Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Л. А. Молотков

ЭФФЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ, В КОТОРОЙ ЧЕРЕДУЮТСЯ ПОРИСТЫЕ И УПРУГИЕ СЛОИ, НАХОДЯЩИЕСЯ В КОНТАКТЕ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

В настоящее время наблюдается большой интерес к трещиноватым и пористым средам, насыщенным жидкостью. Теоретические исследования распространения волн в таких средах проводятся на основе эффективных моделей. Среди этих моделей заметное место занимают модель пористой среды Био [1, 2] и эффективные модели слоистых периодических сред. Последние модели устанавливаются методом матричного осреднения, который обобщает подход Бейкуса [3], находится в полном соответствии с методами Бахвалова [4] и Санчес–Паленсиа [5] и позволяет рассматривать слои разной природы и различные линейные контакты между слоями.

Метод матричного осреднения был предложен в статье [6] и обоснован в работе [7]. Этим методом, в частности, были построены эффективные модели в случаях, когда пористые слои чередуются или с другими пористыми слоями, или с упругими слоями, или с жидкими слоями [8]. Полученные при этом эффективные модели были обобщены на случаи, когда учитываются диссипация и анизотропия пористых слоев [9].

В настоящей работе с помощью метода матричного осреднения строится и исследуется эффективная модель для среды, в которой чередуются пористые и упругие слои и на границах между ними выполняются условия контакта с проскальзыванием. Эффективная модель такой среды оказывается трехфазной. Ее отличительными особенностями являются отсутствие второй (ме-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант No. 99-05-65537.

дленной) продольной волны и наличие двух “треугольных фронтов”. Отметим, что в эффективных моделях, описывающих среды, в которых чередуются или два пористых слоя с проскальзыванием на границах [10], или пористый и упругий слои с жестким контактом [11], волновые поля содержат, наоборот, две продольные волны и одну волну с “треугольным фронтом”. В частном случае, когда упругие слои оказываются очень тонкими, но остаются преградами для жидких частиц из пористых слоев, рассматриваемая эффективная модель становится двухфазной и особым частным случаем трансверсально-изотропной среды Био. В волновом поле этой модели также отсутствует вторая продольная волна, а число “треугольных фронтов” сокращается до одного.

§1. Уравнения эффективной модели

Пусть в декартовой системе координат x, y, z задана слоистая периодическая среда $0 \leqslant z \leqslant H_n = H$, состоящая из n периодов. Каждый период имеет толщину $h = H/n$ и содержит два слоя: пористый слой Био 1 с толщиной $h_1 = \theta_1 h$ и упругий слой 2 с толщиной $h_2 = \theta_2 h$ $(\theta_1 + \theta_2 = 1)$ (рис. 1). Среда возбуждается некоторым источником, который создает поле смещений, не содержащее составляющей вектора смещений u_y и не зависящее от координаты y. Все слои предполагаются однородными и изотропными.

Пористые слои Био описываются уравнениями

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx1} &= H\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + B\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz1} &= B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + H\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
-p &= C\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz1} &= L\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x}\right);
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

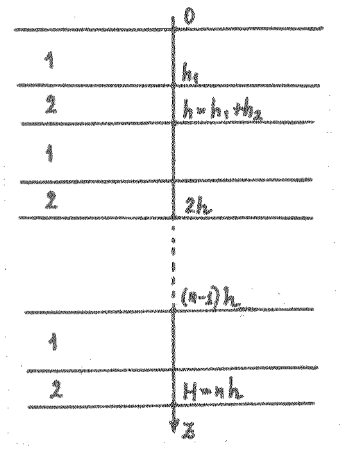

Рис. 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} &= \rho_1 \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_f \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_f \frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

в которых u_{x1}, u_{z1} – смещения в упругой фазе, w_{x1}, w_{z1} – относительные смещения жидкой фазы, τ_{xx1}, τ_{zz1}, τ_{xz1} – полные напряжения, p – давление, ρ_1 – средняя плотность пористой среды, ρ_f – плотность жидкой фазы, H, M, B, C, L – модули пористой среды и

$$m = \rho_f \alpha / \varepsilon, \tag{1.3}$$

где ε – пористость и α – коэффициент извилистости пор. Упругие слои описываются уравнениями

$$t_{xx2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_{z2}}{\partial z},$$

$$t_{zz2} = \lambda \frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{z2}}{\partial z},$$

$$t_{xz2} = \mu\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial x}\right), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial t_{xx2}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xz2}}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial t_{xz2}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz2}}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2},$$

в которых u_{x2}, u_{z2} – смещения, t_{xx}, t_{zz}, t_{xz} – напряжения, λ, μ – коэффициенты Ламе и ρ_2 – плотность. Относительно коэффициентов в уравнениях (1.1), (1.2), (1.4) и (1.5) делаются предположения, что матрица

$$\begin{pmatrix} H, & B, & C \\ B, & H, & C \\ C, & C, & M \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

образованная этими коэффициентами, является положительно определенной и что выполняются неравенства

$$L > 0, \quad m > 0, \quad \rho_1 m > \rho_f^2, \quad \lambda + \mu > 0, \quad \mu > 0. \tag{1.7}$$

Эти предположения обеспечивают положительную определенность плотностей кинетической и потенциальной энергий в пористых и упругих слоях. На границах между слоями выполняются условия

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad \tau_{zz1} = t_{zz2}, \quad w_{z1} = 0, \quad \tau_{xz1} = t_{xz2} = 0, \tag{1.8}$$

выражающие контакт с проскальзыванием.

В образующемся волновом поле совершим предельный переход при условиях

$$\begin{gathered} n \to \infty, \quad h_1 \to 0, \quad h_2 \to 0, \\ H = \mathrm{const}, \quad \theta_1 = \mathrm{const}, \quad \theta_2 = \mathrm{const} \end{gathered} \tag{1.9}$$

и определим уравнения, которым удовлетворяет предельное волновое поле. Среду, описываемую этими уравнениями, будем называть эффективной моделью заданной среды. Вывод уравнений эффективной модели будет проводиться методом матричного осреднения, изложенным и обоснованным в работах [6, 7]. Согласно этому методу, следует предположить, что третье, четвертое и пятое условия (1.8) выполняются не только на границах, но и во всей среде. Одновременно следует отбросить четвертое уравнение (1.1) и третье уравнение (1.4) как уравнения, содержащие производные по z от функций, испытывающих скачки на границах. Также исключается и четвертое уравнение (1.2), так как в это уравнение входит производная по z от давления p, не имеющего аналога в упругих слоях. В результате этих преобразований число неизвестных и число уравнений сокращаются с 13 до 10.

При проведении предельного перехода при условиях (1.9) вводятся непрерывные функции u_z и τ_{zz}, которые в пористых и упругих слоях соответственно равны u_{z1}, τ_{zz1} и u_{z2}, t_{zz2}. Производные этих функций по z, согласно используемому методу, осредняются по формулам

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}\theta_2,\\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial t_{zz2}}{\partial z}\theta_2.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Из оставшихся уравнений (1.1), (1.2), (1.4) и из равенств (1.5) и (1.8) исключаются величины $\partial u_{z1}/\partial z$, $\partial u_{z2}/\partial z$, $\partial \tau_{zz1}/\partial z$ и $\partial t_{zz2}/\partial z$. В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\theta_1\tau_{xx1} &= H'_{11}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + H'_{12}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + B''_1\frac{\partial u_z}{\partial z} + C'_1\frac{\partial w_x}{\partial x},\\ \theta_2\tau_{xx2} &= H'_{12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + H'_{22}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + B''_2\frac{\partial u_z}{\partial z} + C'_2\frac{\partial w_x}{\partial x},\\ \tau_{zz} &= B''_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + B''_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + H''\frac{\partial u_z}{\partial z} + C''\frac{\partial w_x}{\partial x},\\ -\theta_1 p &= C'_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + C'_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + C''\frac{\partial u_z}{\partial z} + M'\frac{\partial w_x}{\partial x};\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\ \frac{\partial \tau_{xx2}}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2},\\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},\\ -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_f\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\end{gathered} \tag{1.12}$$

в которых

$$H'_{11} = \theta_1\chi\big[H(\lambda+2\mu)\theta_1 + (H^2 - B^2)\theta_2\big], \quad H'_{12} = \lambda B\theta_1\theta_2\chi,$$

$$H'_{22} = \theta_2\chi\big[4\mu(\lambda+\mu)\theta_1 + H(\lambda+2\mu)\theta_2\big], \quad H'' = B(\lambda+2\mu)\chi\theta_1,$$

$$B''_1 = B\chi(\lambda+2\mu)\theta_1, \quad B''_2 = \lambda H\chi\theta_2, \tag{1.13}$$

$$C'_1 = \theta_1 C\chi\big[(\lambda+2\mu)\theta_1 + (H-B)\theta_2\big], \quad C'_2 = C\lambda\chi\theta_1\theta_2,$$

$$C'' = C(\lambda+2\mu)\chi\theta_1, \quad M' = \chi\theta_1\big[M(\lambda+2\mu)\theta_1 + (MH - C^2)\theta_2\big],$$

$$\chi = \big[\theta_1(\lambda+2\mu) + \theta_2 H\big]^{-1}, \quad \overline{\rho} = \theta_1\rho_1 + \theta_2\rho_2, \ \ w_{x_1} = w_x.$$

Полученные уравнения, как и в случаях упругой и пористой сред, также состоят из уравнений закона Гука (1.11) и уравнений сплошной среды (1.12). Эффективная модель является трехфазной и содержит: 1) упруго-пористую фазу, описываемую смещениями u_{x1}, u_{z1} и напряжениями τ_{xx1}, τ_{zz}, 2) упругую фазу, характеризуемую смещениями u_{x2}, u_z и напряжениями $\tau_{xx2} = t_{xx2}$, τ_{zz}, и 3) жидкую фазу, определяемую относительным смещением w_x и давлением p. Упругие среды, содержащиеся в слоях 1 и 2, не осредняются, как и в случае пористых слоев, находящихся в контакте с проскальзыванием [10]. Если же между пористыми слоями или между пористым и упругим слоями имеет место жесткий контакт, то эффективные модели в этих случаях содержат только одну упругую фазу [12].

Установим теперь выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий волнового поля в эффективной модели. С этой целью помножим первое, второе, третье и четвертое уравнения (1.12) соответственно на

$$\theta_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, \quad \theta_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \theta_1\frac{\partial w_x}{\partial x}$$

и сложим почленно полученные уравнения. После ряда стандартных преобразований приходим к уравнению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}, \tag{1.14}$$

в которых

$$\begin{gathered} p_x = \theta_1\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \theta_2\tau_{xx2}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} - \theta_1 p\frac{\partial w_x}{\partial t}, \\ p_z = \tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{gathered} \tag{1.15}$$

– потоки энергии через единичные площадки вдоль осей x и z,

$$W_k = \frac{\rho_1\theta_1}{2}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_2\theta_2}{2}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 + \\ + \frac{m\theta_1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 + \rho_f\theta_1\frac{\partial w_x}{\partial t}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} \tag{1.16}$$

– плотность кинетической энергии и

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} = \tau_{xx1}\theta_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x\partial t} + \tau_{xx2}\theta_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x\partial t} - p\theta_1\frac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial t} + \tau_{zz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial t}. \tag{1.17}$$

После подстановки равенств (1.11) в формулу (1.17) получаем соотношение

$$W_p = \frac{H'_{11}}{2}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\right)^2 + H'_{12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + B''_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ + C'_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{H'_{22}}{2}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)^2 + B''_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ + C'_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\,\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{H''}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + C''\frac{\partial u_z}{\partial z}\,\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{M'}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 \tag{1.18}$$

для плотности потенциальной энергии. Квадратичные формы (1.16) и (1.18), определяющие плотности обоих видов энергии, являются положительно определенными, так как выполняются условия (1.7), а матрица

$$\begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} & B''_1 & C'_1 \\ H'_{12} & H'_{22} & B''_2 & C'_2 \\ B''_1 & B''_2 & H'' & C'' \\ C'_1 & C'_2 & C'' & M' \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

оказывается положительно определенной. Последнее утверждение доказывается на основании положительной определенности матрицы (1.6).

Для построения фронтов в среде, описываемой уравнениями (1.11) и (1.12), полезно исключить из этих уравнений напряжения τ_{xx1}, τ_{xx2}, τ_{zz} и давление p. С этой целью подставим уравнения (1.11) в (1.12) и получим уравнения Ламе

$$\left(H'_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x1} +$$

$$+H'_{12}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}+B''_1\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\left(C'\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x=0,$$

$$H'_{12}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2}+\left(H'_{22}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x2}+B''_2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+C'_2\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}=0, \quad (1.20)$$

$$B''_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x\partial z}+B''_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x\partial z}+\left(H''\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\overline{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z+C''\frac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\left(C'_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x1}+C'_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}+C''\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\left(M'\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x=0$$

для рассматриваемой эффективной модели.

§2. Определение и исследование характеристической функции $\alpha(\tau)$

Решения уравнений (1.20) могут быть выражены двукратными интегралами, которые представляют собой суперпозицию плоских волн

$$e^{ik(\tau t-x-\alpha z)}, \quad (2.1)$$

при этом

$$\tau=v_{ph}/\sin\varphi, \quad \alpha=\operatorname{ctg}\varphi, \quad (2.2)$$

v_{ph} – фазовая скорость, φ – угол между нормалью к плоскости фронта и осью z и k – составляющая волнового вектора вдоль оси x. Фронты волн как особенности указанных интегральных представлений волнового поля определяются функцией $\alpha(\tau)$. В случае точечного источника, расположенного в начале координат, фронты, согласно работе [13], выражаются параметрическими формулами

$$x=t[\tau-\alpha(\tau)/\alpha'(\tau)], \quad z=t/\alpha'(\tau), \quad (2.3)$$

которые определены при положительных τ и вещественных α.

Для нахождения функции $\alpha(\tau)$ проведем в уравнениях (1.20), в соответствии с выражением (2.1), замены

$$\frac{\partial}{\partial t}\sim\tau, \quad \frac{\partial}{\partial x}\sim-1, \quad \frac{\partial}{\partial z}\sim-\alpha \quad (2.4)$$

и запишем условие совместности полученных уравнений

$$\begin{vmatrix} H'_{11}-\rho_1\tau^2 & H'_{12} & \alpha B''_1 & C'_1-\rho_f\tau^2 \\ H'_{12} & H'_{22}-\rho_2\tau^2 & \alpha B''_2 & C'_2 \\ \alpha B''_1 & \alpha B''_2 & H''\alpha^2-\overline{\rho}\tau^2 & \alpha C'' \\ C'_1-\rho_f\tau^2 & C'_2 & \alpha C'' & M'-m\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.5)$$

Из условия (2.5) следуют формулы

$$\alpha^2(\tau) = \frac{\overline{\rho}\tau^2\Delta_1}{\Delta_0},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} H'_{11}-\rho_1\tau^2 & H'_{12} & C'_1-\rho_f\tau^2 \\ H'_{12} & H'_{22}-\rho_2\tau^2 & C'_2 \\ C'_1-\rho_f\tau^2 & C'_2 & M'-m\tau^2 \end{vmatrix}, \qquad (2.6)$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} H'_{11}-\rho_1\tau^2 & H'_{12} & B''_1 & C'_1-\rho_f\tau^2 \\ H'_{12} & H'_{22}-\rho_2\tau^2 & B''_2 & C'_2 \\ B''_1 & B''_2 & H'' & C'' \\ C'_1-\rho_f\tau^2 & C'_2 & C'' & M'-m\tau^2 \end{vmatrix},$$

определяющие функцию $\alpha(\tau)$. Оба определителя Δ_1 и Δ_0 являются кубическими четырехчленами относительно τ^2 и могут быть представлены в виде равенств

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\rho_2(\rho_1 m-\rho_f^2)(\tau^2-v_1^2)(\tau^2-v_2^2)(\tau^2-v_3^2), \\ \Delta_0 &= -H''\rho_2(\rho_1 m-\rho_f^2)(\tau^2-v_4^2)(\tau^2-v_5^2)(\tau^2-v_6^2), \end{aligned} \qquad (2.7)$$

в которых v_1^2, v_2^2, v_3^2 – корни функции Δ_1, а v_4^2, v_5^2, v_6^2 – корни выражения Δ_0.

Все эти корни являются неотрицательными. В самом деле, равенство $\Delta_1 = 0$ можно рассматривать как уравнение для определения характеристических чисел τ^2 в случае одновременного приведения к диагональному виду двух симметричных и положительно определенных матриц

$$\begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} & C'_1 \\ H'_{12} & H'_{22} & C'_2 \\ C'_1 & C'_2 & M' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \rho_f \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ \rho_f & 0 & m \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Согласно теореме, приведенной в монографии [14], и обобщению этой теоремы [10], корни v_1^2, v_2^2 и v_3^2 – неотрицательные. Аналогичные рассуждения можно провести и для корней уравнения

$\Delta_0 = 0$. В этом случае вместо матриц (2.8) имеем симметричные матрицы

$$\begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} & B''_1 & C'_1 \\ H'_{12} & H'_{22} & B''_2 & C'_2 \\ B''_1 & B''_2 & H'' & C'' \\ C'_1 & C'_2 & C'' & M' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \rho_f \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_f & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

из которых одна положительно определенная, а другая неотрицательно определенная. В результате корни v_4^2, v_5^2 и v_6^2 также оказываются неотрицательными. Для определенности выберем номера корней так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$v_1 > v_2 > v_3, \quad v_4 > v_5 > v_6. \tag{2.10}$$

В соотношениях (2.10) возможны и равенства, однако такие случаи не будут рассматриваться, так как они встречаются очень редко. Также исключим из рассмотрения случаи, когда совпадают корни уравнений $\Delta_0 = 0$ и $\Delta_1 = 0$.

Из первого равенства (2.6) следует формулы

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\overline{\rho}\tau^2(\tau^2 - v_1^2)(\tau^2 - v_2^2)(\tau^2 - v_3^2)}{H''(\tau^2 - v_4^2)(\tau^2 - v_5^2)(\tau^2 - v_6^2)}}. \tag{2.11}$$

При малых τ, когда $\tau \ll v_6$, справедливо приближенное соотношение

$$\alpha_1(\tau) = \tau/v_8, \tag{2.12}$$

где

$$v_8^2 = \frac{1}{\overline{\rho}} \begin{vmatrix} H'_{11} & H'_{12} & B''_1 & C'_1 \\ H'_{12} & H'_{22} & B''_2 & C'_2 \\ B''_1 & B''_2 & H'' & C'' \\ C'_1 & C'_2 & C'' & M' \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} H'_{11} & H'_{12} & C'_1 \\ H'_{12} & H'_{22} & C'_2 \\ C'_1 & C'_2 & M' \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

В случае $\tau \gg 1$ формула (2.11) переходит в асимптотическое равенство

$$\alpha_1(\tau) = \tau/v_7, \tag{2.14}$$

где

$$v_7^2 = H''/\overline{\rho}. \tag{2.15}$$

Величины v_7 и v_8 при всех возможных параметрах удовлетворяют условию

$$v_7 > v_8. \tag{2.16}$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (2.16) докажем неравенство

$$a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

выполняющееся для любой положительно определенной матрицы 4×4, определитель которой стоит в правой части (2.17). Вычисляя определители в соотношении (2.17), приходим к неравенству

$$\begin{gathered} a_{14}^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - 2a_{24}a_{34}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2a_{14}a_{34}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ +a_{24}^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} - 2a_{24}a_{34}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{34}^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \geqslant 0. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (2.18), является квадратичной формой с аргументами a_{14}, a_{24} и a_{34}. Эта квадратичная форма определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{23}^{23} & A_{31}^{23} & A_{12}^{23} \\ A_{23}^{31} & A_{31}^{31} & A_{12}^{31} \\ A_{23}^{12} & A_{31}^{12} & A_{12}^{12} \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

составленной из миноров симметричной положительно определенной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что матрица (2.19) также является симметричной и положительно определенной, и это утверждение доказывает неравенство (2.16).

Разделим точками $\tau = v_1$, $\tau = v_2$, ..., $\tau = v_6$ положительную часть оси τ на семь интервалов и пусть первый интервал начинается при $\tau = 0$. На границах этих интервалов величина $\alpha^2(\tau)$ изменяет знак. В первом, третьем, пятом и седьмом интервалах $\alpha^2(\tau) > 0$ и функция $\alpha(\tau)$ определяет фронты соотношениями (2.3). Так как скорость распространения волн вдоль оси z

конечна и положительна, то при установлении фронтов по формулам (2.3) следует использовать указанные интервалы и выбирать из функций $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ ту, у которой производная положительная. Во втором, четвертом и шестом интервалах величины $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$ оказываются мнимыми и не определяют фронтов.

В первом промежутке функция $\alpha_1(\tau)$, согласно равенству (2.12), возрастает и обращается в бесконечность на границе $\tau = v_6$. В седьмом интервале $[v_1, \infty)$ функция $\alpha_1(\tau)$ также возрастает в соответствии с асимптотической формулой (2.14). В третьем и пятом промежутках, где возможно и возрастание, и убывание функций $\alpha_{1,2}(\tau)$, выбор функции определяется указанным условием положительности производной. В связи с этим можно указать четыре возможных случая соотношений между величинами $v_1, v_2, \dots, v_6$.

$$
\begin{aligned}
&1)\quad v_1 > v_4 > v_2 > v_5 > v_3 > v_6,\\
&2)\quad v_1 > v_4 > v_2 > v_3 > v_5 > v_6,\\
&3)\quad v_1 > v_2 > v_4 > v_5 > v_3 > v_6,\\
&4)\quad v_1 > v_2 > v_4 > v_3 > v_5 > v_6.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Для каждого из этих случаев на соответствующих рисунках 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4 построены графики функций $\alpha_1(\tau)$ и $\alpha_2(\tau)$, определяющих фронты в квадранте $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. При построении графиков из начальных точек $\tau = v_1$, $\tau = v_2$, $\tau = v_3$ и $\tau = 0$ проведены плавные линии, которые приближаются к соответствующим асимптотам. Ветви, выходящие из точек $\tau = v_1$ и $\tau = 0$ на рис. 2.1–2.4, не имеют особенностей, а на средних ветвях находятся по одной точке перегиба и эти точки отмечены как жирные точки. Возможность существования дополнительных особенностей на графиках будет обсуждаться в следующем параграфе.

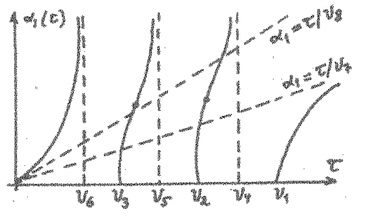

Рис. 2.1

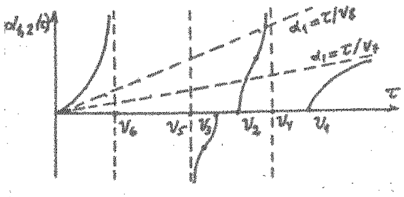

Рис.2.2.

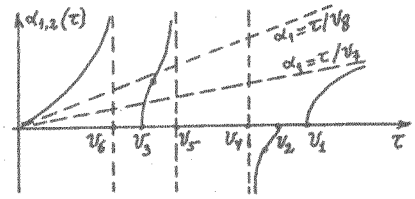

Рис. 2.3

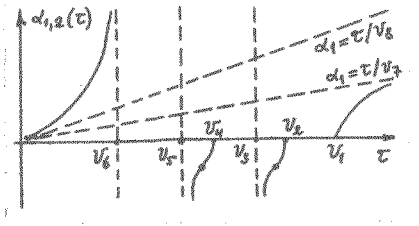

Рис. 2.4.

§3. Фронты от точечного источника

Вещественная функция $\alpha(\tau)$ определена в четырех интервалах (v_1, ∞), $(\min[v_2, v_4], \max[v_2, v_4])$, $(\min[v_3, v_5], \max[v_3, v_5])$, $(0, v_6)$ и характеризуется четырьмя ветвями графика этой функции. На основании этих ветвей графика и с использованием формулы (2.3) и второго равенства (2.2) построим четыре соответствующих фронта волн, возбужденных точечным источником. Для установления крайних точек этих фронтов в квадранте $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ рассмотрим начальные и конечные точки графиков и найдем отвечающие им точки на фронтах. Точкам $\tau = v_1$, $\tau = v_2$ и $\tau = v_3$, в которых $\alpha(\tau) = 0$ и $\alpha'(\tau) = \infty$, соответствуют точки $x = v_i t$, $z = 0$ пересечения фронтов с осью x, и эти пересечения осуществляются под прямыми углами. Точки $\tau = v_4$, $\tau = v_5$ и $\tau = v_6$, где $\alpha(\tau) = \infty$ и $\alpha'(\tau) = \infty$, определяют точки, в которых фронт касается оси x. В окрестности точки $\tau = \infty$, $\alpha = \infty$ график приближается к асимптоте $\alpha = \tau/v_7$, а в точке $\tau = 0$, $\alpha = 0$ график касается прямой $\alpha = \tau/v_8$. Этим точкам графика соответствуют общие точки фронтов с осью z, при этом первой точке графика отвечает точка ортогонального пересечения фронта с осью z, а второй – точка касания фронта с осью z.

Соединяя точки $(x = v_1 t,\ z = 0)$ и $(x = 0,\ z = v_7 t)$ плавной кривой, получаем первый фронт. Это фронт всегда выпуклый, и это утверждение будет позднее доказано. Пара точек $(x = v_2 t,$ $z = 0)$, $(x = v_4 t,\ z = 0)$ и пара других точек $(x = v_3 t,\ z = 0)$, $(x = v_5 t,\ z = 0)$ определяют два “треугольных фронта”. Каждый из фронтов может быть ориентирован двумя способами: 1) вдоль оси x впереди распространяется точка касания фронта с осью x, а позади – точка пересечения фронта с осью x и 2) вдоль оси

x указанные точки двигаются в обратном порядке. Первый вид "треугольного фронта" описывается ветвью графика, расположенной при $\alpha_1(\tau) \geqslant 0$, а второй вид – ветвью, находящейся в области $\alpha_2(\tau) \leqslant 0$. У обеих видов "треугольных фронтов" существует по одной угловой точке, соответствующей точке перегиба на графиках, где $\alpha''(\tau) = 0$, и разделяющей "треугольный фронт" на две части (вогнутую и выпуклую). Вогнутая часть для обоих видов фронта распространяется впереди выпуклой. Последний четвертый фронт, соединяющий точки ($x = v_6 t$, $z = 0$) и ($x = 0$, $z = v_8 t$), является вогнутым. Все указанные четыре фронта изображены на рисунках 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4, соответствующих графикам 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4. На этих фронтах во всех четырех случаях имеют место две угловые точки, шесть общих точек с осью x и две общие точки с осью z. Будем называть эти точки особыми и покажем, что других таких особых точек в рассматриваемой эффективной модели не существует.

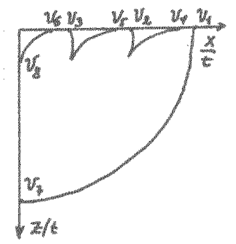

Рис. 3.1

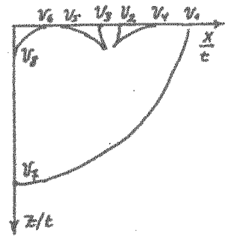

Рис. 3.2.

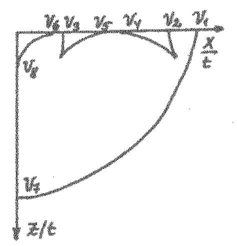

Рис. 3.3

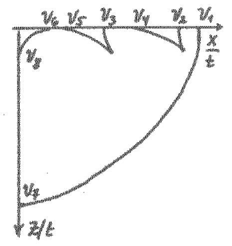

Рис. 3.4.

С этой целью отметим, что угловым точкам на фронте соответствуют точки перегиба на графике, где

$$\alpha''(\tau) = 0, \tag{3.1}$$

что общей точке фронта и оси x отвечает точка графика, в которой

$$\alpha'(\tau) = \infty, \tag{3.2}$$

а общей точке фронта и оси z соответствует точка, где

$$\tau\alpha'(\tau) = \alpha(\tau). \tag{3.3}$$

Геометрически условие (3.2) означает, что касательная к графику перпендикулярна оси τ, а условие (3.3) состоит в том, что касательная к графику должна проходить через начало координат.

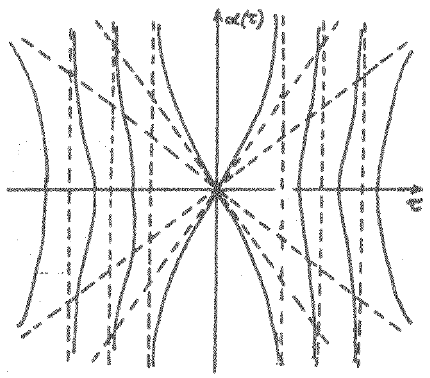

Рис. 4.

Для доказательства отсутствия дополнительных особых точек построим, как и в работах [10, 11], график вещественной двузначной функции $\alpha(\tau)$ в области $-\infty < \tau < \infty$, $-\infty < \alpha < \infty$ (рис. 4). Так как уравнение для функции $\alpha(\tau)$ (2.13) имеет восьмой порядок относительно τ, то любая прямая на плоскости τ, α может пересечь все ветви графика не более, чем в 8 точках. Другое ограничение возможных усложнений графика $\alpha(\tau)$ состоит в том, что прямая, параллельная оси α, может пересечь график только в двух точках. Из последнего ограничения следует, что, если в точках графика выполняются условия $\alpha'(\tau) = \infty$ и $\alpha(\tau) \neq 0$, то такая точка является также и точкой перегиба. Появление же дополнительных точек перегиба на графике оказывается невозможным, так как в этом случае можно указать такую прямую, которая пересечет все ветви графика в 10 точках, что является невозможным. Не могут существовать на графиках также и точки, в которых касательная проходит через начало координат. Если бы такая точка оказалась на графике, то после достаточно малого поворота касательной относительно начала координат в сторону оси τ появилась бы прямая, пересекающая ветви графика 10 раз. Таким образом, доказано отсутствие дополнительных особых точек на фронте. Отсюда следует, что рис. 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 правильно качественно характеризуют фронты волн от точечного источника, расположенного в начале координат.

Остановимся теперь на особенностях волнового поля в рассматриваемой эффективной модели. Характерная особенность этого поля состоит в отсутствии второй продольной волны. Такая волна, в частности, распространяется в эффективных моделях, описывающих среды, в которых чередуются или два пористых слоя Био с проскальзыванием на границах, или пористый и упругий слои с жестким контактам на границах. В исследуемой модели распространяются две волны с “треугольными фронтами”, в то время как в обеих упомянутых эффективных моделях возникает только одна волна с “треугольным фронтом”. Таким образом, дополнительный “треугольный фронт” в рассматриваемой модели “заменяет” фронт второй продольной волны.

По расположению фронтов исследуемая модель имеет сходство с эффективной моделью периодической слоистой упругой среды, в которой период состоит из трех слоев и между слоями установлен контакт с проскальзыванием [12, 13]. Выражения для характеристических функций (2.11) и (7.6) работы [12] имеют одинаковую структуру и вследствие этого в обеих моделях образуются одинаковые волны с передним фронтом, с двумя “треугольными фронтами” и с вогнутым фронтом. Эти фронты, согласно рис. 3.1 и рис. 5 работы [12], одинаково ориентированы в случае удовлетворения первого соотношения (2.21). Если же выполняются другие неравенства (2.21), то ориентация "треугольных фронтов" в рассматриваемой модели оказывается другой по сравнению с расположением "треугольных фронтов" в случае эффективной модели упомянутой слоистой упругой среды.

§4. Эффективная модель в случае тонких упругих слоев

Исследуем теперь частный случай рассматриваемой среды, когда относительная толщина упругих слоев θ_2 очень мала, но тонкие упругие слои остаются преградой для жидких частиц. В этом случае, согласно формулам (1.13), коэффициенты в уравнениях (1.11) и (1.12) выражаются соотношениями

$$H'_{11} = H, \quad H'_{12} = 0, \quad H'_{22} = 0, \quad B''_1 = B, \quad B''_2 = 0, \quad C'_1 = C,$$
$$C'_2 = 0, \quad H'' = H, \quad C'' = C, \quad M' = M, \quad \overline{\rho} = \rho, \quad \rho_1 = \rho \tag{4.1}$$

через параметры пористых слоев Био, а из уравнений эффективной модели следует исключить вторые уравнения (1.11) и (1.12). В результате эффективная модель в рассматриваемом случае описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= H\frac{\partial u_x}{\partial x} + B\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\frac{\partial w_x}{\partial x}, \\ \tau_{zz} &= B\frac{\partial u_x}{\partial x} + H\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\frac{\partial w_x}{\partial x}, \\ -p &= C\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + M\frac{\partial w_x}{\partial x}; \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_f\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

в которых у величин τ_{xx1} и u_{x1} исключен индекс 1. Эффективная модель, согласно уравнениям (4.2) и (4.3), является частным случаем пористой среды Био, у которой модуль сдвига и коэффициент извилистости пор оказываются разными вдоль осей x и z, при этом $L = 0$ и $m_z = \infty$. Эти условия приводят к соотношениям

$$\tau_{xz} = 0, \quad w_z = 0$$

и при переходе от уравнений (1.1) и (1.2) к равенствам (4.2) и (4.3) следует исключить четвертые уравнения (1.1) и (1.2). После подстановки уравнений закона Гука (4.2) в уравнения сплошной среды получаем уравнения Ламе

$$
\begin{gathered}
\left(H\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x+B\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\left(C\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x=0,\\
B\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\left(H\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z+C\frac{\partial^2 w_x}{\partial x\partial z}=0, \qquad (4.4)\\
\left(C\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_x+C\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\left(M\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_x=0
\end{gathered}
$$

для эффективной модели.

Чтобы вывести выражение для характеристической функции $\alpha(\tau)$, произведем, как и в §2, замену операций дифференцирования числами (2.4) и придем к уравнению

$$
\begin{vmatrix}
H-\rho\tau^2 & B & C-\rho_f\tau^2\\
B\alpha^2 & H\alpha^2-\rho\tau^2 & C\alpha^2\\
C-\rho_f\tau^2 & C & M-m\tau^2
\end{vmatrix}=0, \qquad (4.5)
$$

решение которого выражается равенствами

$$
\begin{gathered}
\alpha^2=\rho\tau^2\Delta_1/\Delta_0,\\
\Delta_1=(\rho m-\rho_f^2)\tau^4-(Hm+M\rho-2C\rho_f)\tau^2+HM-C^2 \qquad (4.6)\\
\Delta_0=H(\rho m-\rho_f^2)\tau^4-D\tau^2+(H-B)[(H+B)M-2C^2].\\
D=\rho(HM-C^2)+m(H^2-B^2)-2\rho_f C(H-B).
\end{gathered}
$$

Формулы (4.6) аналогичны соотношениям (2.6), которые при условиях (4.1) переходят в (4.6). При этом переходе в дроби Δ_1/Δ_0 проводится сокращение на множитель $\rho_2\tau^2$ и порядок полиномов Δ_1 и Δ_0 относительно τ^2 уменьшается с 3 до 2. Для построения графика функции $\alpha(\tau)$ полезно первое соотношение (4.6) заменить равенством

$$
\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{\rho\tau^2(\tau^2-v_1^2)(\tau^2-v_2^2)}{H(\tau^2-v_4^2)(\tau^2-v_5^2)}}, \qquad (4.7)
$$

в котором величины

$$
v_{1,2}^2=\Big[Hm+M\rho+2C\rho_f\pm
$$

$$\pm\sqrt{(Hm + M\rho - 2C\rho_f)^2 - 4(HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)}\Bigg] \Bigg/ [2(\rho m - \rho_f^2)],$$

$$v_{4,5}^2 = \Bigg[2H(\rho m - \rho_f^2)]^{-1}[D\pm \tag{4.8}$$

$$\pm\sqrt{D^2 - 4H(H-B)(\rho m - \rho_f^2)[(H+B)M - 2C^2]}\Bigg]$$

являются неотрицательными, согласно исследованиям в §2. Полуось $\tau \geqslant 0$ разделим точками $\tau = v_1$, $\tau = v_2$, $\tau = v_4$ и $\tau = v_5$ на 5 интервалов, на границах которых функция $\alpha^2(\tau)$ изменяет знак. В первом, третьем и пятом интервалах $\alpha^2(\tau) > 0$ и функция $\alpha(\tau)$ определяет волновые фронты по формулам (2.3). Второй и четвертый промежутки не представляют интереса при построении фронтов, так как в них $\alpha^2(\tau) < 0$. В первом интервале $[0, v_5)$ функция $\alpha_1(\tau)$ возрастает от 0 до ∞ и при малых τ представляется равенством (2.12), где

$$v_8^2 = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} H & B & C \\ B & H & C \\ C & C & M \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} H & C \\ C & M \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

В пятом промежутке $[v_1, \infty)$ функция $\alpha_1(\tau)$ также возрастает от 0 до ∞ и при больших τ приближается к асимптотике (2.14), при этом

$$v_7^2 = H/\rho. \tag{4.10}$$

Для величин v_7 и v_8 по-прежнему выполняется неравенство (2.16). В третьем промежутке функция $\alpha_1(\tau)$ может как возрастать, так и убывать. Характер изменения функций $\alpha_{1,2}(\tau)$ в этом интервале определяется двумя возможными соотношениями между величинами v_1, v_2, v_4 и v_5:

$$\begin{aligned} &1) \quad v_1 > v_4 > v_2 > v_5, \\ &2) \quad v_1 > v_2 > v_4 > v_5. \end{aligned} \tag{4.11}$$

В случае удовлетворения первых условий (4.11) функция $\alpha_1(\tau)$ возрастает от 0 до ∞, при выполнении вторых условий (4.11) функция $\alpha_1(\tau)$ убывает и для построения фронтов в квадранте $x > 0$, $z > 0$ следует использовать возрастающую функцию $\alpha_2(\tau)$. Применяя те же приемы, как и в §2, построим графики на рис. 5.1

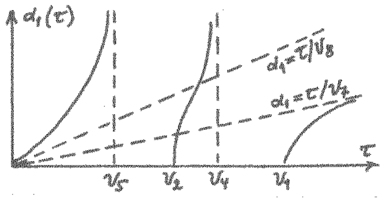

Рис. 5.1.

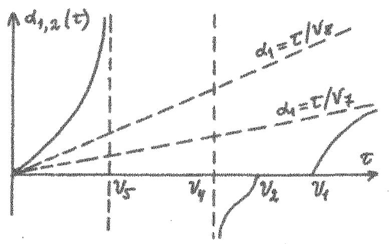

Рис. 5.2.

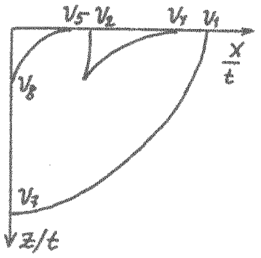

Рис. 6.1

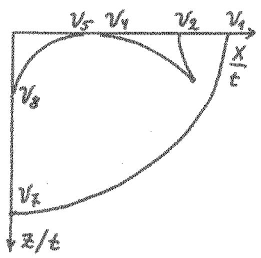

Рис. 6.2.

и 5.2, относящиеся соответственно к случаям 1) и 2) неравенств (4.11)

Вследствие большого сходства графиков функций $\alpha(\tau)$ в общем случае и в случае малых толщин упругих слоев построение фронтов в рассматриваемом частном случае не представляет трудностей. Фронты изображены на рис. 6.1 и 6.2, соответствующих неравенствам 1) и 2) (4.11). В волновом поле от точечного источника содержатся три фронта: передний, “треугольный” и вогнутый, при этом "треугольный фронт" может иметь две различные ориентации. Чтобы убедиться в отсутствии дополнительных особенностей, достаточно построить полный график двузначной вещественной функции $\alpha(\tau)$ на плоскости τ, α. Ни одна прямая не должна пересекать этот график более четырех раз. В случае же появления дополнительных особенностей таких пересечений оказывается больше четырех. Величины v_1, v_2, v_4, v_5, v_7 и v_8 – скорости распространения волн вдоль осей x и z. По сравнению с фронтами в общем случае (рис. 3.1–3.4) в рассматриваемом частном случае исчезает один из двух "треугольных фронтов". В этом частном случае расположение фронтов совпадает с расположением фронтов в эффективной модели, описывающей среду, в которой чередуются два упругих слоя с проскальзыванием на границах.

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range.* J. Acoust. Soc. Am., **28** (1956), 168–178.
2. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and elastic propagation in porous media.* J. Appl. Phys., **33**, No. 4 (1962), 1482–1498.
3. G. Backus, *Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering.* J. Geoph. Res., **67**, No. 11 (1962), 4427–4440.
4. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в неоднородных средах.* Математические задачи композиционных материалов. М. 1984, 352 с.
5. E. Sanches–Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory.* Lect. Notes Phys. Berlin, **127** (1980), 398 p.
6. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **89** (1979), 219–233.
7. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* Записки научн. семин. ПОМИ, **250** (1998), 219–243.
8. Л. А. Молотков, *Эффективные модели слоистых сред, содержащие пористые слои Био.* Записки научн. семин. ПОМИ, **239** (1997), 140–163.
9. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *О затухании в слоистых пористых средах Био и их эквивалентных моделях.* Записки научн. семин. ПОМИ, **250** (1998), 244–262.
10. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели пористой слоистой среды со скользящим контактом между слоями.* Записки научн. семин. ПОМИ, **257** (1999), 184–206.
11. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упругопористой среды.* Докл. Акад. Наук, **372**, No. 1 (2000), 108–112.

12. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактом проскальзывания на границах.* Записки научн. семин. ПОМИ, **210** (1994), 192–212.
13. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* Записки научн. семин. ЛОМИ, **140** (1984), 105–122.
14. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М. (1967), 575 с.

Molotkov L. A. The effective model of the layered medium in which porous and elastic layers being in slide contact alternate.

For the medium in which porous and elastic layers alternate with each other and there is slide contact on the interfaces, the effective model is established. This model is three-phase and contains two elastic phases and one fluid phase. The peculiarities of this effective model are that in it two waves with "triangular fronts" propagate and second (slow) longitudinal wave is absent. In partial case when thickness of elastic layers is very small but they remain as barries for fluid particles from the porous layers, the effective model becomes two-phase and one of "triangular fronts" disappears.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 ноября 2000 г.