & \dfrac{\partial \widetilde{w}_x^{(3.4)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial w_{x3}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial w_{x4}}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial \widetilde{w}_z^{(1.3)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial w_{z1}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial w_{z1}}{\partial z}, & \dfrac{\partial \widetilde{w}_z^{(2.4)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial w_{z2}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial w_{z4}}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial \tau_{xx}^{(1.2)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial \tau_{xx2}}{\partial x}, & \dfrac{\partial \tau_{xx}^{(3.4)}}{\partial x}=\varepsilon_1\dfrac{\partial \tau_{xx2}}{\partial x}+\varepsilon_2\dfrac{\partial \tau_{xx4}}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial \tau_{zz}^{(1.3)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial \tau_{zz3}}{\partial z}, & \dfrac{\partial \tau_{zz}^{(2.4)}}{\partial z}=\widetilde{\varepsilon}_1\dfrac{\partial \tau_{zz2}}{\partial z}+\widetilde{\varepsilon}_2\dfrac{\partial \tau_{zz4}}{\partial z},
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} = \varepsilon_1 \frac{\partial p_3}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial p_4}{\partial x}, \\
&\frac{\partial p}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_3}{\partial z} = \widetilde{\varepsilon}_1 \frac{\partial p_2}{\partial z} + \widetilde{\varepsilon}_2 \frac{\partial p_4}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

соответствующими классическому определению производных по сокращающемуся промежутку.

Предельное волновое поле будет описываться 13 величинами

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{u}_x^{(1.2)}, \quad \widetilde{u}_x^{(3.4)}, \quad \widetilde{u}_z^{(1.3)}, \quad \widetilde{u}_z^{(2.4)}, \quad \widetilde{w}_x^{(1.2)}, \quad \widetilde{w}_x^{(3.4)}, \\
&\widetilde{w}_z^{(1.3)}, \quad \widetilde{w}_z^{(2.4)}, \quad \tau_{xx}^{(1.2)}, \quad \tau_{xx}^{(3.4)}, \quad \tau_{zz}^{(1.3)}, \quad \tau_{zz}^{(2.4)}, \quad p.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Эти величины и их производные введены соотношениями (1.9)–(1.10), и для вывода определяющих их уравнений необходимо из уравнений (1.2), (1.3), (1.9) и (1.10) исключить все величины, характеризующие поле смещений и напряжений в отдельных блоках. С этой целью из уравнений (1.2) выразим производные смещений $\partial u_{xi}/\partial x$, $\partial u_{zi}/\partial z$ и сумму производных $\partial w_{xi}/\partial x + \partial w_{zi}/\partial z$ и придем к соотношениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} = H_i' \tau_{xxi} + B_i' \tau_{zzi} - C_i' p_i, \\
&\frac{\partial u_{zi}}{\partial z} = B_i' \tau_{xxi} + H_i' \tau_{zzi} - C_i' p_i, \\
&\frac{\partial w_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial w_{zi}}{\partial z} = C_i' \tau_{xxi} + C_i' \tau_{zzi} - M_i' p_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

в которых матрица

$$
\begin{pmatrix}
H_i' & B_i' & C_i' \\
B_i' & H_i' & C_i' \\
C_i' & C_i' & M_i'
\end{pmatrix}
\tag{1.13}
$$

является обратной по отношению к первой матрице (1.5). Матрица (1.14) также является симметричной и положительно определенной. Используя два первых равенства (1.12) и четыре первых формулы (1.10), запишем соотношения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_x^{(1.2)}}{\partial x} &= H_{1.2}\tau_{xx}^{(1.2)} + B_1'\varepsilon_1\tau_{zz}^{(1.3)} + B_2'\varepsilon_2\tau_{zz}^{(2.4)} - C_{1.2}p,\\
\frac{\partial \widetilde{u}_x^{(3.4)}}{\partial x} &= H_{3.4}\tau_{xx}^{(3.4)} + B_3'\varepsilon_1\tau_{zz}^{(1.3)} + B_4'\varepsilon_2\tau_{zz}^{(2.4)} - C_{3.4}p,\\
\frac{\partial \widetilde{u}_z^{(1.3)}}{\partial z} &= B_1'\widetilde{\varepsilon}_1\tau_{xx}^{(1.2)} + B_3'\widetilde{\varepsilon}_2\tau_{xx}^{(3.4)} + H_{1.3}\tau_{zz}^{(1.3)} - C_{1.3}p,\\
\frac{\partial \widetilde{u}_z^{(2.4)}}{\partial z} &= B_2'\widetilde{\varepsilon}_1\tau_{xx}^{(1.2)} + B_4'\widetilde{\varepsilon}_2\tau_{xx}^{(3.4)} + H_{2.4}\tau_{zz}^{(2.4)} - C_{2.4}p,
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&H_{1.2} = H_1'\varepsilon_1 + H_2'\varepsilon_2, \quad H_{3.4} = H_3'\varepsilon_1 + H_4'\varepsilon_2,\\
&H_{1.3} = H_1'\widetilde{\varepsilon}_1 + H_3'\widetilde{\varepsilon}_2, \quad H_{2.4} = H_2'\widetilde{\varepsilon}_1 + H_4'\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&C_{1.2} = C_1'\varepsilon_1 + C_2'\varepsilon_2, \quad C_{3.4} = C_3'\varepsilon_1 + C_4'\varepsilon_2,\\
&C_{1.3} = C_1'\widetilde{\varepsilon}_1 + C_3'\widetilde{\varepsilon}_2, \quad C_{2.4} = C_2'\widetilde{\varepsilon}_1 + C_4'\widetilde{\varepsilon}_2,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Третье равенство (1.12) осредняется по всем четырем блокам одной ячейки. В результате приходим к уравнению

$$
\begin{gathered}
\widetilde{\varepsilon}_1\frac{\partial \widetilde{w}_x^{(1.2)}}{\partial x} + \widetilde{\varepsilon}_2\frac{\partial \widetilde{w}_x^{(3.4)}}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\partial \widetilde{w}_z^{(1.2)}}{\partial z} + \varepsilon_2\frac{\partial \widetilde{w}_z^{(3.4)}}{\partial z} =\\
= C_{12}\widetilde{\varepsilon}_1\tau_{xx}^{(1.2)} + C_{34}\widetilde{\varepsilon}_2\tau_{xx}^{(3.4)} + C_{13}\varepsilon_1\tau_{zz}^{(1.3)} + C_{24}\varepsilon_2\tau_{zz}^{(2.4)} - Mp,
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

в котором

$$
M = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1 M_1' + \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1 M_2' + \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2 M_3' + \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2 M_4'. \tag{1.17}
$$

Равенства (1.14) совместно с соотношением (1.16) образуют группу уравнений закона Гука для эффективной модели из пяти равенств. Помножим первое, второе, третье и четвертое уравнения (1.14) соответственно на $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2$, ε_1 и ε_2 и заменим смещения по формулам

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{u}_x^{(1.2)} = \widetilde{\varepsilon}_1 u_x^{(1.2)}, \quad \widetilde{u}_x^{(3.4)} = \widetilde{\varepsilon}_2 u_x^{(3.4)}, \quad \widetilde{u}_z^{(1.3)} = \varepsilon_1 u_z^{(1.3)},\\
&\widetilde{u}_z^{(2.4)} = \varepsilon_2 u_z^{(2.4)}, \quad \widetilde{w}_x^{(1.2)} = \widetilde{\varepsilon}_1 w_x^{(1.2)}, \quad \widetilde{w}_x^{(3.4)} = \widetilde{\varepsilon}_2 w_x^{(3.4)},\\
&\widetilde{w}_z^{(1.3)} = \varepsilon_1 w_z^{(1.3)}, \quad \widetilde{w}_z^{(2.4)} = \varepsilon_2 w_z^{(2.4)}.
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

Такая замена связана с тем, что после предельного перехода смещения, определенные в двух блоках, полезно распределить на всю ячейку. В результате уравнения закона Гука представляются матричным равенством

$$\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}, \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}, \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}, \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}, \frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial x}+\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+\frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}}=$$

$$= \mathbf{C}\left(\tau_{xx}^{(1.2)}, \tau_{xx}^{(3.4)}, \tau_{zz}^{(1.3)}, \tau_{zz}^{(2.4)}, -p\right)^{\mathsf{T}}, \tag{1.19}$$

где T – символ транспонирования и

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} H_{1.2}\widetilde{\varepsilon}_1 & 0 & B_1'\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1 & B_2'\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1 & C_{1.2}\widetilde{\varepsilon}_1 \\ 0 & H_{3.4}\widetilde{\varepsilon}_2 & B_3'\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2 & B_4'\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2 & C_{3.4}\widetilde{\varepsilon}_2 \\ B_1'\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1 & B_3'\varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_2 & H_{1.3}\varepsilon_1 & 0 & C_{1.3}\varepsilon_1 \\ B_2'\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1 & B_4'\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2 & 0 & H_{2.4}\varepsilon_2 & C_{2.4}\varepsilon_2 \\ C_{1.2}\widetilde{\varepsilon}_1 & C_{3/4}\widetilde{\varepsilon}_2 & C_{1.3}\varepsilon_1 & C_{2.4}\varepsilon_2 & M \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

На основании положительной определенности матриц (1.13) следует, что симметричная матрица $\mathbf{C}$ является положительно определенной. Используя существование обратной матрицы $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}$, запишем закон Гука в "обычной" форме

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}^{(1.2)} &= d_{11}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+d_{12}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+d_{13}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+d_{14}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}+d_{15}\widetilde{w},\\
\tau_{xx}^{(3.4)} &= d_{12}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+d_{22}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+d_{23}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+d_{24}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}+d_{25}\widetilde{w},\\
\tau_{zz}^{(1.3)} &= d_{13}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+d_{23}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+d_{33}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+d_{34}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}+d_{35}\widetilde{w},\\
\tau_{zz}^{(2.4)} &= d_{14}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+d_{24}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+d_{34}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+d_{44}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}+d_{45}\widetilde{w},\\
-p &= d_{15}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x}+d_{25}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x}+d_{35}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z}+d_{45}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z}+d_{55}\widetilde{w},
\end{aligned} \tag{1.21}$$

при этом

$$\widetilde{w} = \frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial x}+\frac{\partial w_x^{(3.4)}}{\partial x}+\frac{\partial w_z^{(1.3)}}{\partial z}+\frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial z}, \tag{1.22}$$

а d_{ik} – элементы матрицы $\mathbf{D}$, которая также является симметричной и положительно определенной. Чтобы найти матрицу $\mathbf{D}$ необходимо пройти три этапа: 1) На основании первой матрицы (1.5) найти ей обратную матрицу (1.13). 2) Используя элементы матрицы (1.13) и формулы (1.15), построить матрицу (1.20). 3) Найти матрицу $\mathbf{C}$, обратную матрице $\mathbf{D}$.

Более простым способом устанавливаются уравнения сплошной среды для эффективной модели. На основании соотношений (1.3), а также формул (1.10) и (1.18) приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{xx}^{(1.2)}}{\partial x}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}+\rho_{f12}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{xx}^{(3.4)}}{\partial x}=\rho_{34}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}+\rho_{f34}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{zz}^{(1.3)}}{\partial z}=\rho_{13}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}+\rho_{f13}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{zz}^{(2.4)}}{\partial z}=\rho_{24}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}+\rho_{f24}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_{f12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial t^2}+m_{12}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_{f34}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial t^2}+m_{34}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{f13}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial t^2}+m_{13}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho_{f24}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial t^2}+m_{24}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

в которых

$$
\begin{aligned}
&\rho_{12}=\rho_1\varepsilon_1+\rho_2\varepsilon_2, &&\rho_{34}=\rho_3\varepsilon_1+\rho_4\varepsilon_2,\\
&\rho_{13}=\rho_1\widetilde{\varepsilon}_1+\rho_3\widetilde{\varepsilon}_2, &&\rho_{24}=\rho_2\widetilde{\varepsilon}_1+\rho_4\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&\rho_{f12}=\rho_{f1}\varepsilon_1+\rho_{f2}\varepsilon_2, &&\rho_{f34}=\rho_{f3}\varepsilon_1+\rho_{f4}\varepsilon_2,\\
&\rho_{f13}=\rho_{f1}\widetilde{\varepsilon}_1+\rho_{f3}\widetilde{\varepsilon}_2, &&\rho_{f24}=\rho_{f2}\widetilde{\varepsilon}_1+\rho_{f4}\widetilde{\varepsilon}_2,\\
&m_{12}=m_1\varepsilon_1+m_2\varepsilon_2, &&m_{34}=m_3\varepsilon_1+m_4\varepsilon_2,\\
&m_{13}=m_1\widetilde{\varepsilon}_1+m_3\widetilde{\varepsilon}_2, &&m_{24}=m_2\widetilde{\varepsilon}_1+m_4\widetilde{\varepsilon}_2.
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Равенства (1.23) являются уравнениями сплошной среды и вместе с уравнениями (1.21) описывают эффективную модель рассматриваемой среды. Матрицы

$$
\begin{pmatrix}\rho_{ik} & \rho_{fik}\\ \rho_{fik} & m_{ik}\end{pmatrix},
\tag{1.25}
$$

определяющие уравнения (1.23), являются положительно определенными, и это утверждение доказывается на основании положительной определенности вторых матриц (1.5).

§2. Энергетические исследования эффективной модели

Для вывода выражений для плотностей кинетической и потенциальной энергий в волновом поле эффективной модели помножим каждое из 8 уравнений (1.23) соответственно на $\partial u_x^{(1.2)}/\partial t$, $\partial u_x^{(3.4)}/\partial t$, $\partial u_z^{(1.3)}/\partial t$, $\partial u_z^{(2.4)}/\partial t$, $\partial w_x^{(1.2)}/\partial t$, $\partial w_x^{(3.4)}/\partial t$, $\partial w_z^{(1.3)}/\partial t$ и $\partial w_z^{(2.4)}/\partial t$. После ряда несложных преобразований и почленного сложения полученных уравнений приходим к соотношению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{dz} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned} p_x &= \tau_{xx}^{(1.2)} \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t} + \tau_{xx}^{(3.4)} \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t} - p\frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial t} - p\frac{\partial w_x^{(3.4)}}{\partial t}, \\ p_z &= \tau_{zz}^{(1.3)} \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t} + \tau_{zz}^{(2.4)} \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t} - p\frac{\partial w_z^{(1.3)}}{\partial t} - p\frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.2}$$

– потоки энергии вдоль осей x и z,

$$\begin{aligned} W_k = {} & \frac{\rho_{12}}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{34}}{2}\left(\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\ & + \frac{\rho_{13}}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{24}}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\ & + \frac{m_{12}}{2}\left(\frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial t}\right)^2 + \frac{m_{34}}{2}\left(\frac{\partial w_x^{(3.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\ & + \frac{m_{13}}{2}\left(\frac{\partial w_z^{(1.3)}}{\partial t}\right)^2 + \frac{m_{24}}{2}\left(\frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial t}\right)^2 + \\ & + \rho_{f12}\frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial t}\,\frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial t} + \rho_{f34}\frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial t}\,\frac{\partial w_x^{(3.4)}}{\partial t} + \\ & + \rho_{f13}\frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial t}\,\frac{\partial w_z^{(1.3)}}{\partial t} + \rho_{f24}\frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial t}\,\frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.3}$$

– плотность кинетической энергии и

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_p}{\partial t} = {} & \frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x \partial t}\tau_{xx}^{(1.2)} + \frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x \partial t}\tau_{xx}^{(3.4)} + \\ & + \frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z \partial t}\tau_{zz}^{(1.3)} + \frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z \partial t}\tau_{zz}^{(2.4)} - p\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.4}$$

– скорость изменения плотности потенциальной энергии. Подставим равенства (1.21) в соотношение (2.4) и получим формулы

$$W_p = \sum_{i,k=1}^{5} d_{ik}\zeta_i\zeta_k, \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\zeta_1 = \frac{\partial u_x^{(1.2)}}{\partial x},\quad \zeta_2 = \frac{\partial u_x^{(3.4)}}{\partial x},\quad \zeta_3 = \frac{\partial u_z^{(1.3)}}{\partial z},\quad \zeta_4 = \frac{\partial u_z^{(2.4)}}{\partial z},\\ \zeta_5 = \widetilde{w} = \frac{\partial w_x^{(1.2)}}{\partial x} + \frac{\partial w_x^{(3.4)}}{\partial x} + \frac{\partial w_z^{(1.3)}}{\partial z} + \frac{\partial w_z^{(2.4)}}{\partial z}\end{gathered} \tag{2.6}$$

для плотности потенциальной энергии. Плотность кинетической энергии (2.3) является суммой четырех квадратичных форм, которые оказываются положительно определенными формами, так как матрицы (1.23) – положительно определенные. Следовательно, выражение (2.3) – положительно определенное. Поскольку матрица $\mathbf{D}$ – положительно определенная, то плотность потенциальной энергии (2.5) является положительно определенной относительно своих аргументов (2.6). В то же время возможны случаи, когда все аргументы (2.6), включая и ζ_5, равны нулю, а некоторые смещения $w_x^{(1.2)}$, $w_x^{(3.4)}$, $w_z^{(1.3)}$ и $w_z^{(2.4)}$ отличны от нуля. Поэтому плотность потенциальной энергии является неотрицательной функцией смещений. Таким образом, построенная эффективная модель – энергетически устойчивая. Эта модель может рассматриваться как пятифазная и состоящая из четырех упругих фаз и одной жидкой фазы. Так как у этих фаз существуют общие смещения и напряжения, то число упругих фаз можно сократить до двух и эти упругие фазы уже не будут содержать общих смещений и напряжений.

Остановимся теперь на исследовании выражений для плотностей кинетической и потенциальной энергий. Плотность кинетической энергии (2.3) может быть также представлена соотношением

$$W_k = \sum_{i=1}^{4} W_{ki}s_i, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} W_{ki} = \frac{\rho_i}{2}\left[\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{mi}{2}\left[\left(\frac{\partial w_{xi}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_{zi}}{\partial t}\right)^2\right] + \\ + \rho_{fi}\left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial t}\,\frac{\partial w_{xi}}{\partial t} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial t}\,\frac{\partial w_{zi}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

– плотность потенциальной энергии в блоке i, s_i – относительная площадь блока i и

$$s_1 = \varepsilon_1\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_2 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_3 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_1, \quad s_4 = \varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_2. \tag{2.9}$$

Из формул (2.7)–(2.9) следует, что выражение для плотности кинетической энергии в эффективной модели совпадает с выражением для плотности кинетической энергии в массиве пористой среды. Выражения для плотности потенциальной энергии (2.5) и (2.6) аналогичны соответственно выражениям в случае эффективной модели упругой блочной среды [4]. В обоих случаях плотности потенциальных энергий представляются квадратичными формами, при этом аргументы ζ_1, ζ_2, ζ_3 и ζ_4 с учетом обозначений (1.18) оказываются одинаковыми для обоих случаев, а квадратичная форма (2.5) содержит дополнительно аргумент $\zeta_5 = \widetilde{w}$. Коэффициенты d_{ik} в формуле (2.5) отличаются от соответствующих коэффициентов в случае эффективной модели упругой блочной среды [4].

§3. Построение и исследование характеристической функции

Для построения характеристической функции, определяющей фронты волн от точечного источника, полезно предварительно подставить равенства (1.21) в уравнения (1.23) и получить уравнения Ламе

$$\left(d_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(1.2)} + d_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2} + d_{13}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z} + d_{14}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z} +$$
$$+\left(d_{15}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{f12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x^{(1.2)} + d_{15}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x^2} + d_{15}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z} + d_{15}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z} = 0,$$

$$d_{12}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2} + \left(d_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{34}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(3.4)} + d_{23}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z} + d_{24}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z} +$$
$$d_{25}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x^2} + \left(d_{25}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_{f34}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x^{(3.4)} + d_{25}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z} + d_{25}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z} = 0,$$

$$d_{13}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{23}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\left(d_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{13}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(1.3)}+d_{34}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}+$$
$$+d_{35}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{35}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\left(d_{35}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{f13}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z^{(1.3)}+d_{35}\frac{\partial^2 w_z^{(3.4)}}{\partial z^2}=0,$$

$$d_{14}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{24}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+d_{34}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}+\left(d_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(2.4)}+$$
$$+d_{45}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{45}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+d_{45}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial z^2}+\left(d_{45}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{f24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z^{(2.4)}=0,$$

$$\left(d_{15}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_{f12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(1.2)}+d_{25}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x^2}+d_{35}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+d_{45}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}+$$
$$+\left(d_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x^{(1.2)}+d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x^2}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}=0,$$

$$d_{15}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x^2}+d_{25}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}--\rho_{f34}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x^{(3.4)}+d_{35}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+d_{45}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}+$$
$$d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x^2}+\left(d_{55}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m_{34}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x^{(3.4)}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial x\partial z}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(2.4)}}{\partial x\partial z}=0,$$

$$d_{15}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{25}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\left(d_{35}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho_{f13}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(1.3)}+d_{45}\frac{\partial^2 u_z^{(2.4)}}{\partial z^2}+$$
$$+d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+\left(d_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-m_{13}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z^{(1.3)}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(3.4)}}{\partial z^2}=0,$$

$$d_{15}\frac{\partial^2 u_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{25}\frac{\partial^2 u_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+d_{35}\frac{\partial^2 u_z^{(1.3)}}{\partial z^2}+\left(d_{45}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-m_{24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z^{(2.4)}+$$
$$+d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(1.2)}}{\partial x\partial z}+d_{55}\frac{\partial^2 w_x^{(3.4)}}{\partial x\partial z}+d_{55}\frac{\partial^2 w_z^{(1.3)}}{\partial z^2}+ \qquad (3.1)$$
$$+\left(d_{55}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-m_{24}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_z^{(2.4)}=0,$$

для эффективной модели. Решения системы уравнений (3.1) могут быть представлены, как и в работах [2, 3], в виде повторных интегралов, представляющих суперпозицию плоских волн

$$e^{ik(\tau t - x - \alpha z)}, \tag{3.2}$$

при этом

$$\tau = v_{ph}/\sin\varphi, \quad \alpha = \operatorname{ctg}\varphi, \tag{3.3}$$

v_{ph} – фазовая скорость, φ – угол между нормалью к плоскости фронта и осью z и k – составляющая волнового вектора вдоль оси x. Фронты волн как особенности указанных интегральных представлений определяются функцией $\tau(\alpha)$. В случае точечного источника, расположенного в начале координат, фронты, согласно работе [7], выражаются параметрическими формулами

$$x = t\big[\tau(\alpha) - \alpha\tau'(\alpha)\big], \quad z = t\tau'(\alpha). \tag{3.4}$$

Для определения функции $\tau(\alpha)$ необходимо все смещения представить в виде произведений некоторых коэффициентов и выражения (3.2) подставить в уравнения (3.1). Эта подстановка оказывается равносильной замене операций дифференцирования по формулам

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim \tau^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim 1, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \alpha^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \sim \alpha. \tag{3.5}$$

В результате уравнения (3.1) заменяются системой алгебраических уравнений. Условие существования ненулевого решения этой системы сводится к равенству нулю ее определителя и выражается уравнением

$$\det(\mathbf{D} - \tau^2\mathbf{B}) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{D} = \tag{3.7}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13}\alpha & d_{14}\alpha & d_{15} & d_{15} & d_{15}\alpha & d_{15}\alpha \\ d_{12} & d_{22} & d_{23}\alpha & d_{24}\alpha & d_{25} & d_{25} & d_{25}\alpha & d_{25}\alpha \\ d_{13}\alpha & d_{23}\alpha & d_{33}\alpha^2 & d_{34}\alpha^2 & d_{35}\alpha & d_{35}\alpha & d_{35}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 \\ d_{14}\alpha & d_{24}\alpha & d_{34}\alpha^2 & d_{44}\alpha^2 & d_{45}\alpha & d_{45} & d_{45}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 \\ d_{15} & d_{25} & d_{35}\alpha & d_{45}\alpha & d_{55} & d_{55} & d_{55}\alpha & d_{55}\alpha \\ d_{15} & d_{25} & d_{35}\alpha & d_{45}\alpha & d_{55} & d_{55} & d_{55}\alpha & d_{55}\alpha \\ d_{15}\alpha & d_{25}\alpha & d_{35}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{55}\alpha & d_{55}\alpha & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 \\ d_{15}\alpha & d_{25}\alpha & d_{35}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{55}\alpha & d_{55} & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 \end{pmatrix}$$

– симметричная и неотрицательно определенная при вещественных α матрица, а

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
\rho_{12} & 0 & 0 & 0 & \rho_{f12} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho_{34} & 0 & 0 & 0 & \rho_{f34} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_{13} & 0 & 0 & 0 & \rho_{f13} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \rho_{24} & 0 & 0 & 0 & \rho_{f24} \\
\rho_{f12} & 0 & 0 & 0 & m_{12} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho_{f34} & 0 & 0 & 0 & m_{34} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \rho_{f13} & 0 & 0 & 0 & m_{13} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \rho_{f24} & 0 & 0 & 0 & a_{24}
\end{pmatrix} \tag{3.8}
$$

– симметричная и положительно определенная матрица. Соотношение (3.6) можно рассматривать как уравнение для определения характеристических чисел τ^2 в случае одновременного приведения к диагональному виду матриц $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Согласно теореме [8], эти характеристические числа являются вещественными, если обе матрицы симметричные, а матрица $\mathbf{B}$ является также и положительно определенной. Обобшая указанную теорему на случай, когда, кроме выполнения указанных условий, еще $\mathbf{D}$ – неотрицательно определенная матрица, приходим к выводу, что при всех вещественных α уравнение (3.6) имеет только неотрицательные решения τ^2, а характеристические функции $\tau(\alpha)$ являются вещественными при всех вещественных α.

Для исследования уравнения (3.6) полезно третью, четвертую, седьмую и восьмую строки определителя помножить на α, а элементы столбцов с теми же номерами разделить на α. В результате уравнение (3.6) заменится на равносильное уравнение

$$
\det(\mathbf{D}' - \tau^2 \mathbf{B}) = 0, \tag{3.9}
$$

где

$$
\mathbf{D}' = \tag{3.10}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
d_{11} & d_{12} & d_{13}\alpha & d_{14} & d_{15} & d_{15} & d_{15} & d_{15} \\
d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24}\alpha & d_{25} & d_{25} & d_{25} & d_{25} \\
d_{13}\alpha^2 & d_{23}\alpha^2 & d_{33}\alpha^2 & d_{34}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 \\
d_{14}\alpha^2 & d_{24}\alpha^2 & d_{34}\alpha^2 & d_{44}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 \\
d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{55} & d_{55} & d_{55} \\
d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{55} & d_{55} & d_{55} \\
d_{15}\alpha^2 & d_{25}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 \\
d_{15}\alpha^2 & d_{25}\alpha^2 & d_{35}\alpha^2 & d_{45}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2 & d_{55}\alpha^2
\end{pmatrix}.
$$

Если в четырех последних строках определителя из уравнения (3.9) производить вычитания элементов одной строки из соответствующих элементов другой строки, то из уравнения (3.9) выделяется множитель τ^6 и уравнения (3.9) становится уравнением пятого порядка относительно τ^2. Таким образом, уравнение (3.9) определяет неявно 5 вещественных характеристических функций $\tau_1(\alpha)$, $\tau_2(\alpha)$, $\tau_3(\alpha)$, $\tau_4(\alpha)$ и $\tau_5(\alpha)$.

При $\alpha = 0$ определитель в уравнении (3.9) становится квазидиагональным и представляется произведением двух определителей четвертого порядка. Один из них с точностью до постоянного множителя равен τ^8. В другом определителе полезно из элементов четвертой строки вычесть элементы третьей строки и выделить множитель τ^2. После аналогичной операции с третьим и четвертым столбцами приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\rho_{12}\tau^2 & d_{12} & d_{15}-\rho_{f12}\tau^2 & \rho_{f12}\tau^2 \\ d_{12} & d_{22}-\rho_{34}\tau^2 & d_{25} & -\rho_{f34}\tau^2 \\ d_{15}-\rho_{f12}\tau^2 & d_{25} & d_{55}- m_{f12}\tau^2 & m_{12}\tau^2 \\ \rho_{f12} & -\rho_{f34} & m_{12} & -m_{12}-m_{34} \end{vmatrix} = 0, \quad (3.11)$$

имеющему третий порядок относительно τ^2. Уравнение (3.11), согласно обобщению приведенной теоремы, имеет 3 неотрицательных корня $\tau = v_1$, $\tau = v_2$ и $\tau = v_3$, а у исходного уравнения (3.9) (после исключения из него множителя τ^6) существуют еще два нулевых корня при $\alpha = 0$. Таким образом, начальные значения характеристических функций даются равенствами

$$\tau_1(0) = v_1, \quad \tau_2(0) = v_2, \quad \tau_3(0) = v_3, \quad \tau_4(0) = 0, \quad \tau_5(0) = 0, \quad (3.12)$$

при этом v_1, v_2 и v_3 – корни уравнения (3.11).

В случае $\alpha \gg 1$ полезно в определителе, входящем в уравнение (3.9), вычесть из восьмой строки седьмую строку и выделить множитель τ^2. После этой операции только третья, четвертая и седьмая строки рассматриваемого определителя содержат величину α^2 и легко заметить, что уравнение (3.9) является бикубическим относительно α. Чтобы получить выражение для коэффициента при α^6, выделим из левой части уравнения (3.9) множитель α^6 и сохраним в третьей, четвертой и седьмой строках только множители при α^2. Далее из пятой и шестой строк вычтем полученную седьмую строку, затем вычтем седьмой столбец из пятого, шестого и восьмого столбцов и выделим множитель $-(m_{13} + m_{24})\tau^2$. После указанных операций уравнение (3.9) в области $\alpha \gg 1$ перейдет в биквадратное уравнение

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\rho_{12}\tau^2 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & -\rho_{f12}\tau^2 & 0 & d_{15} \\ d_{12} & d_{22}-\rho_{34}\tau^2 & d_{23} & d_{24} & 0 & -\rho_{f34}\tau^2 & d_{25} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & 0 & 0 & d_{35} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & 0 & 0 & d_{45} \\ \rho_{f12} & 0 & 0 & 0 & m_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{f34} & 0 & 0 & 0 & m_{34} & 0 \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 & 0 & d_{55} \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \tag{3.13}$$

относительно τ^2. Уравнение (3.13), согласно обобщению приведенной теоремы, имеет два неотрицательных корня

$$\tau = v_4, \quad \tau = v_5, \tag{3.14}$$

и равенства (3.14) определяют две горизонтальные асимптоты, к которым приближаются два графика функций $\tau_i(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$. Графики остальных трех функций $\tau_i(\alpha)$ подходят к наклонным асимтотам

$$\tau = v_6\alpha, \quad \tau = v_7\alpha, \quad \tau = v_8\alpha. \tag{3.15}$$

Чтобы найти коэффициенты v_6, v_7 и v_8, разделим все элементы определителя в равенстве (3.9) на α и введем новые величины

$$\beta = 1/\alpha, \quad \sigma = \tau/\alpha. \tag{3.16}$$

Уравнение (3.9) при этом заменится на уравнение

$$\det(\mathbf{D}'' - \sigma^2\mathbf{B}) = 0, \tag{3.17}$$

где

$$\mathbf{D}'' = \tag{3.18}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11}\beta^2 & d_{12}\beta^2 & d_{13}\beta^2 & d_{14}\beta^2 & d_{15}\beta^2 & d_{15}\beta^2 & d_{15}\beta^2 & d_{15}\beta^2 \\ d_{12}\beta^2 & d_{22}\beta^2 & d_{23}\beta^2 & d_{24}\beta^2 & d_{25}\beta^2 & d_{25}\beta^2 & d_{25}\beta^2 & d_{25}\beta^2 \\ d_{13}2 & d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{35} & d_{35} & d_{35} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & d_{45} & d_{45} & d_{45} & d_{45} \\ d_{15}\beta^2 & d_{25}\beta^2 & d_{35}\beta^2 & d_{45}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 \\ d_{15}\beta^2 & d_{25}\beta^2 & d_{35}\beta^2 & d_{45}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 & d_{55}\beta^2 \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{55} & d_{55} & d_{55} \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & d_{55} & d_{55} & d_{55} \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.18) аналогично уравнению (3.9) и при $\beta = 0$ левая часть уравнения (3.18) представляется в виде произведения двух определителей четвертого порядка, один из которых пропорционален σ^8. В другом определителе вычтем из четвертой строки третью строку, а из четвертого столбца третий столбец. В результате после выделения множителя σ^{10} уравнение (3.17) при $\beta = 0$ заменяется уравнением

$$\begin{vmatrix} d_{33}-\rho_{13}\sigma^2 & d_{34} & d_{35}-\rho_{f13}\sigma^2 & \rho_{f13} \\ d_{34} & d_{44}-\rho_{24}\sigma^2 & d_{45} & -\rho_{f24} \\ d_{35}-\rho_{f13}\sigma^2 & d_{45} & d_{55}-m_{13}\sigma^2 & m_{13} \\ \rho_{f13} & -\rho_{f24} & m_{13} & -m_{13}-m_{24} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.19)$$

третьего порядка относительно σ^2. Уравнение (3.19) имеет три неотрицательных корня $\sigma = v_6$, $\sigma = v_7$ и $\sigma = v_8$, определяющие асимптоты (3.15).

Чтобы завершить исследование характеристических функций в окрестности крайних точек, обратимся к функциям $\tau_4(\alpha)$ и $\tau_5(\alpha)$, установим их приближенные выражения

$$\tau_4(\alpha) = v_9\alpha, \quad \tau_5(\alpha) = v_{10}\alpha \qquad (3.20)$$

при $\alpha \gg 1$ и для входящих в равенства (3.20) коэффициентов v_9 и v_{10} выведем определяющее их уравнение. С этой целью перейдем от величин τ, α к величинам (3.16). После этого перехода коэффициенты v_9 и v_{10} определяется из условий

$$\sigma(\beta) = v_9, \quad \sigma(\beta) = v_{10} \qquad (3.21)$$

при $\beta = \infty$. Так как уравнение (3.17) при $\beta \gg 1$ исследуется теми же приемами, как и уравнение (3.5) при $\alpha \gg 1$, то ограничимся приведением лишь результатов исследований. Уравнение (3.17) при больших β переходит в уравнение

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & 0 & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33}-\rho_{13}\sigma^2 & d_{34} & d_{35} & -\rho_{f13}\sigma^2 & 0 \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44}-\rho_{24}\sigma^2 & d_{45} & 0 & -\rho_{f24}\sigma^2 \\ d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{f13} & 0 & 0 & -m_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{f24} & 0 & 0 & -m_{24} \end{vmatrix} =$$

$$= 0, \qquad (3.22)$$

которое является биквадратным уравнением относительно σ и определяет два неотрицательных корня v_9 и v_{10}.

Таким образом, десять величин $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ определяют начальные и конечные точки графиков пяти характеристических функций $\tau(\alpha)$. Отметим, что эти же величины также могут быть определены в случае, когда плоские волны, из которых состоит волновое поле, представляются вместо (3.2) выражением

$$e^{il(\sigma t - \beta x - z)}. \tag{3.23}$$

После подстановки (3.23) в уравнения Ламе (3.1) придем к уравнению (3.17), определяющему неявно пять характеристических функций $\sigma(\beta)$. Эти функции также могут быть исследованы при малых и больших β и в результате получим

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(0) = v_6, \quad \sigma_2(0) = v_7, \quad \sigma_3(0) = v_8;\\
&\sigma_4(\beta) = v_4\beta, \quad \sigma_5(\beta) = v_5\beta \quad \text{при} \quad \beta \ll 1;\\
&\sigma(\beta) = v_1\beta, \quad \sigma(\beta) = v_2\beta, \quad \sigma(\beta) = v_3\beta \quad \text{при} \quad \beta \ll 1;\\
&\sigma(\infty) = v_9, \quad \sigma(\infty) = v_{10}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Связь между характеристическими функциями $\tau(\alpha)$ и $\sigma(\beta)$ дается соотношениями

$$\begin{aligned}
\tau(\alpha) &= \alpha\sigma(1/\alpha),\\
\sigma(\beta) &= \beta\tau(1/\beta),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

которые имеют одинаковый вид, и этот факт соответствует тому, что плоские волны с одинаковым конечным результатом могут представляться как выражением (3.2), так и (3.23).

Прежде чем, соединить крайние точки ветвей графика многозначной функции $\tau(\alpha)$ линиями, исследуем возможные общие точки ветвей этого графика вне начала координат. Так как характеристическое уравнение (3.9) является кубическим относительно α^2, то в общей точке двух ветвей это кубическое уравнение имеет положительный корень второй кратности. Исследование кубических уравнений с использованием формул Кардано показывает, что в такой точке дискриминант уравнения равен нулю, а производная его квадратного корня обращается в бесконечность. Отсюда следует, что для обеих ветвей в их общей точке выполняется равенство

$$d\tau/d\alpha = 0, \tag{3.26}$$

ветви касаются в общей точке и их общая касательная параллельна оси α (рис. 2). Таким образом, ветви графика могут касаться, но не могут пересекаться, поскольку в малой окрестности точки касания обе кривые расположены по разные стороны от общей касательной.

Для построения примерного графика функции $\tau(\alpha)$ соединим пятью плавными кривыми начальные и конечные точки (рис. 3). Три ветви графика начинаются при $\alpha = 0$ в точках $\tau = v_1$, $\tau = v_2$, $\tau = v_3$ и приближаются при больших α к наклонным асимптотам (3.15). Остальные две ветви выходят из начала координат и подходят к горизонтальным асимптотам (3.14). Для простоты предполагается, каждая ветвь, изображенная на рис. 3, имеет кривизну одного знака и на этих ветвях отсутствуют точки перегиба, точки касания ветвей и другие особенности.

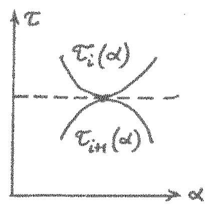

Рис. 2

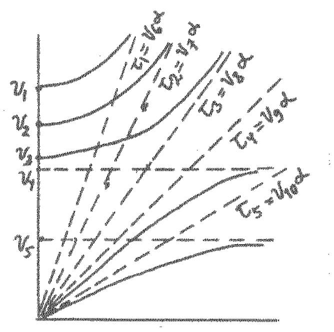

Рис. 3.

Случаи, когда на ветвях графика имеют место особенности, будут рассматриваться в следующем параграфе.

§4. Волновые фронты от точечного источника

Волновые фронты от точечного источника, расположенного в начале координат, строятся по формулам (3.4). При построении фронтов полезно использовать также соотношение

$$\operatorname{ctg}(\widehat{n,z}) = \alpha, \tag{4.1}$$

в котором угол между нормалью к фронту и осью z выражается через величину α, и равенство

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{t\tau''(\alpha)}, \tag{4.2}$$

определяющее знак кривизны фронта. Оба соотношения выводятся на основании формулы (3.4). Построенный примерный график многозначной функции $\tau(\alpha)$ определяет пять волновых фронтов. В соответствии с равенствами (4.1) и (4.2), три фронта являются выпуклыми и пересекают оси под прямым углом. Их скорости вдоль оси x равны v_1, v_2, v_3 и вдоль оси z – v_6, v_7 и v_8. Два других фронта оказываются вогнутыми и касаются координатных осей. Точки касания этих фронтов двигаются вдоль оси x со скоростями v_4, v_5, а вдоль оси z со скоростями v_9 и v_{10} (рис. 4)

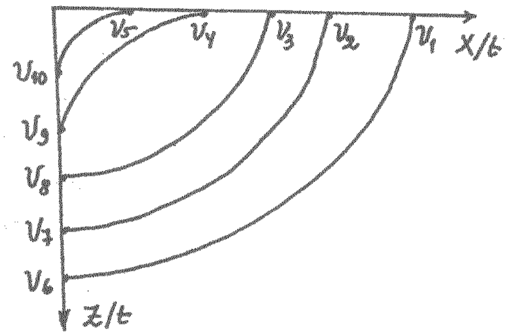

Рис. 4.

Расположение фронтов определяется соотношениями между скоростями вдоль обеих осей. Наибольшими скоростями являются скорость v_1 вдоль оси x и скорость v_6 вдоль оси z. По предположению относительно корней уравнений (3.11), (3.13), (3.19) и (3.22), выполняется неравенство

$$v_2 \geqslant v_3, \quad v_4 \geqslant v_5, \quad v_7 \geqslant v_8, \quad v_9 \geqslant v_{10}. \tag{4.3}$$

Если не накладывать других условий на скорости вдоль каждой из осей, то скорости удовлетворяют двум группам неравенств

$$
\begin{array}{ll}
1)\ v_1 > v_2 \geqslant v_3 \geqslant v_4 \geqslant v_5, & a)\ v_6 > v_7 \geqslant v_8 \geqslant v_9 \geqslant v_{10}, \\
2)\ v_1 > v_2 \geqslant v_4 \geqslant v_3 \geqslant v_5, & b)\ v_6 > v_7 \geqslant v_9 \geqslant v_8 \geqslant v_{10}, \\
3)\ v_1 > v_2 \geqslant v_4 \geqslant v_5 \geqslant v_3, & c)\ v_6 > v_7 \geqslant v_9 \geqslant v_{10} \geqslant v_8, \\
4)\ v_1 > v_4 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant v_5, & d)\ v_6 > v_9 \geqslant v_7 \geqslant v_8 \geqslant v_{10}, \\
5)\ v_1 > v_4 \geqslant v_2 \geqslant v_5 \geqslant v_3, & e)\ v_6 > v_9 \geqslant v_7 \geqslant v_{10} \geqslant v_8, \\
6)\ v_1 > v_4 \geqslant v_5 \geqslant v_2 \geqslant v_3, & f)\ v_6 > v_9 \geqslant v_{10} \geqslant v_7 \geqslant v_8,
\end{array}
\tag{4.4}
$$

Из этих неравенств следует исключить случай 6, так как в этом случае четыре кривых графика $\tau(\alpha)$ пересекают полосу $v_2 \leqslant \tau \leqslant v_5$, что невозможно, поскольку эти кривые удовлетворяют бикубическому уравнению (3.9). По аналогичной причине отбрасывается и случай f. Число случаев с различными соотношениями между скоростями равно 25. Рис. 3 и 4 соответствуют случаю 1,a. Построение графика и фронтов без учета особенностей в других случаях не связано с большими трудностями. В этих случаях фронты могут пересекаться.

Остановимся теперь на возможных особенностях фронтов и графика характеристической функции $\tau(\alpha)$. Особой точкой графика является точка перегиба, где

$$\tau''(\alpha) = 0. \tag{4.5}$$

Этой точке соответствует на фронте угловая точка, в которой, как правило, кривизна фронта меняет знак. Если на одном фронте расположены две точки перегиба, то этот фронт имеет петлю. В других особых точках графика выполняется необходимое условие

$$\tau'(\alpha) = 0 \tag{4.6}$$

для экстремума. Этим точкам, согласно формулам (3.4), соответствуют дополнительные точки пересечения фронта с осью x. Точкам графика, где $\tau'(\alpha) < 0$, отвечает участок фронта, расположенный в квадранте $x > 0$, $z < 0$. Вследствие симметрии графика относительно оси α и симметрии фронта относительно оси x в рассматриваемом квадранте $x > 0$, $z > 0$ всегда будет существовать симметричное отображение указанного участка фронта при $x > 0$, $z < 0$. Аналогичные точки дополнительного пересечения фронтов с осью z определяются условием

$$\tau(\alpha) - \alpha\tau'(\alpha) = 0, \tag{4.7}$$

которое выражает совпадение в одной точке графика направлений радиуса-вектора и касательной к фронту. В точках фронтов, где выполняется равенство (4.6) или (4.7), углы между нормалями к фронту и осями определяются величиной α. Таким образом, различие между обычными и дополнительными пересечениями фронтов с осями состоит в том, что обычное пересечение осуществляется под углами 0 или $\pi/2$ (рис. 4), в то время как дополнительные пересечения могут проходить под произвольными углами. При исследовании функции $\tau(\alpha)$ могут быть обнаружены области, где $\tau(\alpha)-\alpha\tau'(\alpha)<0$. Этим областям соответствуют участки фронтов в квадранте $x<0$, $z>0$. Вследствие симметрии фронтов относительно оси z указанному участку соответствует симметричный относительно оси $z=0$ участок в рассматриваемом квадранте $x>0$, $z>0$. Угловые точки, петли, дополнительные пересечения с осями и выступы в соседние квадранты фронтов подробно исследовались в работе [3].

Усложнение графика и фронтов ограничено. Чтобы сформулировать эти ограничения, отметим, что многозначную функцию $\tau(\alpha)$, удовлетворяющую уравнению (3.9), полезно рассматривать на всей плоскости $-\infty<\tau<\infty$ и $-\infty<\alpha<\infty$ и в этой области график обладает симметрией относительно осей α и τ (рис. 5). Любая прямая на плоскости α, τ не может пересечь ветви графика многозначной функции $\tau(\alpha)$ более 10 раз. В самом деле, произвольная прямая

$$\tau=a\alpha+b$$

пересечет ветви графика функции $\tau(\alpha)$ в точках, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (3.9) и (4.8). Так как эта система эквивалентна уравнениям десятого порядка, то число рассматриваемых точек пересечения не может превышать 10. Другое ограничение состоит в том, что любая прямая, параллельная оси α, пересекает ветви графика функции $\tau(\alpha)$ не более чем 6 раз. Это утверждение следует из того, что уравнение (3.9) является бикубическим уравнением относительно α. На основании этого утверждения были исключены случаи 6 и f в неравенствах (4.4).

Используя указанные ограничения для усложнения графиков, покажем, что передний фронт не может иметь петель. Чтобы это доказать, предположим, что такая петля существует на переднем фронте. Тогда на верхней ветви графика $\tau(\alpha)$ существуют две

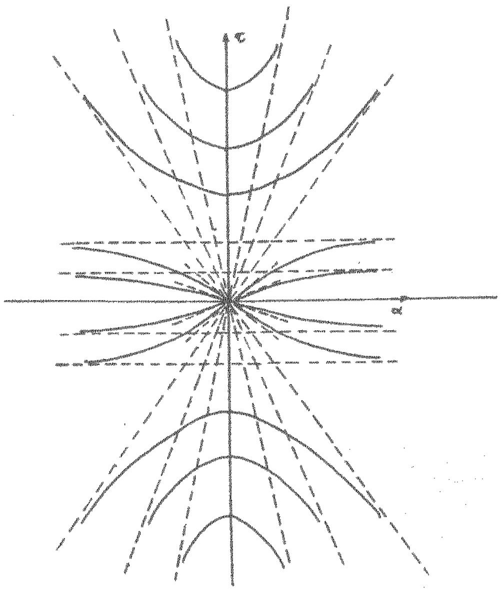

Рис. 5.

точки перегиба. Прямая, проведенная через эти точки, пересечет в 4 точках верхнюю ветвь и в 8 точках остальные ветви графика $\tau(\alpha)$. Существование такой прямой, в соответствии с указанными ограничениями, оказывается невозможным. Отсюда следует, что петли на переднем фронте всегда отсутствуют.

Литература

1. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.
2. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 219–243.
3. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели пористой слоистой среды со скользящим контактом между слоями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1998), 184–206.
4. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 98–117.

5. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28**, No. 2 (1956), 168–178.
6. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and elastic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **67**, No. 11 (1962), 4427–4440.
7. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
8. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. М. (1967).

Molotkov L. A. The effective model of porous block medium with slide contact on interfaces.

The medium under consideration consists of equal rectangle cells. The every cell contains four rectangle porous blocks with slide contact on interfaces between blocks. For this medium the effective model is established. This effective model is described by thirteen equations, is five-phase, and consists of four elastic phases and one fluid phase. In this model five waves propagate. The fronts of three waves are convex but two waves have concave fronts. The velocities of the waves along the axes are roots of equations which are derived in the paper.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 января 2001 г.