Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

А. В. Соколов

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКА, СОВЕРШАЮЩЕГО В ЖИДКОМ СЛОЕ ДВИЖЕНИЕ РАВНОЕ СУММЕ ДОЗВУКОВОГО РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЙ. ТОЧНЫЕ (ЯВНЫЕ) РЕШЕНИЯ

Задача о звуковом поле, порождаемом точечным источником звука, движущимся в слое жидкости, рассмотрена в целом ряде работ, например, в [1–9]. Решение этой задачи в указанных работах построено (разными способами и при разных исходных предположениях) в виде суммы нестационарных квазинормальных волн и (в некоторых случаях) боковой волны. При этом выражения, полученные в [1–9] для нестационарных квазинормальных волн, представляют собой либо первые члены асимптотических разложений либо интегралы.

В настоящей статье рассматривается звуковое поле, порождаемое в жидком слое движущимся точечным источником, включившимся в бесконечно удаленный в прошлое момент времени. Слой жидкости предполагается плоским и однородным. На границах слоя звуковое поле (под которым понимается звуковое давление или потенциал скорости) удовлетворяет смешанному краевому условию. В частности, если рассматривается звуковое поле в океаническом водном слое с абсолютно мягкой поверхностью и абсолютно жестким дном, на одной из границ слоя (поверхности океана) поле равно нулю, а на другой границе (дне) нормальная производная поля равна нулю.

Источник звука, рассматриваемый в статье, совершает внутри слоя движение равное сумме дозвукового равномерного прямолинейного (параллельно границам слоя) и периодического движений. Функция, описывающая зависимость источника от времени t, имеет вид $e^{(\varkappa-i\omega_0)t}A(t)$, где $\varkappa \geqslant 0$, $\omega_0 \geqslant 0$ и $A(t)$ – комплекснозначная периодическая функция. Отрицательные значения $\varkappa$ исключены для того, чтобы не допустить неограниченного роста амплитуды источника при удалении в прошлое, что необходимо для осмысленности звукового поля в настоящем. Периоды $A(t)$ и периодической составляющей движения источника предполагаются одинаковыми.[1]

Свойства слоя и источника в настоящей статье подобраны таким образом, что в некоторой движущейся системе координат можно разделить переменные. При этом, отделяя последовательно одну переменную за другой, решение рассматриваемой задачи можно получить в виде тройного ряда, члены которого будем называть нормальными волнами. Следует отметить, что такое использование понятия "нормальная волна" является не совсем обычным, поскольку как правило это понятие используется по отношению к членам ряда, возникающего при отделении только поперечной (по отношению к слою) переменной. Выражения, формально построенные в статье для нормальных волн, являются не только точными (не асимптотическими), но и вне некоторой окрестности источника явными в том смысле, что представляют собой произведения элементарных и известных специальных функций координат и времени.

В начале статьи приводится математическая постановка задачи о звуковом поле источника, включающегося в момент времени $t = t_0$. Затем строится решение поставленной задачи и вычисляется его предел при $t_0 \to -\infty$. Далее этот предел разлагается в сумму нормальных волн и рассматриваются основные свойства построенных волн. В заключение выписываются выражения для полученных нормальных волн в некоторых простых частных случаях.

§1. Постановка задачи

В математическом отношении задача о звуковом поле источника, включающегося в момент времени $t = t_0$, состоит в том, чтобы в любой точке $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$ найти решение волнового уравнения

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\vec{r}, t, t_0) = \chi(t - t_0) e^{(\varkappa - i\omega_0)t} A(t) \delta(\vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0(t)), \quad (1.1)$$

в котором $\varkappa \geqslant 0$, $\omega_0 \geqslant 0$; $\vec{v} = (v, 0, 0)$, $0 \leqslant v < c$; функция $A(t)$ является комплекснозначной, кусочно непрерывной, огра-

[1] Это ограничение не является существенным. Оно лишь упрощает рассмотрение и окончательные выражения.

ниченной и периодической с периодом $T_0 > 0$; вектор-функция $\vec{r}_0(t) \equiv (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ принимает значения в слое $0 < z < h$ и является кусочно непрерывной, ограниченной и периодической с тем же периодом T_0; $\chi(\tau) = 1$, если $\tau \geqslant 0$ и $\chi(\tau) = 0$, если $\tau < 0$. При этом искомое решение $u(\vec{r}, t, t_0)$ должно удовлетворять начальному условию

$$u(\vec{r}, t, t_0)\big|_{t<t_0} = 0 \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$\left(\alpha_0 u + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} = 0, \qquad \left(\alpha_h u + \beta_h \frac{\partial u}{\partial z}\right)\bigg|_{z=h} = 0, \tag{1.3}$$

где α_0, β_0, α_h, β_h – вещественные постоянные такие, что $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$ и $\alpha_h^2 + \beta_h^2 \neq 0$.

При решении поставленной задачи и в последующем изложении будем предполагать, что наименьшее собственное число задачи Штурма–Лиувилля

$$-Z''(z) = \lambda Z(z), \quad \alpha_0 Z(0) + \beta_0 Z'(0) = 0, \quad \alpha_h Z(h) + \beta_h Z'(h) = 0 \tag{1.4}$$

удовлетворяет неравенству[2] $\lambda_0 \geqslant -\varkappa^2/(c^2 - v^2)$.

§2. Вывод выражения для звукового поля

Решение $u(\vec{r}, t, t_0)$ будем искать в виде разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе собственных функций $Z_j(z)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ задачи Штурма–Лиувилля (1.4):

$$u(\vec{r}, t, t_0) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, y, t, t_0) Z_j(z). \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.1), умножив обе части получившегося равенства на $Z_l(z)$, и, проинтегрировав их по z от 0 до h, получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda_l - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) w_l(x, y, t, t_0) =$$

[2] Данное неравенство заведомо выполнено, если рассматривается звуковое поле в океаническом водном слое с абсолютно мягкой поверхностью и абсолютно жестким дном, поскольку в этом случае $\alpha_0 = 0$, $\beta_h = 0$ и все собственные числа задачи (1.4), имеющие вид $\lambda_l = \pi^2(l+1/2)^2/h^2$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, положительны.

$$\chi(t-t_0)e^{(\varkappa-i\omega_0)t}A(t)Z_l(z_0(t))\delta(x-vt-x_0(t))\delta(y-y_0(t)), \qquad (2.2)$$

в котором λ_l – соответствующее собственное число задачи (1.4). Кроме того, в соответствии с (1.2), функция $w_l(x,y,t,t_0)$, равная (как коэффициент (2.1)) интегралу $\int_0^h u(\vec{r},t,t_0)Z_l(z)\,dz$, должна удовлетворять начальному условию

$$w_l(x,y,t,t_0)\big|_{t<t_0} = 0. \qquad (2.3)$$

Перейдем от переменных (x,y,t) к переменным $(\vec{\rho},t) \equiv (\xi,y,t)$, где $\xi = (x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$. В новых переменных уравнение (2.2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial t}-\lambda_l-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)w_l =$$

$$\chi(t-t_0)A_l(t)e^{(\varkappa-i\omega_0)t}\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(t)),$$

где $A_l(t) = A(t)Z_l(z_0(t))/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $\xi_0(t) = x_0(t)/\sqrt{1-v^2/c^2}$ и $\vec{\rho}_0(t) = (\xi_0(t), y_0(t))$. Нетрудно проверить, что преобразование Фурье по времени $\widehat{w}_l(\xi,y;\omega,t_0)$ функции

$$e^{-\varkappa t}w_l(vt+\xi\sqrt{1-v^2/c^2},y,t,t_0),$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2v(\varkappa-i\omega)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\partial}{\partial\xi}-\lambda_l-\frac{(\varkappa-i\omega)^2}{c^2}\right)\widehat{w}_l(\vec{\rho};\omega,t_0) =$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} A_l(\tau)e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau))\,d\tau.$$

Следовательно, функция

$$\tilde{w}_l(\vec{\rho};\omega,t_0) = \exp\left(\frac{v(\varkappa-i\omega)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi\right)\widehat{w}_l(\vec{\rho};\omega,t_0)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\mu_l^2(\omega)\right)\tilde{w}_l(\vec{\rho};\omega,t_0) =$$

$$\exp\left(\frac{v(\varkappa - i\omega)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi\right)\int\limits_{t_0}^{+\infty} A_l(\tau)e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau))\,d\tau,$$

в котором $\mu_l^2(\omega) = -\lambda_l + (\omega + i\varkappa)^2/(c^2 - v^2)$. Решив это уравнение методом функции Грина, и, восстановив по полученному решению w_l, приходим к выражению[3]

$$w_l = -\frac{ie^{\varkappa t}}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{t_0}^{+\infty} d\tau\, e^{i(\omega-\omega_0)\tau - i\omega t + \frac{v(\varkappa - i\omega)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}(\xi_0(\tau)-\xi)}\times$$

$$A_l(\tau)H_0^{(1)}(\mu_l(\omega)\,|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau)|), \tag{2.4}$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля и ветвь функции $\mu_l(\omega) \equiv \sqrt{\frac{(\omega+i\varkappa)^2}{(c^2-v^2)} - \lambda_l}$ определена условием $\mu_l(\omega) = \frac{\omega + i\varkappa}{\sqrt{c^2-v^2}} + O(\frac{1}{\omega})$, $\omega \to +\infty$ в комплексной плоскости переменной ω с разрезами, идущими из точек $-i\varkappa \pm \sqrt{\lambda_l}\sqrt{c^2-v^2}$ вниз.

В том, что правая часть (2.4) удовлетворяет условию (2.3), можно убедиться, поменяв порядок интегрирования в (2.4), и, показав с помощью леммы Жордана, что интеграл по ω при любых $t < t_0$ и $\tau \geqslant t_0$ равен нулю. При этом возможность использования леммы Жордана обеспечена тем, что: 1) подынтегральное выражение (2.4) как функция ω при выбранной ветви функции $\mu_l(\omega)$ и неравенствах[4] $\varkappa \geqslant 0$, $\lambda_l \geqslant \lambda_0 \geqslant -\varkappa^2/(c^2-v^2)$, голоморфно в верхней полуплоскости и непрерывно вплоть до границы (возможно лишь за исключением точек $-i\varkappa \pm \sqrt{\lambda_l}\sqrt{c^2-v^2}$); 2) при $\omega \to \infty$, $0 \leqslant \arg\omega \leqslant \pi$, в следствие асимптотики

$$H_0^{(1)}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}e^{i(w-\pi/4)}\left(1 + O\left(\frac{1}{w}\right)\right), \quad w \to \infty,\ -\pi < \arg w < 2\pi$$

---

[3] Интегралы, стоящие в правой части (2.4), так же, как и интегралы, приводимые ниже в (2.5), в обычном смысле, вообще говоря, не существуют. Смысл этим интегралам можно придать либо, вычисляя их в обратном порядке, либо, рассматривая их как преобразование Фурье обобщенной функции. Второй их этих способов использован при преобразовании (2.5) в §3.

[4] Эти неравенства обеспечивают то, что точки ветвления $-i\varkappa \pm \sqrt{\lambda_l}\times\sqrt{c^2-v^2}$ функции $\mu_l(\omega)$ лежат не выше вещественной оси.

(см. [10], стр. 98, выр. (1)), подынтегральное выражение (2.4) ведет себя как

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{i\omega\left(\tau - t + \frac{(|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau)| + (\xi-\xi_0(\tau))v/c)}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)\right\},$$

где

$$\tau - t + \frac{(|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau)| + (\xi-\xi_0(\tau))v/c)}{\sqrt{c^2-v^2}} \geqslant \tau - t > 0.$$

Таким образом, правая часть (2.4) удовлетворяет условию (2.3) и дает искомую функцию $w_l(x,y,t,t_0)$. Тем самым, построение искомого решения $u(\vec{r},t,t_0)$ завершено.

Предел звукового поля $u(\vec{r},t,t_0)$ при $t_0 \to -\infty$ (обозначим его $u(\vec{r},t)$), в соответствии с (2.1) и (2.4), имеет вид

$$u(\vec{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty} -\frac{ie^{\varkappa t}}{8\pi} Z_l(z) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i(\omega-\omega_0)\tau - i\omega t} \times$$

$$\exp\left(\frac{v(\varkappa - i\omega)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}(\xi_0(\tau)-\xi)\right) A_l(\tau) H_0^{(1)}(\mu_l(\omega)\,|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau)|). \quad (2.5)$$

Вычислив значение волнового оператора на $u(\vec{r},t)$, получаем выражение

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\vec{r},t) = e^{(\varkappa - i\omega_0)t} A(t)\delta(\vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0(t)). \quad (2.6)$$

Таким образом, $u(\vec{r},t)$, являясь решением (2.6), удовлетворяя граничным условиям (1.3) (поскольку каждое слагаемое (2.5) удовлетворяет (1.3)), и, будучи пределом $u(\vec{r},t,t_0)$ при $t_0 \to -\infty$, имеет смысл звукового поля, порождаемого источником, описываемым правой частью (2.6), т.е. источником, включившимся при $t = -\infty$.

§3. Вывод выражений для нормальных волн и основные свойства построенных выражений

3.1. Вывод выражений для нормальных волн. Воспользовавшись периодичностью функций $\xi_0(\tau)$, $\vec{\rho}_0(\tau)$ и $A_l(\tau)$, разложим подынтегральное выражение (2.5), исключая множитель $\exp(i(\omega - \omega_0)\tau - i\omega t)$, в ряд Фурье по функциям $e^{-im\Omega_0\tau}$, где $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ и

$m \in \mathbb{Z}$. Подставив этот ряд в (2.5), и, вычислив интегралы по τ и ω, получаем выражение

$$u(\vec{r},t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}-\frac{i}{4T_0}e^{(\varkappa-i\omega_m)t-\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi}Z_l(z)\times$$

$$\int_0^{T_0}e^{\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\sigma)+im\Omega_0\sigma}A_l(\sigma)H_0^{(1)}(\mu_{lm}\,|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\sigma)|)\,d\sigma, \qquad (3.1)$$

в котором $\omega_m=\omega_0+m\Omega_0$ и $\mu_{lm}=\mu_l(\omega_m)$.

Для преобразования (3.1) воспользуемся теоремой сложения Графа для функции Ханкеля (см. [10], стр. 117, выр. (34)):

$$H_0^{(1)}(\mu_{lm}\,|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0(\tau)|)=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho_>(\tau))J_n(\mu_{lm}\rho_<(\tau))e^{in(\theta-\theta_0(\tau))}, \qquad (3.1')$$

где θ, $\theta_0(\tau)$ – полярные углы в плоскости переменных ξ, y точек $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0(\tau)$ соответственно;

$$\rho=|\vec{\rho}|, \qquad \rho_0(\tau)=|\vec{\rho}_0(\tau)|;$$
$$\rho_>(\tau)=\max\{\rho,\rho_0(\tau)\}, \qquad \rho_<(\tau)=\min\{\rho,\rho_0(\tau)\}.$$

Подставив (3.1′) в (3.1), получаем искомое представление $u(\vec{r},t)$ в виде тройного ряда:

$$u(\vec{r},t)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}u_{lmn}(\vec{r},t),$$

члены которого

$$u_{lmn}(\vec{r},t)=-\frac{i}{4T_0}e^{(\varkappa-i\omega_m)t-\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi+in\theta}Z_l(z)\int_0^{T_0}e^{\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\sigma)}\times$$

$$e^{-in\theta_0(\sigma)+im\Omega_0\sigma}A_l(\sigma)H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho_>(\sigma))J_n(\mu_{lm}\rho_<(\sigma))\,d\sigma \qquad (3.2)$$

как уже выше было сказано будем называть нормальными волнами. При этом выражения, полученные для нормальных волн, являются в областях $\rho \geqslant \rho_+ = \max\limits_{[0,T_0]} \rho_0(t)$ и $\rho \leqslant \rho_- = \min\limits_{[0,T_0]} \rho_0(t)$ явными в том смысле, что могут быть переписаны в виде произведений элементарных и известных специальных функций координат и времени:

$$u_{lmn}(\vec{r},t) = -\frac{i}{4T_0} e^{(\varkappa - i\omega_m)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi + in\theta} Z_l(z) \left\{ \begin{matrix} H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho) \\ J_n(\mu_{lm}\rho) \end{matrix} \right\} \times$$

$$\int\limits_0^{T_0} e^{\frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\tau) - in\theta_0(\tau) + im\Omega_0\tau} \times$$

$$A_l(\tau) \left\{ \begin{matrix} J_n(\mu_{lm}\rho_0(\tau)) \\ H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho_0(\tau)) \end{matrix} \right\} d\tau, \qquad \left\{ \begin{matrix} \rho \geqslant \rho_+ \\ \rho \leqslant \rho_- \end{matrix} \right\}. \tag{3.3}$$

3.2. Основные свойства нормальных волн.

1. Вычислив значение волнового оператора на функции $u_{lmn}(\vec{r},t)$, можно получить выражение

$$\left(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_{lmn}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi T_0} e^{(\varkappa - i\omega_m)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi + in\theta} Z_l(z) \times$$

$$\int\limits_0^{T_0} e^{\frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\tau) - in\theta_0(\tau) + im\Omega_0\tau} A_l(\tau) \frac{\delta(\rho - \rho_0(\tau))}{\rho}\, d\tau. \tag{3.4}$$

Источник, описываемый правой частью (3.4), очевидно, сосредоточен в цилиндре $\rho_- \leqslant \rho \leqslant \rho_+$, движущемся со скоростью $\vec{v}$ относительно исходной системы координат x, y, z. Возникает вопрос: имеет ли $u_{lmn}(\vec{r},t)$ как решение уравнения (3.4) смысл звукового поля, порождаемого источником из правой части (3.4). Для того, чтобы ответить на этот вопрос положительно, достаточно показать, что $u_{lmn}(\vec{r},t)$ является пределом при $t_0 \to -\infty$ решения задачи, отличающейся от задачи из §1 только заменой в (1.1) функции $e^{(\varkappa - i\omega_0)t} A(t)\delta(\vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0(t))$ на функцию из правой части (3.4). Построив указанное решение таким же образом, каким было построено $u(\vec{r},t,t_0)$ в §2, и, вычислив соответствующий предел, получаем в точности $u_{lmn}(\vec{r},t)$. Следовательно, $u_{lmn}(\vec{r},t)$ действительно имеет смысл звукового поля, порождаемого источником, описываемым правой частью (3.4).

2. Нетрудно проверить, что при любом заданном $\rho > 0$ построенные нормальные волны попарно ортогональны относительно скалярного произведения, задаваемого с помощью интегрирования по t от нуля до T_0, по θ от нуля до 2π и по z от нуля до h с весом $\exp\left(-2\varkappa t + \frac{2v\varkappa\rho\cos\theta}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$. При этом $u_{lmn}(\vec{r},t)$ и правая часть (3.4) являются (при заданном $\rho > 0$) в точности ортогональными проекциями соответственно $u(\vec{r},t)$ и правой части (2.6) на одномерное линейное подпространство, порождаемое функцией

$$Z_l(z)\exp\left((\varkappa - i\omega_m)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\rho\cos\theta + in\theta\right).$$

3. При некоторых соотношениях между параметрами задачи, одно или несколько чисел μ_{lm} могут обратиться в нуль. Если $\mu_{lm} = 0$, то волна $u_{lm0}(\vec{r},t)$ за счет логарифмической особенности функции Ханкеля, вообще говоря, обращается в бесконечность. С точки зрения физики это означает, что при неограниченном удалении в прошлое времени включения источника (при $t_0 \to -\infty$) порождаемое этим источником поле $u(\vec{r},t,t_0)$ будет в настоящем (в заданный момент t) неограниченно возрастать (по крайней мере до тех пор, пока будут оставаться выполненными условия применимости волнового уравнения).

В некоторых случаях при $\mu_{lm} = 0$ волна $u_{lm0}(\vec{r},t)$ может оказаться тождественно равной нулю. Это имеет место, например, тогда (см. (3.2), (3.4)), когда высота источника постоянна и совпадает с одним из корней функции $Z_l(z)$ (т.е. тогда, когда $A_l(t) \equiv A(t)Z_l(z_0)/\sqrt{1-v^2/c^2} \equiv 0$) или тогда, когда $\rho_0(t) = \mathrm{Const}$ и

$$\int\limits_0^{T_0} e^{\frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\tau) + im\Omega_0\tau} A_l(\tau)\,d\tau = 0.$$

Выражение для волны $u_{lmn}(\vec{r},t)$ с $n \neq 0$ (см. (3.2)) в случае $\mu_{lm} = 0$ содержит неопределенность, поскольку $J_n(0) = 0$, а $H_n^{(1)}(w) \to \infty$ при $w \to 0$ (см. [10]). Нетрудно проверить, что значение $u_{lmn}(\vec{r},t)$ при $\mu_{lm} = 0$ и $n \neq 0$ может быть получено как предел правой части (3.2) при $\mu_{lm} \to 0$. Вычислив этот предел, получаем выражение

$$u_{lmn}(\vec{r},t) = -\frac{1}{4\pi\,|n|\,T_0} e^{(\varkappa - i\omega_m)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi + in\theta} Z_l(z)\times$$

$$\int\limits_0^{T_0} e^{\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi_0(\tau)-in\theta_0(\tau)+im\Omega_0\tau} A_l(\tau)\left(\frac{\rho_<(\tau)}{\rho_>(\tau)}\right)^{|n|} d\tau. \qquad (3.5)$$

Таким образом, волна $u_{lmn}(\vec{r},t)$ с $n\neq 0$ является конечной при любых соотношениях параметров задачи (в т.ч. и в случае $\mu_{lm}=0$).

4. Исследовав поведение $u_{lmn}(\vec{r},t)$ при $\rho\to+\infty$ с помощью представления (3.3) (или (3.5) в случае $\mu_{lm}=0$, $n\neq 0$), определения μ_{lm} и асимптотики $H_n^{(1)}(w)$ при $w\to\infty$ (см. [10], стр. 98, выр. (1)), и, предполагая, что интеграл в (3.3) (или соответственно в (3.5)) отличен от нуля (в противном случае вопрос о поведении $u_{lmn}(\vec{r},t)$ тривиален), приходим к заключению, что $u_{lmn}(\vec{r},t)$ при $\rho\to+\infty$ всегда убывает, за исключением тех случаев, когда выполняются неравенства[5]

$$\varkappa>0, \qquad \lambda_l<-\frac{\varkappa^2}{c^2}, \qquad \omega_m^2<-\frac{v^2}{c^2}(\lambda_l c^2+\varkappa^2). \qquad (3.6)$$

Если неравенства (3.6) имеют место, то $u_{lmn}(\vec{r},t)$ при $\rho\to+\infty$ убывает только в случае $|\theta|\leqslant\pi-\theta_{lm}$, где

$$\theta_{lm}=\arccos\left(\frac{\sqrt{\varkappa^2+\lambda_l(c^2-v^2)-\omega_m^2+\sqrt{(\varkappa^2+\lambda_l(c^2-v^2)-\omega_m^2)^2+4\varkappa^2\omega_m^2}}}{\sqrt{2}v\varkappa/c}\right),$$

а в случае $\pi-\theta_{lm}<|\theta|\leqslant\pi$ экспоненциально растет.

5. В случае $\rho_0(t)\equiv 0$ волны $u_{lmn}(\vec{r},t)$ в силу равенства $J_n(0)=\delta_{n0}$, где δ_{n0} – символ Кронекера, (см. [10]) принимают вид

$$u_{lmn}(\vec{r},t)=-\frac{\delta_{n0}i}{4T_0}e^{(\varkappa-i\omega_m)t-\frac{v(\varkappa-i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi}Z_l(z)H_0^{(1)}(\mu_{lm}\rho)\times$$
$$\int\limits_0^{T_0} e^{im\Omega_0\sigma}A_l(\sigma)\,d\sigma.$$

Таким образом, в этом случае волны $u_{lmn}(\vec{r},t)$ с $n\neq 0$ тождественно равны нулю. Если помимо условия $\rho_0(t)\equiv 0$ выполнены

[5] В том случае, когда рассматривается звуковое поле в океаническом водном слое с абсолютно мягкой поверхностью и абсолютно жестким дном, все собственные числа λ_l (см. выше) положительны и, следовательно, второе и третье неравенства в (3.6) заведомо не выполнены.

условия $z_0(t) = \text{Const}$ и $A(t) = \text{Const}$, то выражения для нормальных волн еще более упрощаются и принимают вид

$$u_{lmn}(\vec{r},t) = -\frac{\delta_{n0}\delta_{m0} iA}{4\sqrt{1-v^2/c^2}} e^{(\varkappa - i\omega_0)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_0)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi} \times$$

$$Z_l(z_0) Z_l(z) H_0^{(1)}(\mu_{lm}\rho).$$

Таким образом, в последнем случае отличны от тождественного нуля только волны вида $u_{l00}(\vec{r},t)$.

6. В случае $v = 0$ системы координат x, y, z и ξ, y, z совпадают; величины ρ, θ и $\rho_0(t)$, $\theta_0(t)$ приобретают смысл полярных координат точек $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}_0(t)$ соответственно в плоскости переменных x, y и волны $u_{lmn}(\vec{r},t)$ принимают вид

$$u_{lmn}(\vec{r},t) = -\frac{i}{4T_0} e^{(\varkappa - i\omega_m)t + in\theta} Z_l(z) \times$$

$$\int\limits_0^{T_0} e^{-in\theta_0(\tau) + im\Omega_0\tau} A_l(\tau) H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho_>(\tau)) J_n(\mu_{lm}\rho_<(\tau))\, d\tau.$$

7. На основании представления (3.3) можно сделать вывод, что в областях $\rho \geqslant \rho_+$ и $\rho \leqslant \rho_-$ влияние функций $A(t)$ и $\vec{r}_0(t)$ на качественное поведение $u_{lmn}(\vec{r},t)$ (т.е. на сомножитель (3.3), содержащий ρ, θ, z и t) сказывается только посредством периода T_0. В то же время при заданном T_0 от $A(t)$ и $\vec{r}_0(t)$ зависит амплитуда $u_{lmn}(\vec{r},t)$ (т.е. сомножитель (3.3), не содержащий ρ, θ, z и t).

§4. Выражения для нормальных волн в некоторых частных случаях

Настоящий параграф посвящен рассмотрению нормальных волн $u_{lmn}(\vec{r},t)$ в том случае, когда функции $A(t)$ и $\vec{r}_0(t)$ имеют вид

$$A(t) = e^{\alpha\cos(\Omega_0 t + \varphi_1) + i\beta\cos(\Omega_0 t + \varphi_2)},$$

$$\vec{r}_0(t) = (R_0\sqrt{1-v^2/c^2}\cos\Omega_0 t, R_0\sin\Omega_0 t, h_0 + H\cos(\Omega_0 t + \varphi_3)), \quad (4.1)$$

где α, β, $R_0 \geqslant 0$; $0 \leqslant H < h_0 < h - H$ (это условие обеспечивает нахождение источника внутри слоя) и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathbb{R}$. Рассматриваемый в этом параграфе случай интересен тем, что с одной стороны прост (функции $A(t)$ и $\vec{r}_0(t)$ имеют простой вид), а с другой стороны содержателен (учитывается изменение частоты источника, его высоты и т.д.). Кроме того, если функции $A(t)$ и $\vec{r}_0(t)$ заданы (4.1), то интеграл в (3.2) может быть выражен через известную специальную функцию и, тем самым, может быть прослежена зависимость нормальных волн от различных параметров задачи.

Рассмотрим вначале случай $\lambda_l \neq 0$. В этом случае $Z_l(z)$ может быть представлено в виде

$$Z_l(z) = z_{l1} e^{i\sqrt{\lambda_l} z} + z_{l2} e^{-i\sqrt{\lambda_l} z}, \tag{4.2}$$

где $\sqrt{\lambda_l} > 0$, если $\lambda_l > 0$; $\sqrt{\lambda_l} = i\sqrt{|\lambda_l|}$, если $\lambda_l < 0$ и z_{l1}, z_{l2} – постоянные. Выражение (3.2), с помощью (4.1), (4.2) и замены переменной $\sigma = \varphi/\Omega_0$, можно переписать в виде

$$u_{lmn}(\vec{r}, t) = -\frac{iC_{lmn}}{4\sqrt{1 - v^2/c^2}} e^{(\varkappa - i\omega_m)t - \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}\xi + in\theta} \times$$
$$Z_l(z) H_n^{(1)}(\mu_{lm}\rho_>) J_n(\mu_{lm}\rho_<), \tag{4.3}$$

где

$$C_{lmn} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big\{ z_{l1} e^{i\sqrt{\lambda_l} h_0} \exp\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{lm1} e^{i\varphi} + \tfrac{1}{2}\gamma_{lm2} e^{-i\varphi} + i(m-n)\varphi\right) +$$
$$z_{l2} e^{-i\sqrt{\lambda_l} h_0} \exp\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{lm3} e^{i\varphi} + \tfrac{1}{2}\gamma_{lm4} e^{-i\varphi} + i(m-n)\varphi\right) \Big\}\, d\varphi, \tag{4.4}$$

$$\gamma_{lm1,2} = \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} R_0 + \alpha e^{\pm i\varphi_1} + i\beta e^{\pm i\varphi_2} + i\sqrt{\lambda_l} H e^{\pm i\varphi_3},$$

$$\gamma_{lm3,4} = \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} R_0 + \alpha e^{\pm i\varphi_1} + i\beta e^{\pm i\varphi_2} - i\sqrt{\lambda_l} H e^{\pm i\varphi_3}.$$

В правую часть (4.4) входят интегралы вида

$$I_k(a, b) = \int_0^{2\pi} \exp(ae^{i\varphi} + be^{-i\varphi} + ik\varphi)\, d\varphi,$$

где a, $b \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. Интеграл $I_k(a, b)$ можно легко вычислить, разложив его подынтегральное выражение в ряд по степеням $ae^{i\varphi}$

и $be^{-i\varphi}$, и, воспользовавшись представлением функции Бесселя мнимого аргумента $I_k(z)$ в виде ряда по степеням z (см. [10], стр. 13, выр. (12)). При этом получается, что

$$I_k(a,b) = 2\pi a^{(|k|-k)/2} b^{(|k|+k)/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j b^j}{j!(j+|k|)!} =$$

$$\begin{cases} 2\pi \left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^k I_k(2\sqrt{a}\sqrt{b}), & a \neq 0,\ k > 0 \ \text{ либо} \\ & b \neq 0,\ k < 0 \ \text{ либо } \ k = 0; \\ \dfrac{2\pi}{k!} b^k, & a = 0,\ k \geqslant 0; \\ \dfrac{2\pi}{(-k)!} a^{-k}, & b = 0,\ k \leqslant 0; \\ 0, & b = 0,\ k > 0 \ \text{ либо } \ a = 0,\ k < 0; \end{cases} \tag{4.5}$$

где значения корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, ввиду того, что они входят в (4.5) четным образом, могут выбираться произвольно, но так, чтобы их определения во множителе перед функцией Бесселя и в ее переменной совпадали.

Воспользовавшись (4.5), правую часть (4.4) можно переписать в виде:

$$C_{lmn} = \Big\{ z_{l1} e^{i\sqrt{\lambda_l} h_0} \left(\frac{\sqrt{\gamma_{lm2}}}{\sqrt{\gamma_{lm1}}}\right)^{m-n} I_{m-n}(\sqrt{\gamma_{lm1}}\sqrt{\gamma_{lm2}}) +$$

$$z_{l2} e^{-i\sqrt{\lambda_l} h_0} \left(\frac{\sqrt{\gamma_{lm4}}}{\sqrt{\gamma_{lm3}}}\right)^{m-n} I_{m-n}(\sqrt{\gamma_{lm3}}\sqrt{\gamma_{lm4}}) \Big\}.$$

Тем самым, искомое выражение для $u_{lmn}(\vec{r}, t)$ в случае $\lambda_l \neq 0$ построено.

Пусть теперь $\lambda_l = 0$. В этом случае $Z_l(z)$ имеет вид[6]

$$Z_l(z) = z_1 + z_2 z, \tag{4.6}$$

где z_1, z_2 – постоянные. Проделав с помощью (4.6) вычисления подобные тем, что были сделаны в случае $\lambda_l \neq 0$, получаем, что

[6] Значок l отсутствует в правой части (4.6) в силу того, что задача (1.4) имеет не более чем одно нулевое собственное число.

равенство (4.3) остается в силе, если в качестве постоянной C_{lmn} выбрать величину

$$C_{lmn} = \Big\{(z_1 + z_2 h_0)\left(\frac{\sqrt{\gamma_{m2}}}{\sqrt{\gamma_{m1}}}\right)^{m-n} I_{m-n}(\sqrt{\gamma_{m1}}\sqrt{\gamma_{m2}}) +$$

$$\frac{1}{2} z_2 H e^{i\varphi_3}\left(\frac{\sqrt{\gamma_{m2}}}{\sqrt{\gamma_{m1}}}\right)^{m-n+1} I_{m-n+1}(\sqrt{\gamma_{m1}}\sqrt{\gamma_{m2}}) +$$

$$\frac{1}{2} z_2 H e^{-i\varphi_3}\left(\frac{\sqrt{\gamma_{m2}}}{\sqrt{\gamma_{m1}}}\right)^{m-n-1} I_{m-n-1}(\sqrt{\gamma_{m1}}\sqrt{\gamma_{m2}})\Big\},$$

где

$$\gamma_{m1,2} = \frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} R_0 + \alpha e^{\pm i\varphi_1} + i\beta e^{\pm i\varphi_2}.$$

Таким образом, искомое выражение для $u_{lmn}(\vec{r}, t)$ построено и в случае $\lambda_l = 0$.

В заключение выпишем выражения для C_{lmn} в некоторых частных случаях. В случае $H = 0$, независимо от того равно λ_l нулю или нет, имеем

$$C_{lmn} = \left(\frac{\sqrt{\gamma_{m2}}}{\sqrt{\gamma_{m1}}}\right)^{m-n} I_{m-n}(\sqrt{\gamma_{m1}}\sqrt{\gamma_{m2}}) Z_l(h_0).$$

В частности,

$$C_{lmn} = \begin{cases} I_{m-n}\left(\frac{v(\varkappa - i\omega_m)}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} R_0\right) Z_l(h_0), & \alpha = \beta = 0; \\ \delta_{mn} Z_l(h_0), & \alpha = \beta = 0, \quad vR_0 = 0; \\ e^{i(n-m)\varphi_1} I_{m-n}(\alpha) Z_l(h_0), & \beta = 0, \quad vR_0 = 0; \\ e^{i(n-m)\varphi_2} I_{m-n}(i\beta) Z_l(h_0), & \alpha = 0, \quad vR_0 = 0; \end{cases}$$

где учтено, что $I_n(0) = \delta_{n0}$ (см. [10], стр. 13, выр. (12)). Наконец, в случае $H \neq 0$, $\alpha = \beta = 0$, $vR_0 = 0$ постоянная C_{lmn} имеет вид

$$C_{lmn} = \begin{cases} e^{i(n-m)\varphi_3} I_{m-n}(i\sqrt{\lambda_l} H) Z_l(h_0), \\ \qquad\qquad \lambda_l \neq 0, \quad m-n \ \text{четно}; \\ e^{i(n-m)\varphi_3} I_{m-n}(i\sqrt{\lambda_l} H)(z_{l1} e^{i\sqrt{\lambda_l} h_0} - z_{l2} e^{-i\sqrt{\lambda_l} h_0}), \\ \qquad\qquad \lambda_l \neq 0, \quad m-n \ \text{нечетно}; \\ \delta_{mn} Z_l(h_0) + \frac{1}{2}(\delta_{m,n-1} e^{i\varphi_3} + \delta_{m,n+1} e^{-i\varphi_3}) z_2 H, \quad \lambda_l = 0. \end{cases}$$

Подставив приведенные значения C_{lmn} в (4.3), можно получить выражения для $u_{lmn}(\vec{r},t)$ в соответствующих частных случаях.

Автор выражает признательность В. С. Булдыреву за ряд предложений по улучшению статьи.

Литература

1. K. E. Hawker, — J. Acoust. Soc. Am. **65**, No 3 (1979), 675–681.
2. В. С. Булдырев, *Звуковое поле источника, движущегося в неоднородном слое, лежащем на однородном полупространстве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **156** (1986), 35–48.
3. Е. А. Ривелис, Ю. В. Хоха, М. Е. Фрейман, *Акустическое поле движущегося узкополосного точечного источника в волноводе.* — Математические методы прикладной акустики. Изд-во Ростовского университета, Ростов-на-Дону, 1986, 113–118.
4. В. И. Ильичев, В. С. Рабинович, Е. А. Ривелис, Ю. В. Хоха, *Дальнее поле движущегося в волноводе узкополосного источника звука.* — ДАН СССР **304**, No. 5 (1989), 1123–1127.
5. В. С. Булдырев, *Эффект Допплера в рефракционных волноводах.* — Волны и дифракция–90. Физическое общество, Москва, 1990, Т. 1, 159–162.
6. А. В. Олифер, Я. С. Сойбельман, *Горизонтальные лучи и вертикальные параболические уравнения в задаче о поле движущегося узкополосного источника звука в мелком море.* — Математические методы прикладной акустики. Изд-во Ростовского университета, Ростов-на-Дону, 1990, 100–115.
7. В. С. Рабинович, Е. А. Ривелис, Ю. В. Хоха, *Об акустическом поле источника, движущегося в неоднородном акустическом волноводе.* — Волны и дифракция–90. Физическое общество, Москва, 1990, Т. 1, 163–166.
8. В. С. Булдырев, Н. С. Григорьева, *Нестационарные задачи подводного распространения звука.* — Акустика в океане. Наука, Москва (1992).
9. В. С. Булдырев, А. В. Соколов, А. С. Старков, *Звуковое поле высокочастотного источника, движущегося в волноводе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 71–78.
10. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* Наука, Москва (1974).

Sokolov A. V. The sound field of source, accomplishing in liquid layer the motion equal to sum of subsonic uniform rectilinear and periodic motions. Explicit solutions.

The article is devoted to problem of sound field, generated in liquid layer by moving point source, whose start time is infinitely distant in the past. Properties of layer and source in the paper are selected so, that it is possible to separate one after another all variables in some moving coordinate system and so to construct solution of the problem in the form of triple series. Explicit expressions, obtained in the article for terms of this series, out of some neighbourhood of the source are products of elementary and known special functions of coordinates and time.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 25 декабря 2000 г.