Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

Ш. Сахаев

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА И О ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

**Посвящается юбилею
Василия Михайловича Бабича**

§1. Об основной формуле теории поля

Уравнения теории поля

$$\operatorname{rot}\vec{u}(x) = \vec{v}(x), \quad \operatorname{div}\vec{u}(x) = f(x) \tag{1}$$

тесно связаны с проблемой обращения операторов, содержащих в качестве одного из слагаемых лапласиан. В связи с этим представляет интерес получение формулы типа Грина, определяющей вектор $\vec{u}(x)$ через $f(x)$ и $\vec{v}(x)$ и граничные значения этого вектора $\vec{u}(x)$.

Пусть $f(x)$, $\vec{v}(x) \in C^1(\Omega)$, где $\Omega \subset R^3$ – ограниченная область с гладкой границей.

Теорема 1. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы выполнялись уравнения* (1), *состоит в том, чтобы вектор поля представлялся по формуле*

$$4\pi\vec{u}(x) = \operatorname{grad}_x F(x) - \operatorname{rot}_x\vec{\Phi}(x), \tag{2}$$

где

$$F(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n},\vec{u})}{|x-y|} dS_y - \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy,$$

$$\vec{\Phi}(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{[\vec{n}\times\vec{u}]}{|x-y|} dS_y - \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{v}(y)}{|x-y|} dy\,; \tag{3}$$

здесь $|x-y|^2 = \sum\limits_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2$.

Доказательство. *Необходимость.* Так как $\vec{u}(x) \in C^1(\Omega)$, то справедливо

$$\Delta \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy = -4\pi \vec{u}(x). \tag{4}$$

Представим оператор Лапласа в векторной форме $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - -\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ и $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ – в скалярной форме. И вычислим

$$\operatorname{div}_x \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_x \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy = \int\limits_{\Omega} \left(\nabla_x \frac{1}{|x-y|} \vec{u}(y) \right) dy =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} \vec{u}(y) \right) dy = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_y \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy + \int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \vec{u}(y)}{|x-y|} dy =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n}, \vec{u}\,)}{|x-y|} dS_y + \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy,$$

т.е.

$$\operatorname{div}_x \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n}, \vec{u}\,)}{|x-y|} dS_y + \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \tag{5}$$

Аналогично

$$\operatorname{rot}_x \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|} dy = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{[\vec{n} \times \vec{u}]}{|x-y|} dS_y + \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{v}(y)}{|x-y|} dy. \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) легко получается (2), если применить операторы grad и rot , соответственно.

Достаточность. Из представления (2) определим $\operatorname{div} \vec{u}$. Имеем

$$4\pi \operatorname{div} \vec{u}(x) = \operatorname{div}\operatorname{grad} F(x) =$$

$$= \Delta \left(\int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n}, \vec{u}\,)}{|x-y|} dS_y - \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy \right) = -\Delta \int\limits_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|} dy = 4\pi f(x),$$

т.е. $\operatorname{div} \vec{u}(x) = f(x)$ – второе уравнение в (1) выполнено.

Далее

$$4\pi \operatorname{rot} \vec{u}(x) = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \vec{\Phi} = \big(-\operatorname{grad}\operatorname{div} + \Delta \big) \vec{\Phi} =$$

$$= \Delta \left(\int\limits_{\partial\Omega} \frac{[\vec{n} \times \vec{u}]}{|x-y|} dS_y - \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{v}(y)}{|x-y|} dy \right) - \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{\Phi} =$$

$$= -\Delta \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{v}(y)}{|x-y|} dy - \operatorname{grad}\theta = 4\pi \vec{v}(x) - \operatorname{grad}\theta,$$

где

$$\theta(x) = \operatorname{div}\left(\int\limits_{\partial\Omega} \frac{[\vec{n}\times\vec{u}]}{|x-y|} dS_y - \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{v}(y)}{|x-y|} dy \right) =$$

$$= \operatorname{div}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{v}}{|x-y|}\, dy - \int\limits_{\Omega} \left[\nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \vec{u} \right] dy \right) =$$

$$= \operatorname{div}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{v}}{|x-y|}\, dy - \operatorname{rot} \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{u}(y)}{|x-y|}\, dy \right) = \operatorname{div} \int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{rot}\vec{u}-\vec{v}}{|x-y|}\, dy.$$

Положив $\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}(y)$, найдем $4\pi\vec{w} = -\operatorname{grad}\theta$,

$$\theta = \operatorname{div}_x \int\limits_{\Omega} \frac{\vec{w}(y)}{|x-y|}\, dy = \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_x \frac{\vec{w}(y)}{|x-y|}\, dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\nabla_x \frac{1}{|x-y|}, \vec{w}(y) \right) dy = -\int\limits_{\Omega} \left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \vec{w}(y) \right) dy =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_x \frac{\vec{w}(y)}{|x-y|}\, dy + \int\limits_{\Omega} \frac{\operatorname{div}\vec{w}}{|x-y|}\, dy.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{w} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} - \operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\vec{v} - \operatorname{div}\vec{v} = 0$, то $\theta = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n},\vec{w})}{|x-y|} dS_y$.

Таким образом, $4\pi\vec{w}(x) = \operatorname{grad} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{(\vec{n},\vec{w})}{|x-y|} dS_y$, откуда в результате предельного перехода при $x \to \eta^0 \in \partial\Omega$ получим для $\chi = (\vec{n},\vec{w})$ однородное интегральное уравнение

$$2\pi\chi(\eta^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n(\eta^0)}\ \frac{1}{|\eta^0 - y|} \chi(y)\, dS_y.$$

Это – интегральное уравнение однородной внешней задачи Неймана, поэтому $\chi \equiv 0$, т.е. $\theta \equiv 0$ и отсюда следует, что $\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{v} = 0$.

Итак теорема 1 полностью доказана.

Полученную в результате доказанной теоремы 1 формулу (2) в дальнейшем будем называть <u>основной формулой теории поля</u>.

Замечание. Изучая структуру потенциалов $F(x)$ и $\vec{\Phi}(x)$ по формулам (3), заметим, что можно поставить две краевые задачи: первая – когда задается $\left[\vec{n}\times\vec{u}\right]\big|_{\partial\Omega}=\vec{\varphi}\big|_{\partial\Omega}$; вторая – когда задается $(\vec{n},\vec{u})\big|_{\partial\Omega}=g\big|_{\partial\Omega}$.

§2. Обобщение основной формулы теории поля

Формула (2) была построена на основе фундаментального решения уравнения Лапласа $\varepsilon(x,y)=\frac{1}{|x-y|}$. Для задач, связанных с оператором Гельмгольца $(-\Delta+k^2)$, естественно построить формулу этого типа, базируясь на фундаментальном решении $w(x,y)=\frac{\cos kr}{r}$ или $w(x,y)=\frac{e^{-kr}}{r}$, где $r=|x-y|$.

Теорема 2. *Вектор поля удовлетворяет следующему соотношению:*

$$4\pi\vec{u}(x)=k^2\int\limits_{\Omega}w(x,y)\vec{u}(y)dy+\operatorname{grad}F-\operatorname{rot}\vec{\Phi}, \tag{7}$$

где

$$F(x)=\int\limits_{\partial\Omega}w(x,y)(\vec{n},\vec{u}\,)\,dS_y-\int\limits_{\Omega}(x,y)f(y)dy,$$

$$\vec{\Phi}(x)=\int\limits_{\partial\Omega}w(x,y)\left[\vec{n}\times\vec{u}\,\right]dS_y-\int\limits_{\Omega}w(x,y)\vec{v}(y)dy. \tag{8}$$

Доказательство основано на теореме Пуассона–Бельтрами [1]:

$$\Delta\int\limits_{\Omega}w(x,y)\vec{u}(y)dy=-4\pi\vec{u}(x)+k^2\int\limits_{\Omega}w(x,y)\vec{u}(y)dy$$

и тождествах (5) и (6), где в данном случае выражение $\frac{1}{|x-y|}$ заменено на $w=\frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}$ $\left(\text{или } \frac{\cos k|x-y|}{|x-y|}\right)$.

§3. Приложение основной формулы теории поля к электродинамике

Пусть в области $\Omega\subset R^3$ происходит электромагнитный процесс, описываемый стационарной системой типа уравнений

Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}(x)+\mu_0\vec{H}=0, \qquad \operatorname{div}\vec{E}=0,$$
$$\operatorname{rot}\vec{H}(x)-\sigma_0\vec{E}(x)=0, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0, \tag{9}$$

где μ_0, σ_0 – постоянные, имеющие физические смыслы (магнитная проницаемость и проводимость среды), $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ – напряженности электических и магнитных полей, соответственно. Система (9) получается из классической системы уравнений Максвелла, если сделать преобразование Лапласа по времени.

Применим к векторам $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$ из системы (9) формулу (7), тогда имеем

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{E}(x) &= k^2\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{E}(y)dy+\operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)(\vec{n},\vec{E})dS_y- \\ &-\operatorname{rot}\Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{E}\big]\,dS_y+\mu_0\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{H}(y)dy\Bigg), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{H}(x) &= k^2\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{H}(y)dy+\operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)(\vec{n},\vec{H})dS_y- \\ &-\operatorname{rot}\Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]\,dS_y+\sigma_0\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{E}(y)dy\Bigg), \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислим

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{H}(y)dy= \\ &=-\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]\,dS_y+\int\limits_{\Omega} w(x,y)\operatorname{rot}\vec{H}(y)dy= \\ &=-\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]\,dS_y+\sigma_0\int\limits_{\Omega} w(x,y)\operatorname{rot}\vec{E}(y)dy. \end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\int\limits_{\Omega} w(x,y)\vec{E}(y)dy= \\ &=-\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]\,dS_y-\mu_0\int\limits_{\Omega} w(x,y)\operatorname{rot}\vec{H}(y)dy. \end{aligned} \tag{13}$$

Положим $k^2 = \sigma_0\mu_0$, соотношения (12) и (13) подставляем в (10) и (11), соответственно. Тогда (10) и (11) перепишутся в следующем виде

$$
\begin{aligned}
4\pi\vec{E}(x) = \operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)(\vec{n},\vec{E})dS_y - \\
-\operatorname{rot}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{E}\big]dS_y + \mu_0\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]dS_y,
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
4\pi\vec{H}(x) = \operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)(\vec{n},\vec{H})dS_y - \\
-\operatorname{rot}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{H}\big]dS_y - \sigma_0\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\big[\vec{n}\times\vec{E}\big]dS_y.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Представления (14) и (15) позволяют исследовать три краевые задачи.

Пусть $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ – единичные векторы касательных к координатным линиям граничной поверхности $\partial\Omega - S$, причем $\vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 = \vec{n}$.

В точках поверхности могут быть заданы:

$$
\begin{aligned}
&\text{первая задача: } (\vec{\tau}_j,\vec{E}) = f_j,\ j=1,2,\ (\vec{n},\vec{H}) = \varphi;\\
&\text{вторая задача: } (\vec{n},\vec{E}) = f,\ (\vec{\tau}_j,\vec{H}) = \varphi_j,\ j=1,2;\\
&\text{третья задача: } (\vec{n},\vec{E}) = f,\ (\vec{n},\vec{H}) = \varphi.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Пусть система типа Максвелла (9) выполнена для открытой области $\Omega \subset R^3$. Тогда мы должны построить интегральные уравнения, определяющие неизвестные граничные элементы:

$$
\begin{aligned}
&\text{для 1-ой задачи: } (\vec{n},\vec{E}) = \chi,\ (\vec{\tau}_j,\vec{H}) = \psi_j,\ j=1,2;\\
&\text{для 2-ой задачи: } (\vec{\tau}_j,\vec{E}) = \chi_j,\ (\vec{n},\vec{H}) = \psi,\ j=1,2;\\
&\text{для 3-ей задачи: } (\vec{\tau}_j,\vec{E}) = \chi_j,\ (\vec{\tau}_j,\vec{H}) = \psi_j,\ j=1,2.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Найдем соответствующие системы интегральных уравнений.

<u>Для 1-ой задачи.</u> Формулы (14) и (15) дают

$$
4\pi\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x) + \operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w\cdot\chi(y)dS_y + \mu_0\int\limits_{\partial\Omega} w\cdot\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix}dS_y, \tag{18}
$$

$$
4\pi\vec{H}(x) = \vec{H}_0(x) - \operatorname{rot}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix}dS_y, \tag{19}
$$

где

$$\vec{E}_0(x) = -\mathrm{rot} \int\limits_{\partial\Omega} w(x,y) \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y,$$

$$\vec{H}_0(x) = \mathrm{grad} \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \varphi(y) dS_y - \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} w(x,y) \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y.$$

Выполнив предельный переход при $x \to \eta^0 \in \partial\Omega$ в векторной форме в выражениях (18) и (19), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных χ и ψ_j, $j = 1,2$ в виде

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(\eta^0) &= \chi_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_0} \chi(y) dS_y + \mu_0 \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big) dS_y, \\ 2\pi\vec{\psi}(\eta^0) &= \vec{\psi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0} \vec{\psi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big) \,\mathrm{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y. \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\vec{\psi}(y)$ – касательный вектор в $y \in \partial\Omega$.

<u>Для 2-ой задачи.</u> На основе формул (14) и (15), имеем

$$4\pi\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x) - \mathrm{rot} \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y,$$

$$4\pi\vec{H}(x) = \vec{H}_0(x) + \mathrm{grad} \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \vec{\psi}(y) dS_y - \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y, \tag{21}$$

где

$$\vec{E}_0(x) = \mathrm{grad} \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot f(y) dS_y + \mu_0 \int\limits_{\partial\Omega} w \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y,$$

$$\vec{H}_0(x) = -\mathrm{rot} \int\limits_{\partial\Omega} w(x,y) \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2 \end{vmatrix} dS_y.$$

После предельного перехода (при $x \to \eta^0 \in S$) получим систему интегральных уравнений для определения неизвестных χ_j, $j = 1,2$ и ψ в виде

$$\begin{aligned} 2\pi\vec{\chi}(\eta^0) &= \vec{\chi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0} \psi(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big) \,\mathrm{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y, \\ 2\pi\psi(\eta^0) &= \psi_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_0} \psi(y) dS_y - \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} w\big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big) dS_y. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $\vec{\chi}(\eta^0)$ – касательный вектор в $\eta^0 \in S$.

Для 3-ей задачи. Из соотношений (14) и (15) также имеем

$$\begin{aligned}4\pi\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x) - \operatorname{rot}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix} dS_y + \\ +\mu_0\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix} dS_y,\\ 4\pi\vec{H}(x) = \vec{H}_0(x) - \operatorname{rot}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\begin{vmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix} dS_y - \\ -\sigma_0\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\begin{vmatrix}\chi_1 & \chi_2\\ \vec{\tau}_1 & \vec{\tau}_2\end{vmatrix} dS_y,\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\vec{E}_0(x) = \operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)f(y)dS_y,$$
$$\vec{H}_0(x) = \operatorname{grad}\int\limits_{\partial\Omega} w(x,y)\varphi(y)dS_y.$$

Отсюда, как и в предыдущих случаях, получим систему интегральных уравнений (в векторной форме) для определения неизвестных тангенциальных векторов $\vec{\chi}$ и $\vec{\psi}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}2\pi\vec{\chi}(\eta^0) = \vec{\chi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\chi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w\right\}dS_y + \\ +\mu_0\int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big[\vec{n}_0 \times \vec{\psi}\big]dS_y,\\ 2\pi\vec{\psi}(\eta^0) = \vec{\psi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega}\left\{\frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\psi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w\right\}dS_y - \\ -\sigma_0\int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big[\vec{n}_0 \times \vec{\chi}(y)\big]dS_y.\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь и выше $\vec{n}_0 = \vec{n}(\eta^0)$ и в системах интегральных уравнений (20), (32) и (24) χ_0, ψ_0, $\vec{\chi}_0$ и $\vec{\psi}_0$ – известные величины.

§4. Решение системы интегральных уравнений методом возмущений

Сразу отметим, что рассматриваемые краевые задачи $(-\Delta + \lambda)\vec{v}(x) = 0$, $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, $\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = 0$ имеют единственные решения, если $k^2 = k_1k_2 = \sigma_0\mu_0 \neq \lambda_n$.

В данном разделе рассмотрим интегральные уравнения для трех задач одновременно в следующей форме:

$$2\pi\chi(\eta^0) = \chi_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \Big\{ \frac{\partial w}{\partial n_0}\chi(y)dS_y + \mu_0 \int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big)\, dS_y,$$

$$2\pi\vec{\psi}(\eta^0) = \vec{\psi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\psi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y,$$

$$2\pi\vec{\chi}(\eta^0) = \vec{\chi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\chi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y, \qquad (25)$$

$$2\pi\psi(\eta^0) = \psi_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_0}\psi(y)dS_y - \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big)\, dS_y,$$

$$2\pi\vec{\chi}_0(\eta^0) = \vec{\chi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\chi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\chi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y -$$
$$-\mu_0 \int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big[\vec{n}_0 \times \vec{\psi}(y)\big]\, dS_y,$$

$$2\pi\vec{\psi}(\eta^0) = \vec{\psi}_0(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial n_0}\vec{\psi}(y) - \big(\vec{n}_0, \vec{\psi}(y)\big)\operatorname{grad}_{\eta^0} w \right\} dS_y -$$
$$-\sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\big[\vec{n}_0 \times \vec{\chi}(y)\big]\, dS_y.$$

Для решения этих векторных уравнений во всех задачах мы применим метод возмущений в разработке М. К. Гавурина [2], т.е. будем искать собственные значения и собственные функции интегральных уравнений в виде рядов по степеням k, считая их известными для невозмущенных уравнений при $k = 0$ (здесь k – параметр возмущения).

Для применимости теории Гавурина операторы, входящие в рассматриваемые интегральные уравнения, должны быть ограничены.

Определим показатели слабой особенности ядер, соответствующих интегральным операторам

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_0}\chi(y)\,dS_y, \qquad \frac{\partial w}{\partial n_0} = \frac{e^{-k|\eta^0-y|}}{|\eta^0-y|}(1+k|\eta^0-y|)\left(\vec{n}_0, \frac{\overrightarrow{\eta^0-y}}{|\eta^0-y|}\right).$$

Показатель слабой особенности равен нулю, так как

$$\lim_{y\to\eta^0}\left(\vec{n}_0, \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0, \qquad \left(\vec{n}_0 \perp \vec{\tau}_0 = \lim_{\eta^0\to y}\frac{\vec{r}}{r},\ \vec{r} = \overrightarrow{\eta^0-y}\right)$$

и для $\int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0,y)(\vec{n}_0,\vec{\psi}(y))dS_y$, где $\vec{\psi}(y) = \vec{n}\times\vec{H}$ и $\vec{\psi}(y)$ лежит на касательной плоскости, $\lim\limits_{y\to\eta^0}(\vec{n}_0,\vec{\psi}(y)) = 0$.

Аналогичным образом $\int\limits_{\partial\Omega}(\vec{n}_0\vec{\psi}(y))\,\mathrm{grad}_{\eta^0}\,w\,dS_y$ имеет показатель слабой особенности равный единице.

В книге С. Г. Михлина [3] доказана полная непрерыаность операторов со слабой особенностью $K(p,\mathcal{Q}) = \frac{A(p,\mathcal{Q})}{r^\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha < m$, где m – число измерений области интегрирования в случае конечной области. Но вполне непрерывный оператор ограничен. Операторы для невозмущенных уравнений, а также сами возмущения, соответственно, тоже ограничены.

Невозмущенные однородные интегральные уравнения для всех трех задач (в проекциях на касательные плоскости) будут иметь вид

$$2\pi\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(\eta^0) =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{r^2}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial r}{\partial n_0}\alpha_{11} - \dfrac{1}{h_1^0}\dfrac{\partial r}{\partial q_1^0}\alpha_1, & \dfrac{\partial r}{\partial n_0}\alpha_{12} - \dfrac{1}{h_1^0}\dfrac{\partial r}{\partial q_1^0}\alpha_1\\ \dfrac{\partial r}{\partial n_0}\alpha_{21} - \dfrac{1}{h_1^0}\dfrac{\partial r}{\partial q_2^0}\alpha_2, & \dfrac{\partial r}{\partial n_0}\alpha_{22} - \dfrac{1}{h_2^0}\dfrac{\partial r}{\partial q_2^0}\alpha_2\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(y)dS,$$

где $\alpha_{ij} = (\vec{\tau}_i(\eta^0),\vec{\tau}_j(\eta^0))$, $\alpha_i = (\vec{n}(\eta^0),\vec{\tau}_i(y))$, $i,\ j = 1,2$ или

$$2\pi\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(\eta^0) = -\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{r^2}\times$$

$$\left\{\begin{matrix} \left(\frac{\vec r}{r},\vec n_0\right)(\vec\tau_1^0,\vec\tau_1)-\left(\vec\tau_1^0,\frac{\vec r}{r}\right)(\vec n_0,\vec\tau_1), & \left(\frac{\vec r}{r},\vec n_0\right)(\vec\tau_1^0,\vec\tau_2)-\left(\vec\tau_1^0,\frac{\vec r}{r}\right),(\vec n_0,\vec\tau_1) \\ \left(\frac{\vec r}{r},\vec n_0\right)(\vec\tau_2^0,\vec\tau_1)-\left(\vec\tau_1^0,\frac{\vec r}{r}\right)(\vec n_0,\vec\tau_1), & \left(\frac{\vec r}{r},\vec n_0\right)(\vec\tau_2^0,\vec\tau_2)-\left(\vec\tau_2^0,\frac{\vec r}{r}\right),(\vec n_0,\vec\tau_1) \end{matrix}\right\}$$

$$\times\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}dS$$

или

$$2\pi\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(\eta^0)=$$

$$=-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{r^2}\left\{\begin{matrix}(\vec r,[\vec\tau_1,[\vec n_0,\vec\tau_1^0]\,]),(\vec r,[\vec\tau_2,[\vec n_0,\vec\tau_1^0]\,])\\(\vec r,[\vec\tau_1,[\vec n_0,\vec\tau_2^0]\,]),(\vec r,[\vec\tau_2,[\vec n_0,\vec\tau_2^0]\,])\end{matrix}\right\}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(y)dS$$

Для симметричности этого интегрального оператора необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}&(\vec r,[\vec\tau_1,[\vec n_0,\vec\tau_1^0]\,])=(\vec r^0,[\vec n,\vec\tau_1]),\\&(\vec r,[\vec\tau_2,[\vec n_0,\vec\tau_2^0]\,])=(\vec r^0,[\vec\tau_1^0,[\vec n,\vec\tau_2]\,]),\\&(\vec r,[\vec\tau_1,[\vec n_0,\vec\tau_2^0]\,])=(\vec r,[\vec\tau_2,[\vec n_0,\vec\tau_1^0]\,])=\\=&(\vec r^{\,0},[\vec\tau_1^0,[\vec n,\vec\tau_2]\,])=(\vec r^{\,0},[\vec\tau_2^0,[\vec n,\vec\tau_1]\,]),\end{aligned}$$

где $\vec r^{\,0}=-\vec r=\overrightarrow{\eta^0-y}$.

Эти условия выполняются для конкретных поверхностей, например, для сферы. Таким образом, для сферы интегральный оператор самосопряжен, а значит выполнены остальные условия применимости теории Гавурина (λ_0 – собственное число оператора A_0^*, сопряженного A_0 с нормированным собственным вектором $\vec\psi_0$ и $\vec\psi_0=\vec\varphi_0$, см. [3]).

Для сферы мы имеем интегральное уравнение, если введены сферические координаты

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(t,f)=\frac{-1}{2\sqrt2\,R^2}\int\limits_{\partial\Omega}\left[1-\sin t\sin\theta\cos(f-\varphi)-\cos t\cos\theta\right]^{-\frac32}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\cos t\cos\theta\cos(f-\varphi)+\sin t\sin\theta-\cos(f-\varphi),(\cos t-\cos\theta)\sin(f-\varphi)\\(\cos t-\cos\theta)\sin(f-\varphi),\cos(f-\varphi)-\sin t\sin\theta-\cos t\cos\theta\cos(f-\varphi)\end{matrix}\right\}$$

$$\times\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}(\theta,\varphi)\,dS.$$

Для невозмущенных интегральных уравнений собственные значения и собственные функции будем искать вариационным методом. Тогда метод возмущений будет давать необходимые поправки для нахождения собственных значений оператора интегрального уравнения задачи 3.

После решения векторных интегральных уравнений в задачах 1 и 2 скалярные уравнения примут вид

$$2\pi\chi(\eta^0) = \chi^*(\eta^0) + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_0}\chi(y)\,dS_y,$$

где

$$\chi^*(\eta^0) = \chi_1(\eta^0) + k\int\limits_{\partial\Omega} w(\eta^0, y)\vec{\psi}(y)\,dS_y.$$

Теперь перейдем к отысканию собственных значений и собственных функций невозмущенного интегрального уравнений в случае сферы

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(t,f) = \lambda \int\limits_{\partial\Omega} \begin{Bmatrix} A_1(t,f;\theta,\varphi), & A_2(t,f;\theta,\varphi) \\ A_2(t,f;\theta,\varphi), & -A_1(t,f;\theta,\varphi) \end{Bmatrix}(\theta,\varphi)\,dS, \qquad (26)$$

где

$$A_1 = \big[1 - \sin t\sin\theta\cos(f-\varphi) - \cos t\cos\theta\big]^{-\frac{3}{2}}\times$$
$$\times\big[\cos\theta\cos t\cos(f-\varphi) + \sin t\sin\theta - \cos(f-\varphi)\big],$$

$$A_2 = \big[1 - \sin t\sin\theta\cos(f-\varphi) - \cos t\cos\theta\big]^{-\frac{3}{2}}\big[\big(\cos t - \cos\theta\big)\sin(f-\varphi)\big].$$

Уравнение (26) полезно переписать в виде

$$\mu\vec{u}(t,f) = \int\limits_{\partial\Omega} \begin{Bmatrix} A_1(t,f;\theta,\varphi), & A_2(t,f;\theta,\varphi) \\ A_2(t,f;\theta,\varphi), & -A_1(t,f;\theta,\varphi) \end{Bmatrix}\vec{u}(\theta,\varphi)\,dS, \qquad (27)$$

где положено $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Теорема 3. *Если μ является собственным значением интегрального оператора (26) с собственной вектор-функцией $\vec{u}_\mu = \{\overset{1}{u}, \overset{2}{u}\}$, то $-\mu$ будет собственным значением с соответствующей вектор-функцией $\vec{u}_{-\mu} = \{-\overset{2}{u}, \overset{1}{u}\}$. При этом квадратичная форма, соответствующая интегральному оператору (26) (для A_0, $(A\vec{u}, \vec{u})$) будет* *ограничена сверху и снизу одним и тем же по абсолютной величине числом.*

Пусть μ – собственное значение с соответствующей собственной вектор-функцией $\vec{u}_\mu = \{\overset{1}{u}, \overset{2}{u}\}$, т.е.

$$\mu\overset{1}{u} = \int\limits_{\partial\Omega} \left[A_1(t,f;\theta,\varphi]\overset{1}{u} + A_2(t,f;\theta,\varphi)\overset{2}{u}\right] dS,$$

$$\mu\overset{2}{u} = \int\limits_{\partial\Omega} \left[A_2(t,f;\theta,\varphi]\overset{1}{u} - A_1(t,f;\theta,\varphi)\overset{2}{u}(\theta,\varphi)\right] dS.$$

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$-\mu\overset{1}{u}(t,f) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[A_1(t,f;\theta,\varphi]\overset{1}{u}(\theta,\varphi) + A_2(t,f;\theta,\varphi)\overset{2}{u}(\theta,\varphi)\right] dS,$$

$$-\mu\overset{2}{u}(t,f) = \int\limits_{\partial\Omega} \left[A_2(t,f;\theta,\varphi]\overset{1}{u}(\theta,\varphi) - A_1(t,f;\theta,\varphi)\overset{2}{u}(\theta,\varphi)\right] dS.$$

Эта система сводится к предыдущей, если положить $\overset{1}{u} = -\overset{2}{u}$, $\overset{2}{u} = \overset{1}{u}$. Отсюда следует, что $-\mu$ тоже является собственным числом интегрального оператора A_0 с собственной вектор-функцией

$$\vec{u}_{-\mu} = \{\overset{1}{u}, \overset{2}{u}\} = \{-\overset{2}{u}, \overset{1}{u}\},$$

что и требовалось доказать.

Для вполне непрерывного симметричного оператора имеет место теорема Гильберта (см. [4, с. 257]).

n-е положительное собственное значение μ_n^+ равно наибольшему значению квадратичной формы (Af,f), причем f подчиняется условиям $\|f\| = 1$, $(f,\varphi_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Это наибольшее значение достигается на собственном элементе φ_n^+, соответствующем собственному значению μ_n^+. Аналогично, n-е отрицательное собственное значение μ_n^- равно наименьшему значению (Af,f) при условиях $\|f\| = 1$, $(f,\varphi_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$. Это наименьшее значение достигается на φ_n^-.

Из этой теоремы и предыдущих рассуждений сразу же следует требуемое неравенство

$$-m(\vec{u},\vec{u}) \leqslant (A_0\vec{u},\vec{u}) \leqslant +m(\vec{u},\vec{u}).$$

Очевидно, что величины $-m$ и $+m$, входящие в это неравенство являются соответственно наименьшими и наибольшими собственными значениями рассматриваемого оператора A_0.

Из упомянутой теоремы Гильберта следует, что отыскание собственных чисел и собственных функций оператора A_0 сводится к вариационной задаче для функционала $(A_0\vec{u}, \vec{u})$ при дополнительном условии $(\vec{u}, \vec{u}) = 1$.

Выберем систему координатных функций $\{\varphi^{k\rho}\}$ линейно независимую и полную. Будем искать решение рассматриваемой вариационной задачи в виде

$$\vec{u}^{(n)} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_{k\rho}\varphi^{k\rho}, \sum_{k=1}^{n} b_{k\rho}\varphi^{k\rho} \right\}.$$

Таким образом, нужно найти минимум от (по $a_{k\rho}$, $b_{k\rho}$, $k\rho = 1, 2, \ldots, n$)

$$\begin{aligned}\big(A\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}\big) = \sum_{1}^{n} a_{k\rho}a_{lq} \int\limits_{\partial\Omega} A_1(t, f; \theta, \varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}\, dS + \\ + \sum_{1}^{n} b_{k\rho}a_{lq} \int\limits_{\partial\Omega} A_2(t, f; \theta, \varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}\, dS + \\ + \sum_{1}^{n} a_{k\rho}b_{lq} \int\limits_{\partial\Omega} A_2(t, f; \theta, \varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}\, dS - \\ - \sum_{1}^{n} b_{k\rho}b_{lq} \int\limits_{\partial\Omega} A_1(t, f; \theta, \varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}\, dS\end{aligned}$$

при условии $(\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}) = 1$, т.е.

$$\sum_{1}^{n} \big(a_{k\rho}a_{lq} + b_{k\rho}b_{lq}\big) \int\limits_{\partial\Omega} \varphi^{k\rho}\varphi^{lq}\, dS = 1.$$

Составим функцию Лагранжа $\big(A\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}\big) = \mu\big(\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)}\big)$ и приравняем нулю ее частные производные по $a_{k\rho}$, $b_{k\rho}$. Получим однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_1^n a_{lq}\left[\int\limits_{\partial\Omega} A_1(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS - \mu\int\limits_{\partial\Omega}\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS\right]+ \\ \displaystyle +\sum_1^n b_{lq}\int\limits_{\partial\Omega} A_2(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS = 0, \\ \displaystyle\sum_1^n a_{lq}\int\limits_{\partial\Omega} A_2(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS- \\ \displaystyle -\sum_1^n b_{lq}\left[\int\limits_{\partial\Omega} A_1(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS + \mu\int\limits_{\partial\Omega}\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS\right] = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Чтобы эта система алгебраических уравнений имела ненулевое решение необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это вековое уравнение степени $2n^2$ относительно μ. Его корни и являются искомыми приближенными собственными значениями. Находя μ_i и подставляя их в систему (28) определяем $a_{k\rho}^{(i)}$ и $b_{k\rho}^{(i)}$, а вместе с ними и соответствующие $\vec{u}_i^{(n)}$ при условии нормировки $\left(\vec{u}_i^{(n)}, \vec{u}_i^{(n)}\right) = 1$.

Из системы (28) опять можно увидеть, что если μ собственное число с собственной вектор-функцией

$$\vec{u}_{\mu}^{(n)} = \left\{\sum_1^n a_{k\rho}\varphi^{k\rho}, \sum_1^n b_{k\rho}\varphi^{k\rho}\right\},$$

то $-\mu$ тоже будет собственным значением с соответствующей собственной вектор-функцией

$$\vec{u}_{-\mu}^{(n)} = \left\{-\sum_1^n b_{k\rho}\varphi^{k\rho}, \sum_1^n a_{k\rho}\varphi^{k\rho}\right\}.$$

Действительно, заменив в системе (28) μ на $-\mu$, получим систему

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} a'_{lq}\Big[\int\limits_{\partial\Omega} A_1(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS+\mu\int\limits_{\partial\Omega}\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS\Big]+ \\ +\sum_{1}^{n} b'_{lq}\int\limits_{\partial\Omega} A_2(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS=0, \\ \sum_{1}^{n} a'_{lq}\int\limits_{\partial\Omega} A_2(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS- \\ -\sum_{1}^{n} b'_{lq}\Big[\int\limits_{\partial\Omega} A_1(t,f;\theta,\varphi)\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS-\mu\int\limits_{\partial\Omega}\varphi^{k\rho}\varphi^{lq}dS\Big]=0. \end{cases} \tag{29}$$

Если система (28) имеет решение a_{lq} и b_{lq} $(l,q=1,2,\dots,n)$, то система (29) имеет решение

$$a'_{lq}=-b_{lq},\quad b'_{lq}=a_{lq},\quad l,\,q=1,2,\dots,n, \tag{30}$$

т.к. сделав в (29) замену (30) мы вновь приходим к системе (28), что и требовалось показать.

Передем теперь к сходимости метода. Наш оператор неположительно определенный $-mI\leqslant A_0\leqslant mI$. Его можно сделать положительно определенным, добавив к нему матрицу с постоянными коэффициентами вида

$$C=\begin{Bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{Bmatrix}.$$

Система (28) от этого не изменит своего вида (добавляются и вычитаются одни и те же постоянные величины). А для положительно определенного оператора С. Г. Михлиным (см. [5]) доказана сходимость метода Ритца в проблеме собственных чисел. При этом существенно предположение, что система координатных функций $\{\varphi^{k\rho}\}$ полна по энергии соответствующего оператора $A=A_0+C$, т.е. для любой вектор-функции $\vec{u}\,'$ можно найти функцию $\vec{u}'_N$ вида $\{\sum\limits_1^N\alpha_{k\rho}\varphi^{k\rho},\sum\limits_1^N\beta_{k\rho}\varphi^{k\rho}\}$ так, что $\|\vec{u}\,'-u'_N\|<\varepsilon$, $\forall\,\varepsilon>0$.

Для оценок ошибки воспользуемся результатами И. В. Свирского [6]. Он получил значения собственных чисел с недостатком и проводил оценку по этой методике (методы Ритца и Бубнова–Галеркина дают собственные числа с избытком). Для нашего случая отрицательные собственные числа получаются с избытком, а положительные собственные числа – с недостатком. Поэтому мы будем применять метод Свирского для оценок погрешности отрицательных собственных чисел, но эти оценки в силу совершенной симметрии отрицательной и положительной частей собственных значений A_0 будут пригодны и для положительных собственных значений. В указанной работе Свирского получена оценка q-го собственного числа, полученного вариационным методом (здесь $\vec{u}_i$, λ_{ir}, $i = 1, 2, \ldots, n$), приближенные значения которого

$$0 \leqslant x_q \leqslant \frac{(A_0\vec{u}_q, A_0\vec{u}_q) - (A_0\vec{u}, \vec{u}_q)^2}{\Lambda},$$

$$\text{где}\quad \Lambda = \lambda_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} 2\big[\big(A_0\vec{u}_i, A_0\vec{u}_i\big) - \big(A_0\vec{u}_i, \vec{u}_i\big)^2\big]^{1/2} -$$

$$-\lambda_{qr}\big[\big(A_0\vec{u}_q, A_0\vec{u}_q\big) - \big(A_0\vec{u}_q - \vec{u}_q\big)^2\big]^{1/2}. \tag{31}$$

При использовании формулы (31) вместо величины λ_{m+1} нужно поставить ее приближенные значения с недостатком (полученные методом сравнений). Кроме того, эта формула справедлива лишь при положительности ее знаменателя. В противном случае нужно обратится к квадратному уравнению для x_q (см. [5]), предварительно выразив его коэффициенты так, чтобы в них входил оператор A_0

$$x_q^2 + x_q\Bigg[\lambda_{m+1} - 2\sum_{i=1}^{m}\big[\big(A_0\vec{u}_i, A_0\vec{u}_i\big) - \big(A_0\vec{u}_i, \vec{u}_i\big)^2\big]^{1/2} -$$

$$-\lambda_q + \big[\big(A_0\vec{u}_q, A_0\vec{u}_q\big) - \big(A_0\vec{u}_q, \vec{u}_q\big)^2\big]^{1/2} -$$

$$-\big[\big(A_0\vec{u}_q, A_0\vec{u}_q\big) - \big(A_0\vec{u}_q, \vec{u}_q\big)^2\big]^{1/2}\Bigg] = 0.$$

Оценки погрешностей в среднем для собственных функций в статье Свирского нет.

Поэтому в качестве координатных функций удобнее использовать сферические функции, т.е. мы будем искать решение в виде

$$\vec{u}_N = \Big\{ \sum_{n=0}^{N} a_0^n P_n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \big(a_m^n \cos m\varphi + b_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta),$$
$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n P_n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \big(\alpha_m^n \cos m\varphi + \beta_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta) \Big\}.$$

Подставим это выражение в функционал $(A\vec{u}^N, \vec{u}^N) - \mu(\vec{u}^N, \vec{u}^N)$ и воспользуемся симметричностью операторов A_1 и A_2 и тем что $(A_2 \overset{2}{u}, \overset{1}{u}) + (A_2 \overset{1}{u}, \overset{2}{u}) = 2(A_2 \overset{1}{u}, \overset{2}{u})$. Далее, продифференировав полученное выражение по a_0^n, a_m^n, b_m^n, α_0^ν, α_μ^ν, β_μ^ν и приравняв производные к нулю, мы придем к системе уравнений, из которой определяются коэффициенты a_0^n, a_m^n, b_m^n, α_0^ν, α_μ^ν, β_μ^ν:

$$\sum_{n=0}^{N} a_0^n \big[\big(A_1 P_n, P_n\big) - \mu\big(A_n, A_n\big)\big] + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} a_m^n \big(A_1 P_{mn}(\cos m\varphi), P_\nu\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} b_m^n \big(A_1 P_{mn}(\sin m\varphi), P_\nu\big) + \sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n \big[\big(A_2 P_n, P_\nu\big) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^n \big(A_2 P_{mn}(\cos m\varphi), P_\nu\big) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \beta_m^n \big(A_2 P_{mn}(\sin m\varphi), P_\nu\big) = 0.$$
$$\nu = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{32}$$

Первая группа уравнений системы содержит уравнение с $2N(N+2)+2$ неизвестными:

$$\sum_{n=0}^{N} a_0^n \big(A_1 P_n, P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} a_m^n \big[\big(A_1 P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) -$$
$$\mu\big(P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f\big)\big] + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} b_m^n \big(A_1 P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big)$$
$$+ \sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n \big(A_2 P_n, P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^n \big(A_2 P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\beta_m^n\big(A_2P_{mn}(\sin m\varphi),P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big)=0,$$

$$\mu=1,2,\ldots,\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,N. \tag{33}$$

Вторая группа уравнений содержит $\frac{1}{2}[N(N+1)]$ уравнений с $2N(2N+2)+2$ неизвестными. Число уравнений в последующих группах и число неизвестных в них повторяют значения этих чисел для первых двух групп:

$$\sum_{n=0}^{N}a_0^n\big(A_1P_n,P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}a_m^n\big(A_1P_{mn}\big(\cos m\varphi,P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}b_m^n\big[\big(A_1P_{mn}(\sin m\varphi),P_{\nu\mu}(\sin\mu\varphi)\big)-$$

$$-\mu\big(P_{mn}(\sin m\varphi),P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)\big]+\sum_{n=0}^{N}\alpha_0^n\big(A_2P_n,P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^n\big[\big(A_2P_{mn}(\cos m\varphi),P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)+ \tag{34}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\beta_m^n\big(A_1P_{mn}(\sin m\varphi),P_{\nu\mu}(\sin\mu\varphi)\big)=0,$$

$$\mu=1,2,\ldots,\nu,\quad \nu=1,2,\ldots,N;$$

$$\sum_{n=0}^{N}a_0^n(A_2P_n,P_\nu)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}a_m^n\big(A_2P_{mn}(\cos m\varphi),P_\nu\big)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}b_m^n\big(A_2P_{mn}(\sin m\varphi),P_\nu\big)-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\beta_m^n\big(A_1P_{mn}(\sin m\varphi),P_\nu\big)-$$

$$-\sum_{n=0}^{N}\alpha_0^n\big[(A_1P_n,P_\nu)+\mu(P_n,P_\nu)\big]-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}\alpha_m^n\big(A_1P_{mn}(\cos fm),P_\nu\big)=0,$$

$$\nu=1,2,\ldots,N; \tag{35}$$

$$\sum_{n=0}^{N}a_0^n\big(A_2P_n,P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n}a_m^n\big(A_2P_{mn}(\cos m\varphi),P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big)+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} b_m^n \big(A_2 P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) -$$

$$-\sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n \big(A_1 P_n, P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^n \big[\big(A_1 P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) +$$

$$+\mu\big(P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big)\big] - \tag{36}$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \beta_m^n \big(A_1 P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\cos\mu f)\big) = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, N, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \nu;$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_0^n \big(A_2 P_n, P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} a_m^n \big(A_2 P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} b_m^n \big(A_2 P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) - \sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n \big(A_1 P_n, P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^n \big(A_1 P_{mn}(\cos m\varphi), P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) - \tag{37}$$

$$-\sum_{m=1}^{N} \beta_m^n \big[\big(A_1 P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big) +$$

$$+\mu\big(P_{mn}(\sin m\varphi), P_{\nu\mu}(\sin\mu f)\big)\big] = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

Из системы уравнений (32)–(37) видно, что если μ является собственным числом с собственной вектор-функцией

$$\vec{u}_\mu = \Big\{ \sum_{n=0}^{N} a_0 P_n + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \big(a_m^n \cos m\varphi + b_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta),$$
$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n P_n + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n} \big(\alpha_m^n \cos m\varphi + \beta_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta) \Big\},$$

то $-\mu$ также будет собственным числом с соответствующей собственной вектор-функцией

$$\vec{u}_{-\mu} = \Big\{ -\sum_{n=0}^{N} \alpha_0^n P_n - \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \big(\alpha_m^n \cos m\varphi + \beta_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta),$$
$$\sum_{n=0}^{N} a_0 P_n + \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{n} \big(a_m^n \cos m\varphi + b_m^n \sin m\varphi\big) P_{mn}(\cos\theta) \Big\}.$$

Приравняв нулю определитель этой системы уравнений, получим вековое уравнение, из которого найдутся собственные числа. Очевидно, что мы будем получать равные по модулю, но противоположные по знаку значения.

Система уравнений (32)–(37) является системой $[2N(N+2)+2]$ уравнений с $[2N(N+2)+2]$ неизвестными. Ее определитель имеет порядок $[2N(N+2)+2]$, т.е. вековое уравнение будет иметь ту же степень. Таким образом вышеизложенная теория справедлива.

Литература

1. А. Вебстер, Г. Сеге, *Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики.* Ч. 2, ОНТИ, ГТТИ (1934).
2. М. К. Гавурин, *Лекции по методам возмущений.* М. (1971).
3. С. Г. Михлин, *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М. (1959).
4. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу.* М. (1954).
5. С. Г. Михлин, *Численная реализация вариационных методов.* М. (1966).
6. И. В. Свирский, *О точности приближенных методов определения частот колебаний.* — Изв. Казанского филиала АН СССР, Сер. Физ.-мат. No. 3 (1953), 59–86.

Sakhaev Sh. On one analog of Green's formula and its applications in electrodynamics.

The new formula similar to Green's formula connected with the Helmholtz operator is obtained. This formula makes it possible to set up three boundary-value problems. They are reduced to the systems of integral equations of the second kind of the Fredholm type, which are solved by the perturbation method.

Казахский
государственный
национальный
университет им. аль-Фараби

Поступило 10 ноября 2000 г.