Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

М. М. Попов

АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ОСИ СИММЕТРИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1] и посвящена построению высокочастотной асимптотики волнового поля в окрестности оси симметрии трансверсально изотропной (TI) однородной среды, возбуждаемого сосредоточенной и направленной перпендикулярно этой оси силой.

Как известно, см., например, [2, 3] скорости SV и SH волн в направлении оси симметрии TI среды совпадают, а соответствующие поверхности медленности касаются. Лучевой метод в этом случае сталкивается с той трудностью, что собственные векторы (или вектора поляризации SV и SH волн) теряют гладкость, хотя собственные значения и остаются гладкими. Возникающая проблема построения высокочастотной асимптотики волнового поля получила название "kiss singularity" и рассматривалась в ряде работ, см. [2, 4, 5] и приведенные там ссылки.

В статье [1] получена асимптотика SH волны в окрестности оси симметрии, и для полного описания kiss singularity остается получить вклад, даваемый SV-волной, которая распространяется вдоль оси с той же скоростью, что и SH. Этому и посвящена данная работа.

В §1 формулируется рассматриваемая задача, приводится главный член высокочастотной асимптотики волнового поля в окрестности оси, описывающий kiss singularity, и дается его физическая интерпретация. В §2 описываются основные пункты ис-

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00107.

пользуемой математической техники, которая, по существу, повторяет технику работы [1].

Отметим в заключение, что полученные нами результаты не всегда согласуются с работой [4]. Наиболее близкие к нашим результаты имеются в статье [5], однако, есть и существенное отличие, которое состоит в следующем. В работе Бухвалда 1959 г. [6] было указано, что из системы уравнений для TI однородной среды может быть отщеплено одно скалярное уравнение (уравнение Гельмгольца), которому удовлетворяет некоторая комбинация из частных производных от двух координат вектора смещения. Если далее найдено нужное решение этого скалярного уравнения, то мы приходим к одному уравнению в частных производных относительно двух неизвестных функций, а именно, упомянутых выше двух координат вектора смещения. Ясно, что задача восстановления этих двух функций по одному уравнению является неоднозначной и требует дополнительных условий. В цитируемой работе [5] предлагается и используется некоторый способ восстановления координат вектора смещения, но остается неясным насколько он правилен.

Используемый нами подход опирается на классический метод Фурье для систем уравнений с постоянными коэффициентами и не содержит указанных выше неоднозначных приемов.

§1. Формулировка задачи и основной результат

Рассмотрим однородную, трансверсально изотропную среду с осью симметрии, совпадающей с осью x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Временную зависимость волнового поля выделим в виде $\exp(-i\omega t)$, а соответствующий стационарный вектор смещения обозначим через $\vec{U}(\vec{x};\omega) = (U_1, U_2, U_3)$. Уравнения упругости для $\vec{U}(\vec{x};\omega)$ при наличии сосредоточенной силы, направленной вдоль оси x_1, приобретают вид

$$\rho(-i\omega)^2 U_m - c_{mjkl}\frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{1}{2\pi}\delta_{m1}\delta(\vec{x}), \quad m = 1,2,3, \qquad (1.1)$$

где ρ – плотность, c_{mjkl} – упругие постоянные, δ_{m1} – символ Кронекера и $\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ – трехмерная δ-функция. К уравнениям (1.1) следует добавить условия излучения, обеспечивающие отсутствие волн, приходящих из бесконечности.

В дальнейшем решение уравнения (1.1) строится в виде интеграла Фурье

$$\vec{U}(\vec{x};\omega) = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \cdot \vec{u}(\vec{\alpha};\omega)\exp(ix_k\alpha_k), \tag{1.2}$$

где α_1, α_2, α_3 – двойственные переменные к x_1, x_2, x_3, соответственно. Вектор-функция $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ является решением линейной алгебраической системы

$$M_{mk}u_k \equiv \Big(A_{mk} - \rho\omega^2\delta_{mk}\Big)u_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \delta_{m1}, \quad m = 1,2,3, \tag{1.3}$$

в которой симметричная, положительно определенная матрица A имеет вид

$$A_{mk} = c_{mjkl}\alpha_j\alpha_l, \quad m,k = 1,2,3. \tag{1.4}$$

Находится вектор $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ из системы уравнений (1.3) обращением симметричной матрицы $M = A - \rho\omega^2 E$, где E – единичная матрица 3×3.

Для случая рассматриваемой нами трансверсально изотропной среды с осью симметрии, направленной вдоль оси x_3, элементы матрица A имеет вид[1]

$$\begin{aligned}
A_{11} &= c_{11}\alpha_1^2 + c_{66}\alpha_2^2 + c_{44}\alpha_3^2\\
A_{22} &= c_{66}\alpha_1^2 + c_{11}\alpha_2^2 + c_{44}\alpha_3^2\\
A_{33} &= c_{44}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + c_{33}\alpha_3^2\\
A_{12} &= \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\alpha_1\alpha_2\\
A_{13} &= (c_{13} + c_{44})\alpha_1\alpha_3\\
A_{23} &= (c_{13} + c_{44})\alpha_2\alpha_3,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где c_{ik} упругие постоянные, характеризующие TI среду. Здесь использованы традиционные обозначения, см. [3, 4].

Мы будем рассматривать далее волновое поле в окрестности оси симметрии, распространяющееся в положительном направлении оси x_3. Для описания основного результата нам потребуются приводимые ниже дополнительные обозначения и вспомогательные результаты.

[1] К сожалению, в работе [1] в этих формулах имеются опечатки.

Обозначим через λ_j, $\vec{\xi}_j$, $j = 1, 2, 3$, соответственно собственные значения и собственные вектора матрицы M. Определим поверхности медленности в пространстве α_1, α_2, α_3 уравнениями

$$\lambda_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \omega) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.6}$$

Условимся считать, что λ_1 соответствует квази P волне, которую мы далее рассматривать не будем, λ_2 соответствует SV волне, а λ_3 – SH волне. С целью исключить круговую частоту ω из уравнений (1.6) и учитывая симметрию поверхностей медленности, положим

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \omega p \cos\chi, \qquad && 0 \leqslant \chi \leqslant 2\pi, \\ &\alpha_2 = \omega p \sin\chi, \qquad && 0 \leqslant p < +\infty, \\ &\alpha_3 = \omega\widehat{\alpha}_3. && \end{aligned} \tag{1.7}$$

Подставим далее (1.7) в уравнения (1.6) и решим последние относительно $\widehat{\alpha}_{3j} = \widehat{\alpha}_{3j}(p^2)$ при малых p, т.е. в виде разложения по степеням p. В результате получим

$$\widehat{\alpha}_{3j}(p^2) = \widehat{\alpha}_{3j}(0) + \frac{1}{2}\beta_j p^2 + O(p^4), \tag{1.8}$$

где величина β_j имеет смысл кривизны поверхности медленности, которая есть поверхность вращения вокруг оси α_3, в точке $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Используя известные, см., например, [3, 4], формулы для собственных значений матрицы A или M, находим, что для случая SH волн ($j = 3$)

$$\widehat{\alpha}_{33}(0) = \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}; \quad \beta_3 = -\frac{c_{66}}{\sqrt{\rho\, c_{44}}}. \tag{1.9}$$

Для случая SV волн ($j = 2$) получаем

$$\widehat{\alpha}_{32}(0) = \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}; \quad \beta_2 = \frac{(c_{13} + c_{44})^2 - c_{11}(c_{33} - c_{44})}{\sqrt{\rho\, c_{44}}\,(c_{33} - c_{44})}. \tag{1.10}$$

Таким образом, поверхности медленности для SH и SV волн касаются на оси α_3, но имеют разные кривизны как по величине, так, вообще говоря, и по знаку. Именно величины (1.9) и (1.10) входят в главный член асимптотики волнового поля, описывающий kiss singularity.

Далее, точку наблюдения будем описывать сферическими координатами s, ϑ, φ

$$\begin{aligned} x_1 &= s\sin\vartheta\cos\varphi, && 0 \leqslant s < +\infty, \\ x_2 &= s\sin\vartheta\sin\varphi, && 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \\ x_3 &= s\cos\vartheta, && 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Подчеркнем, что вектор смещения попрежнему остается заданным в базисе исходной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3, но при этом координаты вектора смещения будут рассматриваться как функции сферических координат s, ϑ, φ.

Асимптотика волнового поля в окрестности оси $\vartheta = 0$ находится на больших расстояниях от источника $s = 0$ в терминах числа длин волн, т.е. $\omega s \to \infty$, и при условии что

$$\theta \equiv \sqrt{\omega s}\,\sin\vartheta = O(1) \quad \text{при} \quad \omega s \to \infty. \tag{1.12}$$

Это условие допускает, очевидно, обращение ϑ в нуль и выделяет некоторую окрестность оси симметрии рассматриваемой TI среды. Как оказывается, вне этой окрестности можно использовать классические лучевые формулы, по крайней мере для SH волны.

Ниже мы приводим главный член асимптотики вектора смещения $\vec{U}(\vec{x};\omega)$ в окрестности оси симметрии x_3, определяемой условием (1.12) и описывающей kiss singularity. При этом мы будем для определенности считать, что $\beta_3 < 0$, а $\beta_2 > 0$ в формулах (1.9) и (1.10), однако, это предположение не является существенным для вывода окончательных формул.

Вектор смещения $\vec{U}(\vec{x};\omega) \equiv \vec{U}(s,\vartheta,\varphi;\omega)$ представляется в виде двух слагаемых

$$\vec{U}(s,\vartheta,\varphi;\omega) = \vec{U}^{(\mathrm{SV})}(s,\vartheta,\varphi;\omega) + \vec{U}^{(\mathrm{SH})}(s,\vartheta,\varphi;\omega), \tag{1.13}$$

из которых первое описывает вклад от SV волны, а второе – от SH волны. Главный член асимптотики SV волн имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{U}^{(\mathrm{SV})} \simeq \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\exp\left\{ i\left[T(\omega,s,\vartheta) + \frac{1}{2-\beta_2}\theta^2 \right] \right\}}{8\pi^2\sqrt{\rho c_{44}}\,-\beta_2 s} + \\ + \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i\exp\left\{ iT(\omega,s,\vartheta) \right\}}{8\pi^2\sqrt{\rho c_{44}}\,\theta^2 s} \left[\exp\left(i\frac{1}{2-\beta_2}\theta^2 \right) - 1 \right]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Главный член асимптотики SH волны описывается следующим выражением

$$\vec{U}^{(\mathrm{SH})} \simeq \begin{pmatrix} \sin^2\varphi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\exp\left\{i\left[T(\omega,s,\vartheta)-\frac{1}{2\beta_3}\theta^2\right]\right\}}{8\pi^2 c_{66}\cdot s} -$$

$$-\begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i\exp\left\{iT(\omega,s,\vartheta)\right\}}{8\pi^2\sqrt{\rho c_{44}}\,\theta^2 s}\left[\exp\left(-i\frac{1}{2\beta_3}\theta^2\right)-1\right]. \quad (1.15)$$

В этих формулах дополнительно обозначено

$$T(\omega,s,\vartheta) = \left(\omega s - \frac{1}{2}\theta^2\right)\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}. \quad (1.16)$$

Обратимся далее к анализу полученных формул.

1. Подчеркнем прежде всего, что оба слагаемых вектора в каждом из выражений (1.14) и (1.15) являются величинами одного порядка в рассматриваемой окрестности (1.12) оси симметрии. В точности на оси $\vartheta = 0$ они дают

$$\begin{aligned} \vec{U}^{(\mathrm{SV})} &\simeq \frac{\exp\left(i\omega x_3\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}\right)}{16\pi^2\sqrt{\rho c_{44}}\,-\beta_2 x_3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \\ \vec{U}^{(\mathrm{SH})} &\simeq \frac{\exp\left(i\omega x_3\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}\right)}{16\pi^2 c_{66}\,x_3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.17)$$

и тем самым оба $\vec{U}^{(\mathrm{SV})}$ и $\vec{U}^{(\mathrm{SH})}$ не имеют там сингулярностей.

2. Каждый из этих слагаемых векторов в (1.14) и (1.15), рассмотренный в отдельности, не является гладкой функцией на оси $\vartheta = 0$. Действительно, возвращаясь от сферических координат (1.11) к декартовым, получаем, например,

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

т.е. эти функции, как функции двух переменных x_1, x_2, не являются непрерывными на оси $x_1 = x_2 = 0$. Таким образом, координаты векторов поляризации не дифференцируемы при $x_1 = x_2 = 0$. Однако, в целом, как выражение (1.14) так и (1.15) является уже гладкой функцией на оси симметрии TI среды. Чтобы убедиться в этом достаточно, считая θ малым, разложить экспоненты по степеням θ^2 и учесть, что $\sin^2\vartheta = \dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Вектор смещения $\vec{U}(s,\vartheta,\varphi;\omega)$, описываемый формулами (1.13)–(1.16), таким образом, является гладкой функцией на оси симметрии за исключением, разумеется, начала координат $s=0$, (напомним, что асимптотика получена при $\omega s \to \infty$).

3. Обратим внимание, что второе слагаемое в (1.14) и (1.15), содержащее θ^2 в знаменателе, не имеет сингулярности на оси $\vartheta = 0$ за счет присутствия в этих формулах “волны” с плоским волновым фронтом, распространяющейся в положительном направлении оси x_3. Действительно, возвращаясь в равенстве (1.16) для T к декартовым координатам, получаем

$$T = \omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}\,x_3\left[1 + O\left(\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_3^4}\right)\right]$$

и, следовательно, в окрестности оси

$$\exp\Big(iT(\omega,s,\vartheta)\Big) \simeq \exp\left(i\omega\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}\,x_3\right).$$

Слагаемое, содержащее только эту экспоненту, описывает “волну” с плоским волновым фронтом, бегущую вдоль x_3. Однако, при малых θ ее нельзя рассматривать изолированно в формулах (1.14) и (1.15).

4. Предположим теперь, что $\theta \geqslant \mathrm{const} > 0$ и начинает расти. В этом случае эту “волну” можно рассматривать отдельно. Поскольку она входит в формулы (1.14) и (1.15) с разными знаками, то в суммарном поле (1.13) она исчезает, и на этом основании ее можно назвать фиктивной. Заметим, что присутствие такой изолированной волны с плоским фронтом в суммарном волновом поле противоречило бы принципу причинности. Далее, в рассматриваемом случае можно проследить, что первое слагаемое в (1.14) и (1.15) сшивается с главным членом лучевого ряда для SV и SH волн, а оставшееся второе слагаемое со вторым членом лучевого ряда. Наиболее просто это наблюдать в случае SH волн, см. для этого лучевые формулы для SH волн, приведенные в работах [7, 1].

§2. О математической технике решения задачи

Как уже отмечалось, техника решения рассматриваемой задачи основывается на классическом методе Фурье и может быть условно разделена на несколько этапов.

Вначале искомое решение строится в виде интеграла Фурье (1.2), в котором координаты вектора $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ являются рациональными дробями по переменным α_1, α_2, α_3 и имеют только простые полюса. Здесь мы предполагаем, что в рассматриваемой TI среде скорости квази P и SV волн всегда различны. Затем внутренний интеграл по α_3 вычисляется с помощью теоремы о вычетах, а возникающие двукратные интегралы удается несколько упростить, пользуясь симметрией TI среды. Затем находится асимптотика этих двойных интегралов, когда точка наблюдения находится вблизи от оси симметрии на большом расстоянии (в терминах числа длин волн) от источника, т.е. при условии (1.12). На заключительном этапе показывается, что возникающие сперва при вычислении асимптотики специальные функции выражаются в действительности через элементарные функции, что приводит к формулам (1.13)–(1.16). На некоторых этапах вычисления оказываются довольно громоздкими, и мы их опустим, а для контроля приведем лишь основные результаты.

1. Матрицу M^{-1}, обратную к основной матрице M системы (1.3), представим спектральным разложением

$$M^{-1}\vec{h} = \sum_{j=1}^{3} \frac{(\vec{\xi}_j,\vec{h})}{\lambda_j\left|\vec{\xi}_j\right|^2}\vec{\xi}_j, \tag{2.1}$$

где, как обычно, $(\vec{\xi}_j,\vec{h})$ означает скалярное произведение, а под вектором $\vec{h}$ будем понимать столбец свободных членов в (1.3). Очевидно, что слагаемое в (2.1), соответствующее SH волне, является рациональной дробью по переменным α_1, α_2, α_3. Однако, это уже не так в отношении двух других слагаемых, поскольку и собственные значения и собственные векторы содержат радикалы, см., например, [3]. Тем не менее их сумма обязана быть рациональной дробью, поскольку элементы M^{-1} есть дробно рациональные функции. Определим вектор $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ в интеграле

Фурье (1.2) равенством

$$\vec{u}(\vec{\alpha};\omega) = M^{-1}\vec{h} - \frac{(\vec{\xi}_3,\vec{h})}{\lambda_3\left|\vec{\xi}_3\right|^2}\vec{\xi}_3 = \sum_{j=1}^{2}\frac{(\vec{\xi}_j,\vec{h})}{\lambda_j\left|\vec{\xi}_j\right|^2}\vec{\xi}_j. \qquad (2.2)$$

Ясно, что при этом вектор смещения $\vec{U}(\vec{x};\omega)$ содержит как SV так и квази P волны.

Координаты вектора $\vec{u}(\vec{\alpha};\omega)$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{c_{44}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+c_{33}\alpha_3^2-\rho\omega^2}{\Lambda}\;\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2},\\ u_2 &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{c_{44}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+c_{33}\alpha_3^2-\rho\omega^2}{\Lambda}\;\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, \qquad (2.3)\\ u_3 &= \frac{-1}{(2\pi)^4}\frac{c_{13}+c_{44}}{\Lambda}\,\alpha_1\alpha_2 \end{aligned}$$

в которых Λ определяется следующим равенством

$$\Lambda = \Big[c_{11}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+c_{44}\alpha_3^2-\rho\omega^2\Big]\Big[c_{44}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+c_{33}\alpha_3^2-\rho\omega^2\Big]- \\ -\big(c_{13}+c_{44}\big)^2\alpha_3^2\big(\alpha_1^2+\alpha_2^2\big). \qquad (2.4)$$

2. Внутренний интеграл по α_3 в (1.2) вычисляем с помощью теоремы о вычетах. Мы рассматриваем волновое поле, распространяющееся вдоль положительного направления оси x_3, тогда контур интегрирования замыкается в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha_3 > 0$. Вклад в интеграл дают два простых полюса в точках α_{31}^{+} и α_{32}^{+}, которые при слегка комплексных ω находятся в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha_3 > 0$, подробнее см. [1]. Эти два полюса отвечают соответственно квази P и SV волнам. Далее мы рассматриваем только SV волну и описывающий ее вектор смещения обозначаем $\vec{U}^{(\mathrm{SV})}$. В получившихся двойных интегралах по α_1 и α_2 переходим к полярным координатам (1.7) и вместо декартовых координат x_1, x_2, x_3 вводим сферические s, ϑ, φ (1.11). После этого интегралы удается несколько упростить, исключив угловую координату φ из под знака интеграла. Продемонстрируем это на следующем примере.

Координата $U_1^{(\mathrm{SV})}$ вектора смещения $\vec{U}^{(\mathrm{SV})}$ содержит интеграл $I = \int_0^{2\pi}\cos^2\chi\exp\big[i\omega s\sin\vartheta p\cos(\varphi-\chi)\big]d\chi$. После замены переменной интегрирования $\varphi-\chi = y$, очевидных тригонометрических преобразований и интегрирования по частям получаем

$$I = \cos^2\varphi \int\limits_0^{2\pi} \exp(\mu\cos y)dy + \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\mu} \int\limits_0^{2\pi} \exp(\mu\cos y)\cdot\cos y\,dy,$$

где обозначено $\mu = i\omega s\sin\vartheta\cdot p$.

3. С точки зрения получения асимптотики при условии (1.12) все возникшие интегралы имеют схожую структуру, аналогичную интегралу I_2 из статьи [1]. Их можно описать в виде

$$\int\limits_0^\infty dp \int\limits_0^{2\pi} d\chi R(p,\chi)\exp\Big\{i\omega s\big[p\sin\vartheta\cos\chi + \cos\vartheta\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(p^2)\big]\Big\}, \qquad (2.5)$$

где медленно меняющаяся функция $R(p,\chi)$ оказывается разной для разных координат вектора смещения $\vec{U}^{(\mathrm{SV})}$, а быстро осциллирующая экспонента одна и та же. Напомним, что $\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(p^2)$ в (2.5) есть корень знаменателя $\Lambda = 0$ в равенствах (2.3), соответствующий SV волне.

При условии (1.12) только интеграл по p в (2.5) сохраняет быстро осциллирующую экспоненту, и именно он вычисляется по методу стационарной фазы. Из равенств (1.8), (1.10) вытекает, что $\dfrac{\partial}{\partial p}\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(p^2) = 0$ при $p=0$, но вторая производная по p при этом отлична от нуля. Это значит, что рассматриваемый интеграл имеет невырожденную стационарную точку $p = 0$ и существенная область интегрирования определяется условием $\sqrt{\omega s}\,p = O(1)$. Так как стационарная точка лежит на конце промежутка интегрирования, это ведет к появлению интегралов Френеля в асимптотике интеграла по p в (2.5).

Далее в соответствии с методом стационарной фазы, см., например, [8], подинтегральные функции в (2.5) должны быть разложены по степеням p. Для контроля вычислений приведем разложение для фазовой функции $\Phi(p,\chi;\vartheta) \equiv p\sin\vartheta\cos\chi + \cos\vartheta\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(p^2)$:

$$\begin{aligned}\omega s\Phi(p,\chi;\vartheta) = \omega s\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(0) - \frac{1}{2}\theta^2\overset{+}{\widehat{\alpha}}_{32}(0) + \sqrt{\omega s}\,p\theta\cos\chi +{}\\ +\omega s p^2\frac{1}{2}\beta_2 + \omega s O(p^4) + O(p^2).\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Соответственно для координат вектора $\vec{u}^{(\mathrm{SV})}(\vec{\alpha};\omega)$ получаем

$$
\begin{aligned}
u_1^{(\mathrm{SV})} &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i\pi}{\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho\, c_{44}}} + O(p^2)\right]\cos^2\chi,\\
u_2^{(\mathrm{SV})} &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i\pi}{\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho\, c_{44}}} + O(p^2)\right]\cos\chi\sin\chi,\\
u_3^{(\mathrm{SV})} &= \frac{1}{(2\pi)^4} - \frac{i\pi}{\omega}\left[\frac{c_{13}+c_{44}}{c_{33}-c_{44}}\left(\frac{c_{44}}{\rho^3}\right)^{1/2} p^2 + O(p^4)\right]\cos\chi\sin\chi.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

4. Интегралы Френеля, появляющиеся в асимптотике интегралов по p, интегрируются затем по переменной χ, см. (2.5), и ряд из них до конца вычисляется в элементарных функциях. К ним относятся те, которые не содержат множителем $\cos\chi$ перед экспонентой. Те же из них, которые содержат множитель $\cos\chi$, приводят к следующей функции от параметра θ

$$
P(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} d\chi\cos\chi\; e^{\zeta^2}\int\limits_{-\zeta}^{0} e^{-\xi^2}d\xi; \quad \zeta = ie^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\theta\cos\chi}{\sqrt{2\beta_2}},
\tag{2.8}
$$

см. также (2.16), (2.17) из работы [1].

Покажем, что $P(\theta)$ в (2.8) выражается через элементарные функции. Для этого введем в рассмотрение следующую функцию

$$
\psi(y) = \int\limits_0^{2\pi} d\chi\cos\chi\; e^{y^2\cos^2\chi}\int\limits_0^{y\cos\chi} e^{-\xi^2}d\xi.
\tag{2.9}
$$

Очевидно, что при $y = ie^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\theta}{\sqrt{2\beta_2}}$ она совпадает с $P(\theta)$ в (2.8).

Лемма. *Для функции $\psi(y)$, определенной формулой (2.9), справедливо следующее равенство*

$$
\psi(y) = \frac{\pi}{y}\left(e^{y^2}-1\right).
\tag{2.10}
$$

Доказательство. Продифференцировав (2.9) по y, получим

$$
\frac{d\psi}{dy} = \pi + 2y\int\limits_0^{2\pi} d\chi\cos^3\chi\; e^{y^2\cos^2\chi}\int\limits_0^{y\cos\chi} e^{-\xi^2}d\xi.
$$

С другой стороны, проинтегрируем по частям в (2.9), интегрируя $\cos\chi$ и дифференцируя оставшуюся функцию. Получаем последовательно:

$$\psi(y) = \pi y + 2y^2 \int_0^{2\pi} d\chi \cos\chi \sin^2\chi \exp\left(y^2\cos^2\chi\right) \int_0^{y\cos\chi} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi =$$

$$= \pi y + 2y^2 \int_0^{2\pi} d\chi \cos\chi \left(1-\cos^2\chi\right) \exp\left(y^2\cos^2\chi\right) \int_0^{y\cos\chi} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi =$$

$$= \pi y + 2y^2\psi(y) - 2y^2 \int_0^{2\pi} d\chi \cos^3\chi \exp\left(y^2\cos^2\chi\right) \int_0^{y\cos\chi} \exp\left(-\xi^2\right) d\xi.$$

Сравнивая оба выражения, получаем следующее дифференциальное уравнение для $\psi(y)$

$$y\psi'(y) + \psi(y)(1-2y^2) = 2\pi y,$$

общее решение $\psi_{\text{об}}$ которого имеет вид $\psi_{\text{об}} = \frac{\text{const}}{y} e^{y^2} - \frac{\pi}{y}$. Из (2.9) имеем $\psi_{(0)} = 0$, т.е. $\psi(y)$ есть регулярное в нуле решение этого уравнения, но единственное регулярное решение его существует при $\text{const} = \pi$. Следовательно, имеет место равенство (2.10).

Заключение

Полученные в работе формулы для волнового поля в окрестности оси симметрии трансверсально изотропной среды, описывающие так называемую kiss singularity, не содержат специальных функций и оказываются довольно простыми с аналитической точки зрения. Тем не менее, они не представляют собой лучевого разложения, по крайней мере в традиционном понимании, см. по этому поводу также [4]. Границы применимости этих формул естественно получать, см. [9], путем сравнения первого, т.е. главного члена, со вторым членом асимптотического разложения.

Результаты этой работы докладывались на международной конференции Day on Diffraction'2000, см. [10].

Автор глубоко благодарен И. Н. Щитову за многочисленные конструктивные обсуждения и И. И. Дзержинскому за оказанное содействие в доказательстве леммы.

Литература

1. М. М. Попов, *Волны* SH *в однородной трансверсально изотропной среде, возбуждаемые сосредоточенной силой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 285–298.
2. R. G. Payton, *Elastic Wave Propagation in Transversely Isotropic Media.* Martinus Nijhoff, The Hague (1983).
3. V. Červeny, I. A. Molotkov, I. Pšenčik, *Ray method in seismology.* Universita Karlova, Praha (1977).
4. V. Vavryčuk, *Properties of S waves near a kiss singularity: comparison of exact and ray solutions.* — GJI **138** (1999), 581–589.
5. D. Gridin, *Far-field asymptotics of the Green's tensor for a transversely isotropic solid.* — Proc. R. Soc. Lond. A **456** (2000), 571–591.
6. U. T. Buchwald, *Elastic waves in anisotropic media.* — Proc. R. Soc. Lond. A **253** (1959), 563–580.
7. V. Vavryčuk, K. Yomogida, SH-*wave Green tensor for homogeneous transversely isotropic media by higher-order approximations in asymptotic ray theory.* — Wave Motion **23** (1996), 83–93.
8. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука, М. (1977).
9. M. M. Popov, C. Camerlynck, *Second term of the ray series and validity of the ray theory.* — JGR **101**, No. B1 (1996), 817–826.
10. M. M. Popov, I. N. Stchitov, *On the Green tersor for a transversely isotropic homogeneous medium.* Day on Diffraction'2000, St-Petersburg **200**, Programme and Abstract, p. 69.

Popov M. M. Asymptotics of the wave field in a vicinity of the axis of symmetry of a transversely isotropic homogeneous medium.

The asymptotic formulae for the wave field which describe the kiss singularity in a homogeneous transversely isotropic medium are obtained. Physical interpretation of the results is presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 февраля 2001 г.