Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

М. В. Перель, И. В. Фиалковский

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

Введение. Построению различных сильно локализованных решений волнового уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} = 0 \tag{1}$$

посвящены обширные исследования [1–8]. В частности, в [6] было построено решение, экспоненциально локализованное вблизи точки, бегущей по прямой со скоростью света. В настоящей работе мы обобщаем результат [6], построив семейство решений волнового уравнения, обладающих таким же свойством локализации и содержащих решение [6] как частный случай.

Затем, опираясь на полученные результаты для волнового уравнения, мы строим семейство частицеподобных решений уравнения Клейна–Гордона

$$h^2(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) + u = 0, \quad h = \text{const}. \tag{2}$$

Эти решения имеют конечную энергию и описывают волновые пакеты центральной частоты ω и волнового числа k, $\omega^2 = k^2 + 1/h^2$, амплитуда которых гауссовски спадает с удалением от точки, бегущей по прямой с групповой скоростью $v = d\omega/dk$. Мы называем эти решения, по аналогии с локализованными решениями волнового уравнения, гауссовыми волновыми пакетами.

Все решения уравнения Клейна–Гордона из построенного нами семейства могут быть записаны в виде

$$u = A\, f(iS/h),$$

Работа поддержана грантом РФФИ No. 00-01-00485.

где функция S удовлетворяет уравнению эйконала (Гамильтона–Якоби)

$$S_t^2 - S_x^2 - S_y^2 = 1, \tag{3}$$

а A – амплитудный множитель, зависящий от координат, S, A не зависят от h, функция f выражается через функцию Ханкеля.

Сравнение наших результаты с имеющимися в литературе решениями показывает, что одно из решений построенного нами семейства для трехмерного уравнения Клейна–Гордона совпадает с найденным в [7]. Мы также рассмотрели другое интересное решение найденного нами семейства, которое зависит только от одной переменной S, представляющей собой одно из точных комплексных решений уравнения эйконала. Оказалось, что если искать решение нелинейного уравнения Клейна–Гордона, зависящее только от S, то уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному. Сказанное справедливо для нелинейного уравнений Клейна–Гордона с произвольным числом пространственных координат.

При построении обобщения частицеподобных решений волнового уравнения мы следовали идее Жиолковского [3] и искали такие решения в виде суперпозиции гауссовских пучков – решений, сосредоточенных вблизи луча, которые были найдены впервые в работах Бриттингхама [1] и Киселева [2] и принадлежат классу "относительно неискажающихся волн" Куранта и Гильберта [10].

Построение решений уравнения Клейна–Гордона основано на простом факте: взяв преобразование Фурье по одной из переменных, например, z

$$u(x,y,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \phi(x,y,z,t)\, e^{iz/h} \tag{4}$$

от решения волнового уравнения (1), получим решение уравнения Клейна–Гордона (2).

Обобщенные гауссовские пакеты волнового уравнения. Будем исходить из решения волнового уравнения (1), найденного в [1, 2], и определяющегося формулой

$$\phi_b(x,y,z,t,q) = \frac{\exp\{iq\Theta_1\}}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}(\beta - i\varepsilon_2)^{1/2}}, \tag{5}$$

в которой введены обозначения

$$\Theta_1 = x - t + \frac{y^2}{\beta - i\varepsilon_1} + \frac{z^2}{\beta - i\varepsilon_2}, \quad \beta = x + t. \tag{6}$$

Функция ϕ_b удовлетворяет (1) при любых значениях параметров q, ε_1 и ε_2 и представляет собой гауссовский пучок (гауссовски локализована вблизи оси ox), если $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $q > 0$.

Мы ищем частицеподобные решения уравнения (1) в виде разложения по гауссовским пучкам

$$\phi_p^{(\nu)}(x,y,z,t) = \int\limits_0^\infty dq\; \mathcal{F}^{(\nu)}(q)\, \phi_b(x,y,z,t,q), \tag{7}$$

где $\mathcal{F}^{(\nu)}(q)$ – специально подобранная функция, зависящая от параметра ν. Мы положим

$$\mathcal{F}^{(\nu)}(q) \equiv a\, q^{-\nu-1}\, e^{-\varepsilon\left(q+\sigma^2/q\right)}, \tag{8}$$

где ν, σ, ε произвольные постоянные $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$, $a = (4\varepsilon\sigma^2)^\nu/(2\sqrt{\pi})$. Нетрудно показать, что (7) сводится к интегральному представлению функции Ханкеля первого рода $H_\nu^{(1)}$ [12]

$$\phi_p^{(\nu)}(x,y,z,t) = C\frac{s^\nu H_\nu^{(1)}(s)}{\sqrt{(\beta - i\varepsilon_1)(\beta - i\varepsilon_2)}}, \quad s = 2i\sigma\varepsilon\left(1 - \frac{i\Theta_1}{\varepsilon}\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где $C = i\; 2^{\nu-1}\sqrt{\pi}$, причем s удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби для волнового уравнения $s_t^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$.

Отметим, что при $\nu = 1/2$ формула (9) дает решение волнового уравнения, полученное в [6],

$$\phi_p^{(1/2)}(x,y,z,t) = \frac{\exp\left\{-2\sigma\varepsilon\sqrt{1 - i\Theta_1/\varepsilon}\right\}}{\sqrt{(\beta - i\varepsilon_1)(\beta - i\varepsilon_2)}}. \tag{10}$$

Это решение зависит от четырех произвольных параметров ε, ε_1, ε_2, σ. Как показано в [6], оно гауссовски локализовано около точки, бегущей по оси ox со скоростью света ($c = 1$), если эти параметры положительны.

Асимптотика решения (9) при больших значениях аргумента функции Ханкеля имеет такой же экспоненциальный множитель, как (10). Аналогичные приведенным в [6] рассуждения доказывают локализацию (9). Поэтому решение (9) является обобщением (10).

Гауссовские пучки для уравнения Клейна–Гордона. Приведем здесь решение u_b уравнения Клейна–Гордона, гауссовски локализованное вблизи луча, которое будет использоваться для построения частицеподобных решений уравнения Клейна–Гордона.

Решение u_b получим, вычисляя преобразование Фурье по z (4) от (5),

$$u_b(x,y,t;q) = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{i\pi/4-\varepsilon_2/(4qh^2)}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\exp\left\{i\Theta q - i\beta/(4qh^2)\right\}}{\sqrt{\beta - i\varepsilon_1}}, \tag{11}$$

где

$$\Theta = x - t + \frac{y^2}{\beta - i\varepsilon_1}. \tag{12}$$

Это решение было найдено в [8]. Будем называть такие решения гауссовскими пучками, по аналогии с гауссовски локализованными вблизи луча решениями волнового уравнения.

Гауссовские пакеты для уравнения Клейна–Гордона. Взяв преобразование Фурье (4) по z от обеих частей равенства (7), получим решения уравнения Клейна–Гордона в виде разложения по гауссовским пучкам u_b (11) этого уравнения

$$u_p^{(\nu)}(x,y,t) = \int\limits_0^\infty dq\; \mathcal{F}^{(\nu)}(q)\, u_b(x,y,t;q). \tag{13}$$

Подставляя выражение u_b (11) и функцию $\mathcal{F}^{(\nu)}(q)$ (8) в (13), найдем

$$u_p^{(\nu)}(x,y,t) = C_1\, \frac{S_p^{\nu+1/2}\, H^{(1)}_{\nu+1/2}(S_p/h)}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}(\beta - 4i\varepsilon\sigma^2h^2 - i\varepsilon_2)^{\nu+1/2}}, \tag{14}$$

где

$$S_p = i\left[(\Theta + i\varepsilon)(\beta - 4i\varepsilon\sigma^2h^2 - i\varepsilon_2)\right]^{1/2}. \tag{15}$$

Функция S_p не зависят от ν. Формула (14) дает семейство точных решений уравнения Клейна–Гордона, которые, как мы увидим ниже, частицеподобны. Это семейство зависит от четырех произвольных параметров ν, ε, ε_1 и σ. Постоянный множитель в (14) определяется формулой $C_1 = \pi(8\varepsilon\sigma^2h^2 + 2\varepsilon_2)^{\nu-1/2}h^{\nu+3/2}\, e^{i\pi(\nu+1)}/\sqrt{2}$. В дальнейшем мы будем из соображений удобства использовать другие параметры, что упростит запись (14).

Лучевая интерпретация гауссовских пучков и гауссовских волновых пакетов. Введение нового произвольного параметра κ по формуле $\kappa = qh$, позволяет записать (11) в виде лучевого разложения, состоящего лишь из одного члена

$$u_b = c_b \frac{\exp\{iS_b/h\}}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}} \qquad c_b = \mathrm{const}, \tag{16}$$

$$S_b = \kappa\Theta - \frac{\beta}{4\kappa}. \tag{17}$$

Комплексная "фаза" S_b не зависит от h и удовлетворяет уравнению эйконала (3).

Отметим также, что решение u_b является эталонным для асимптотических конструкций Маслова [11].

Решения $u_p^{(\nu)}$ удобно записываются, если вместо произвольных параметров σ и ε_2 ввести произвольный параметр $\gamma = 4\varepsilon\sigma^2 h^2 + \varepsilon_2$, а вместо ν использовать $\mu = \nu + 1/2$. Тогда

$$u_p^{(\mu-1/2)} = C_1 \frac{S_p^\mu\, H_\mu^{(1)}(S_p/h)}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}(\beta - i\gamma)^\mu}. \tag{18}$$

Комплексная фаза

$$S_p = i\left[(\Theta + i\varepsilon)(\beta - i\gamma)\right]^{1/2} \tag{19}$$

не зависит от h и удовлетворяет уравнению эйконала (3), также как и S_b из (17).

В частных случаях полуцелых μ функции Ханкеля выражаются через элементарные функции. Приведем здесь решения при $\mu = 1/2$, $\mu = -1/2$:

$$u_p^{(0)} = C_2 \frac{\exp\{iS_p/h\}}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}(\beta - i\gamma)^{1/2}},$$
$$u_p^{(-1)} = C_3 \frac{\exp\{iS_p/h\}}{S_p}\sqrt{\frac{\beta - i\gamma}{\beta - i\varepsilon_1}}, \tag{20}$$

C_2, C_3 постоянные. Эти решения, как и (16), имеют вид лучевых разложений, состоящих из одного главного члена.

Исследование решений. Прежде всего, покажем, что решение u_b (16) локализовано вблизи оси ox. Выделив вещественную и мнимую части в комплексной фазе S_b (17), и введя обозначения

$$\widetilde{k} = \left(\kappa - \frac{1}{4\kappa}\right), \quad \widetilde{\omega} = \sqrt{\widetilde{k}^2 + 1}, \quad \Delta_y = \sqrt{2\frac{\varepsilon_1^2 + \beta^2}{\varepsilon_1(\widetilde{k} + \widetilde{\omega})}}, \tag{21}$$

получим

$$iS_b = i(\widetilde{k}x - \widetilde{\omega}t) - \frac{y^2}{\Delta_y^2} + i\frac{y^2}{\Delta_y^2} \cdot \frac{\beta}{\varepsilon_1}. \tag{22}$$

Если $|\beta| \ll \varepsilon_1$, то решение u_b представляет собой распространяющуюся вдоль оси ox волну частоты $\omega = \widetilde{\omega}/h$, с волновым числом $k = \widetilde{k}/h$, гауссовски спадающую с удалением от оси ox. Степень локализации вблизи оси ox определяется параметром $\sqrt{h}\Delta_y$. При любых конечных β волна гауссовски локализована вблизи оси ox, однако степень локализации уменьшается с ростом β.

Найдем теперь асимптотическое поведение решений $u_p^{(\mu-1/2)}$. Все функции S_p, как уже упоминалось, не зависят от μ. При больших значениях $|S_p|/h$ асимптотики функций Ханкеля различаются лишь фазовым множителем, и асимптотика всех решений семейства имеет вид

$$u_p^{(\mu-1/2)}(x, y, t) \sim C_3 \frac{S_p^{\mu-1/2} \exp\{iS_p/h\}}{(\beta - i\varepsilon_1)^{1/2}(\beta - i\gamma)^{\mu}}, \tag{23}$$

$C_3 = C_1\sqrt{2/\pi}e^{-i\pi\mu/2 - i\pi/4}$.

Выясним теперь, как меняется S_p при изменении пространственных координат и времени.

Выделим действительную и мнимую часть в подкоренном выражении (19)

$$\begin{aligned} iS_p = -\Bigg[&\gamma\varepsilon + x^2 - t^2 + y^2\frac{\beta^2 + \gamma\varepsilon_1}{\beta^2 + \varepsilon_1^2} + \\ &+ 2i\left(\sqrt{\gamma\varepsilon}(\widetilde{\omega}t - \widetilde{k}x) + y^2\frac{\beta(\varepsilon_1 - \gamma)}{\beta^2 + \varepsilon_1^2}\right)\Bigg]^{1/2}, \end{aligned} \tag{24}$$

здесь $\widetilde{k}$, $\widetilde{\omega}$ определяются формулами (21) если считать, что $\kappa = \sqrt{\gamma}/4\varepsilon$.

Докажем теперь грубую оценку, справедливую при любом фиксированном t и показывающую, с учетом асимптотики (23), что любое решение из семейства (14) имеет конечную энергию.

Отметим прежде всего тот простой факт, что если a_1, a_2 вещественны, то $\operatorname{Re}\sqrt{a_1+ia_2} = \left((a_1+\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,)/2\right)^{1/2}$. Отсюда,

$$\operatorname{Re}\sqrt{a_1+ia_2} \geqslant \sqrt{a_1}, \quad \text{если} \quad a_1 \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$|\operatorname{Re}(iS_p)| \geqslant \left[\gamma\varepsilon + x^2 - t^2 + y^2\frac{\beta^2+\gamma\varepsilon_1}{\beta^2+\varepsilon_1^2}\right]^{1/2}. \tag{25}$$

Оценка (25) показывает, что при достаточно больших значениях пространственных координат и при фиксированном времени применима асимптотика функции Ханкеля, и поведение решений (18) описывается формулой (23). Поэтому модуль любого решения $|u_p^{(\mu-1/2)}|$ экспоненциально убывает с ростом координат и, следовательно, всем этим решениям соответствует конечная энергия. Если $|t| \leqslant \sqrt{\gamma\varepsilon}$, то оценка верна при любых значениях пространственных координат.

Покажем теперь, что при некоторых ограничениях на значения x, y, t и некоторых соотношениях параметров решения $u_p^{(\mu-1/2)}$ описывают гауссовски локализованные пакеты. Разложим iS_p в ряд, считая, что все слагаемые под корнем, содержащие переменные x, y, t, малы по сравнению с $\varepsilon\gamma$. Ограничиваясь квадратичными членами по x, y, t, найдем

$$iS_p \quad \sim \quad i(\widetilde{k}x - \widetilde{\omega}t) - \sqrt{\gamma\varepsilon} - \frac{(x-vt)^2}{\Delta_x^2} - \frac{y^2}{\Delta_y^2}, \tag{26}$$

где v – групповая скорость $v = d\widetilde{\omega}/d\widetilde{k} = \widetilde{k}/\widetilde{\omega}$, а

$$\Delta_x = \frac{\sqrt{2\kappa\varepsilon}}{\widetilde{\omega}}, \quad \Delta_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\kappa}}. \tag{27}$$

Напомним, что $\kappa = \sqrt{\gamma}/4\varepsilon$.

Условие $\sqrt{\gamma\varepsilon} = 2\kappa\varepsilon \gg h$ позволяет пользоваться асимптотикой функции Ханкеля в (18) вне зависимости от значений x, y и t. Область применимости формулы (26), однако, ограничена не очень большими значениями x, y, t, но при некоторых значениях параметров κ, ε, ε_1 эта область может быть больше, чем “ширины” пакета $\sqrt{h}\Delta_x$, $\sqrt{h}\Delta_y$. При этом все решения семейства

$u_p^{(\mu-1/2)}$ гауссовски локализованы вблизи точки, бегущей вдоль оси ox с групповой скоростью v.

Подобное поведение решений возможно при определенном соотношении всех параметров задачи, которое мы не будем выписывать в общем случае, чтобы не загромождать изложение, а приведем позже, когда будем обсуждать наиболее интересный частный случай.

На рис. 1 представлена вещественная часть $u_p^{(0)}$ (20) в условных единицах при $t = 0$ а) и при $t = 10$ б) для случая $h = 0.3$, $\varepsilon = 10$ и $\kappa = 1$.

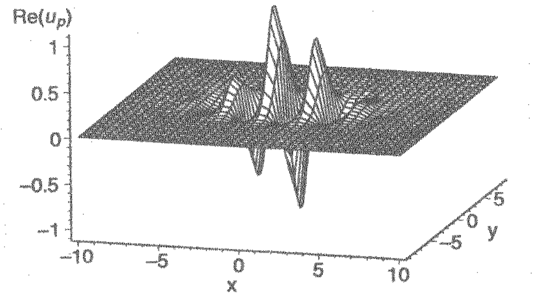

Рис. 1а.

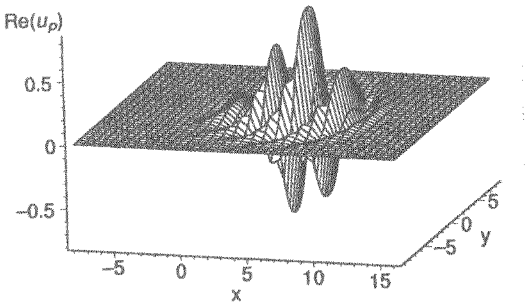

Рис. 1б.

Простой пример гауссовского пакета. Интересное решение уравнения Клейна–Гордона (2) может быть получено из (1) при $\varepsilon_1 = \gamma \equiv 4\kappa^2\varepsilon$. Тогда решение $u_p^{(-1)}$ оказывается зависящим лишь от одной переменной S_p, и с точностью до постоянного множителя имеем

$$u_p^{(-1)} = C_p \frac{e^{iS_p/h}}{S_p}. \tag{28}$$

Фаза S_p в этом случае выражается следующей формулой

$$\begin{aligned} S_p &= i\sqrt{b^2 + x^2 + y^2 - t^2 + 2ib(\widetilde{\omega}t - \widetilde{k}x)} = \\ &= i\sqrt{(x - ib\widetilde{k})^2 + y^2 - (t - ib\widetilde{\omega})^2}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $b = \sqrt{\gamma\varepsilon} \equiv 2\kappa\varepsilon$, $\widetilde{k}$ выражается через κ, как показано в (21), но удобнее считать независимыми сами параметры $\widetilde{k}$ и b, $\widetilde{\omega} = \sqrt{\widetilde{k}^2 + 1}$.

Формула (26) дает асимптотику S_p, причем $\Delta_x = \sqrt{b}/\widetilde{\omega}$, $\Delta_y = \sqrt{2b}$. Приведем здесь условия ее применимости. Разложение (29) в ряд возможно, если $x \ll b$, $y \ll b$, $t \ll b$, $t \ll b/\widetilde{\omega}$, $x \ll b/\widetilde{k}$. Поскольку $\widetilde{\omega} \geqslant 1$, более жесткими являются условия $t \ll b/\widetilde{\omega}$, $x \ll \min(b, b/\widetilde{k})$. Выражение (29) позволяет утверждать, что решение гауссовски сосредоточено около бегущей с групповой скоростью точки, если продольный и поперечный "размеры" $\sqrt{h}\Delta_x$, $\sqrt{h}\Delta_y$, а также временной "размер" пакета $\sqrt{h}\Delta_x/v$ много меньше, чем область применимости выражения (29), а именно $\sqrt{hb}\ \widetilde{\omega} \ll \min(b, b/\widetilde{k})$, $\sqrt{2hb} \ll b$, $\sqrt{hb}/\widetilde{k} \ll b/\widetilde{\omega}$. Наиболее жесткое из полученных условий имеет вид

$$h \ll b\ \frac{\widetilde{k}^2}{\widetilde{\omega}^2}. \tag{30}$$

Случай трех пространственных измерений. Все вышеизложенное можно обобщить на случай трех и более пространственных переменных. Мы приведем здесь результаты для трех пространственных переменных и сравним полученные решения с решениями, найденными в [7]. Обратимся к уравнению

$$h^2\,(u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}) + u = 0, \quad h = \text{const}. \tag{31}$$

При построении локализованных решений будем опираться на локализованные решения четырехмерного волнового уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi_{yy} - \phi_{zz} - \phi_{z_1 z_1} = 0. \tag{32}$$

Осесимметричные гауссовские пучки для этого уравнения описываются выражением

$$\phi_b(x, y, z, z_1, t, q) = \frac{\exp\{iq\Theta_1\}}{(\beta - i\varepsilon_1)(\beta - i\varepsilon_2)^{1/2}}. \tag{33}$$

В отличие от (6) здесь

$$\Theta_1 = x - t + \frac{y^2}{\beta - i\varepsilon_1} + \frac{z^2}{\beta - i\varepsilon_1} + \frac{z_1^2}{\beta - i\varepsilon_2}, \quad \beta = x + t. \tag{34}$$

Также, как это было сделано выше, обобщенные гауссовские волновые пакеты для волнового уравнения (32) будем строить с помощью весовой функции (8) из гауссовских пучков по формуле, аналогичной (7). Затем возьмем преобразование Фурье

$$u(x, y, z, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz\, \phi(x, y, z, z_1, t)\, e^{iz_1/h} \tag{35}$$

от правой и левой частей формулы аналогичной (7). При этом найдем решения типа гауссовских частиц для уравнения Клейна–Гордона (31)

$$u_p^{(\mu-1/2)} = C_4\, \frac{S_p^{\mu}\, H_{\mu}^{(1)}(S_p/h)}{(\beta - i\varepsilon_1)(\beta - i\gamma)^{\mu}}, \tag{36}$$

$C_4 = \mathrm{const}$, где S_p определяется формулой (19), в которой теперь

$$\Theta = x - t + \frac{y^2}{\beta - i\varepsilon_1} + \frac{z^2}{\beta - i\varepsilon_1}. \tag{37}$$

Гауссовские частицы $u_p^{(\mu-1/2)}$ в трехмерном случае отличаются от соответствующих решений в двумерном случае (18) степенью множителя $\beta - i\varepsilon_1$ в знаменателе и дополнительным слагаемым, содержащим переменную z в (37).

Решение

$$u_p^{(-1)} = C_5\, \frac{(\beta - i\gamma)^{1/2}}{(\beta - i\varepsilon_1) S_p}\, \exp\{i\, S_p/h\} = C_5\, \frac{\exp\{i\, S_p/h\}}{(\beta - i\varepsilon_1)\,(\Theta + i\varepsilon)^{1/2}}, \tag{38}$$

$C_5 = \mathrm{const}$, было найдено в работе [7]. Это решение есть гауссовская частица (36) при $\mu = -1/2$.

В трехмерном случае, как и в двумерном, имеется решение, зависящее только от S_p. Это $u_p^{(-3/2)}$, причем надо положить $\varepsilon_1 = \gamma$,

$$u_p^{(-3/2)} = C_6 \frac{H_1^{(1)}(iS_p/h)}{S_p}, \tag{39}$$

$C_6 = \mathrm{const}$.

О нелинейных уравнениях Клейна–Гордона. Приведенные выше рассуждения можно использовать для решения нелинейных уравнений Клейна–Гордона в двумерном

$$h^2 (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) + \phi(u) = 0 \tag{40}$$

и трехмерном случаях

$$h^2 (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz}) + \phi(u) = 0. \tag{41}$$

Будем разыскивать решения в виде $u = F(s)$, $s = S_p/h$, тогда для F получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F_{ss} + \frac{2}{s} F_s + \phi(F) = 0 \tag{42}$$

в случае (40) и

$$F_{ss} + \frac{3}{s} F_s + \phi(F) = 0$$

в случае (41).

Мы благодарны профессору А. П. Киселеву за интерес к работе и стимулирующее обсуждение.

Литература

1. J. N. Brittingham, *Focus wave modes in honogeneouns Maxwell equations: transverse electric mode.* — J. Appl. Phys. **54**, 1179 (1983).
2. A. P. Kiselev, — Radiophys. Quantum Electron **26**, 755 (1983).
3. R. W. Ziolkowski, *Localised transmission of electromagnetic enegry.* — Phys. Rev. A **39**, 2005–2033 (1989).
4. P. L. Overfelt, *Bessel-Gauss pulses.* — Phys. Rev. A **44**, 3941–3947 (1991).
5. H. E. Moses and R. T. Prosser, *Acoustic and eletromagnetic bullets: derivation of new exact solutions of the acoustic and Maxwell's equation.* — J. Math. Phys. **33**, 86 (1992).

6. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* J. Math. Phys. **41(4)**, 1934–1955 (2000).
7. I. M. Besieres, A. M. Shaarawi, L. P. Ligthart, *A note on dimension reduction and finite enbergy localized wave solutions to the Klein–Gordon and scalar wave equations. Part I: FMW-type.* — J. Electromagn. Waves Appl. **14(5)**, 593–610 (2000).
8. R. W. Ziolkowski, *Exact solutions of the wave equation with complex source location.* — J. Appl. Phys. **26**, 861-863 (1985).
9. A. M. Shaarawi, I. M. Besieres, R. W. Ziolkowski, *A novel approach to synthesis of non-dispersive wave packet solutions to the Klein–Gordon and Dirak equations.* — J. Appl. Phys. **31**, 2510–2519 (1990).
10. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics.* Vol. 2, Interscience, New York (1962).
11. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, Москва (1977).
12. А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математичекской физики.* Наука, М. (1962).

Perel M. V., Fialkovsky I. V. Exponentially localized solutions to the Klein–Gordon equation.

Explicit exponentially localized packet-like solutions to the Klein–Gordon equation are presented for the cases of two and three spacial variables. The approach is based on complex ray theory. The nonlinear Klein–Gordon equation is reduced to simple ordinary differential equation of complex solution of the eikonal equation.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 апреля 2000 г.