Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 275, 2001 г.

А. В. Шанин

К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ НА ЩЕЛИ. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДА ШВАРЦШИЛЬДА

Введение

Задача дифракции на полосе или щели привлекает внимание исследователей уже более ста лет. С того момента, как Зоммерфельдом была в замкнутой форме решена задача дифракции на полупрямой, предпринимались неоднократные попытки применить похожие методы к дифракции на щели или полосе. К сожалению, это оказалось не такой простой задачей, и в течение долгого времени единственным точным решением данных задач оставалось решение в форме ряда Фурье в эллиптических координатах [1]. Данное решение не может быть признано удовлетворительным во многих случаях; его можно сравнить с решением задачи о дифракции на полупрямой в виде разложения Фурье в параболических координатах: оно известно, однако почти никто им не пользуется. Попытки найти более удачное решение были, в основном, неудачными. Обзор таких работ можно найти в [2].

Одна из наиболее ярких работ, относящихся к данной проблеме, появилась в 1982 году [3]. В этой работе интегральное уравнение, к которому сводится задача дифракции, заменяется парой обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее похожие идеи были использованы в работе [4], однако не получили там достойного развития.

Автором данной статьи недавно был предложен другой подход к задаче о дифракции на щели или полосе [5]. В рамках этого подхода рассматривается функциональная задача типа Винера–Хопфа, содержащая неизвестные целые функции. Было показано, что решения подобных задач удовлетворяют дифференциальным уравнениям с рациональными коэффициентами. Решения в [3] и [5] выражаются в терминах специфических граничных задач для дифференциальных уравнений. При этом коэффициенты уравне-

Работа поддержана грантами INTAS, РФФИ и программой "Университеты России".

ний зависят от нескольких параметров (чисел), которые необходимо подбирать так, чтобы одновременно выполнялись асимптотические условия в особых точках. Подбор коэффициентов представляется непростой вычислительной задачей; непосредственное отыскание асимптотик для коэффициентов возможно, однако также непросто.

Ниже предлагается другая техника для решения задачи о дифракции на щели с идеальными граничными условиями. В рамках предлагаемого подхода решение задачи дифракции представляется в виде т.н. *дифракционного ряда*, т.е. в виде суммы решений бесконечной последовательности задач о дифракции на полупрямой. Предполагается, что падающая волна дифрагирует сначала на одном ребре щели, затем дифрагированная волна достигает другого края и дифрагирует на нем и т.д. Такое представление решения было по-видимому впервые введено Шварцшильдом в 1902 г. [6]. Любопытную интерпретацию дифракционного ряда можно найти в книге [7]. Традиционно дифракционный ряд используется для построения приближенных решений. На этих идеях основаны геометрическая и физическая теория дифракции.

В настоящей работе предложена техника преобразования членов дифракционного ряда, с помощью которой удается получить ряд *точных результатов* относительно суммы ряда. Главные из этих результатов – вывод представления Вильямса, описывающего зависимость диаграммы рассеяния от угла падения волны, а также вывод упрощенных обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных функций.

Используя предложенные методы мы получаем результаты работ [3] и [5], давая тем самым независимое подтверждение полученных там результатов. Кроме того, получены асимптотические ряды для неизвестных коэффициентов дифференциальных уравнений, использованных в обеих этих работах.

1. Постановка задачи и решение в виде дифракционного ряда

1.1. Постановка задачи.

Рассмотрим 2-мерную задачу дифракции на экране со щелью. Пусть на плоскости (x, y) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 u = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия есть

$$u(x,0) = 0 \text{ при } |x| > a. \tag{1.2}$$

Щель занимает отрезок $-a < x < a$ (см. Рис. 1).

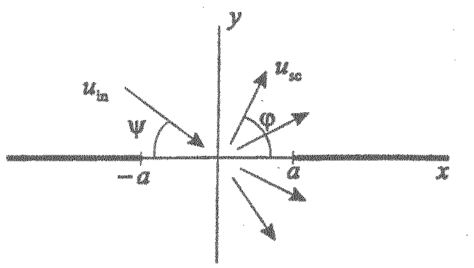

Рис. 1. Геометрия задачи.

Предполагается, что зависимость всех величин от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, где $\omega = k_0 c$, c – фазовая скорость волн.

На щель падает плоская волна из верхней полуплоскости $y > 0$:

$$u_{\rm in} = e^{-ik_* x - i\sqrt{k_0^2 - k_*^2 y}}, \tag{1.3}$$

где $k_* = -k_0 \cos\psi$, ψ – угол падения (см. Рис. 1). Поле представляет собой сумму падающей волны $u_{\rm in}$, отраженной волны

$$u_{\rm r} = -e^{-ik_* x + i\sqrt{k_0^2 - k_*^2 y}}, \tag{1.4}$$

и рассеянного поля $u_{\rm sc}$. В нижней полуплоскости присутствует только вклад $u_{\rm sc}$.

Очевидно, что поле $u_{\rm sc}$ симметрично по отношению к отражению относительно прямой $y = 0$, т.е. $u_{\rm sc}(x,y) = u_{\rm sc}(x,-y)$. Его производная по y должна иметь на щели (т.е., при $y = 0$, $|x| < a$) разрыв, равный $2i\sqrt{k_0^2 - k_*^2} e^{-ik_* x}$.

1.2. Дифракционный ряд.

Представляется удобным рассматривать в верхней полуплоскости комбинацию $u_{\rm sc} + u_{\rm r}$. Для нее при $y = +0$ выполняются следующие граничные условия:

$$u_{\rm sc}(x,+0) + u_{\rm r}(x,+0) = -e^{-ik_* x} \text{ при } |x| > a, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial[u_{\rm sc}(x,+0)+u_{\rm r}(x,+0)]}{\partial y}=0 \text{ при } |x|>a. \tag{1.6}$$

Кроме того, должны выполняться обычные условия излучения на бесконечности и Мейкснеровские условия на краях щели.

Представим процесс дифракции как последовательность актов дифракции на частях экрана, т.е. представим поле в виде ряда

$$u_{\rm sc}+u_{\rm r}=u_1+u_2+u_{12}+u_{21}+u_{121}+u_{212}+\dots \tag{1.7}$$

где символами u_1 и u_2 обозначены дифракционные члены нулевого порядка (падающая плоская волна дифрагирует на одном из краев щели); индекс 1 соответствует дифракции на краю $x=a$, индекс 2 – дифракции на краю $x=-a$. Дифракционное поле первого порядка, полученное в результате дифракции сначала на краю 1, а затем на краю 2 соответствует обозначению u_{12} и т.д. Так можно ввести функции вида $u_{1212\dots21}$. Будем считать индексом всю последовательность $1212\dots21$. В этой последовательности стоящие подряд символы не повторяются. Самый левый символ соответствует самому первому акту дифракции.

Следует отметить, что такая система индексации представляется избыточной. Вместо того, чтобы в явном виде выписывать последовательность актов дифракции в цепочке индексов, можно было бы обозначить первый (или последний) и назвать их количество. Нам потребуются и такие обозначения, ниже они будут введены. Полная индексация (с сохранением всей цепочки дифракций) потребуется для описания дифракции на более сложных структурах, а именно на системах полос, уголках и т.д.

Итак, для удобства введем следующие обозначения:
$u^n_{1\dots}$ – последовательность символов в индексе имеет длину $n+1$ и начинается с 1;
$u^n_{\dots1}$ – последовательность символов в индексе имеет длину $n+1$ и кончается символом 1;
$u^n_{1\dots1}$ – последовательность символов начинается с 1 и кончается 1 (при этом, очевидно, n должно быть четно).
Очевидно, что по длине цепочки по первому или последнему символу можно однозначно восстановить всю цепочку.

Для членов нулевого порядка заданы граничные условия на прямой $y=0$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=0, \quad \text{при} \quad x<a, \qquad u_1=-e^{-ik_*x}, \quad \text{при} \quad x>a, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \text{при} \quad x > -a, \quad u_2 = -e^{-ik_* x}, \quad \text{при} \quad x < -a. \qquad (1.9)$$

Для всех остальных членов заданы граничные условия:

$$\frac{\partial u^n_{\dots 1}}{\partial y} = 0 \text{ при } x < a, \quad u^n_{\dots 1} = -u^{n-1}_{\dots 2} \text{ при } x > a, \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial u^n_{\dots 2}}{\partial y} = 0 \text{ при } x > -a, \quad u^n_{\dots 2} = -u^{n-1}_{\dots 1} \text{ при } x < -a. \qquad (1.11)$$

При этом, разумеется, для всех членов ряда должно выполняться уравнение Гельмгольца, а также условия в вершине и условия на бесконечности.

1.3. Решение последовательности дифракционных задач методом Винера–Хопфа.

Введем обозначения для Фурье-образов членов дифракционного ряда

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 1}(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int\limits_a^\infty \frac{\partial u^n_{\dots 1}(x, +0)}{\partial y}\, e^{ikx} dx \qquad (1.12)$$

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 2}(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int\limits_{-\infty}^{-a} \frac{\partial u^n_{\dots 2}(x, +0)}{\partial y}\, e^{ikx} dx \qquad (1.13)$$

Интегралы определены корректно для всех n, кроме $n = 0$. Члены нулевого порядка содержат неубывающий вклад, относящийся к $u_{\text{г}}$. В соответствии с этим, формулы (1.12), (1.13) должны быть модифицированы следующим образом:

$$\overline{U}_1(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int\limits_a^\infty \left[\frac{\partial u_1(x, +0)}{\partial y} + i\sqrt{k_0^2 - k_*^2}\, e^{-ik_* x} \right] e^{ikx} dx + \\ + \frac{i\sqrt{k_0^2 - k_*^2}}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \, \frac{e^{ik_* a}}{k - k_*}, \qquad (1.14)$$

$$\overline{U}_2(k) = \frac{i}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \int\limits_{-\infty}^{-a} \left[\frac{\partial u_2(x, +0)}{\partial y} + i\sqrt{k_0^2 - k_*^2}\, e^{-ik_* x} \right] e^{ikx} dx - \\ - \frac{i\sqrt{k_0^2 - k_*^2}}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} \, \frac{e^{-ik_* a}}{k - k_*}, \qquad (1.15)$$

Принимая во внимание граничные условия (1.8)–(1.11), получим формулы для обратного преобразования:

$$u^n_{\dots} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma\mp} \overline{U}^n_{\dots} e^{-ikx+i\sqrt{k_0^2-k^2}\,y}\,dk, \tag{1.16}$$

где контуры $\gamma_\pm$ показаны на Рис. 2. Контур γ_- выбирается для членов $u^n_{\dots 1}$, контур γ_+ для $u^n_{\dots 2}$. Такой выбор контуров гарантирует выполнение условий излучения, а также правильный учет полюса, соответствующего падающей волне.

Заметим, что для определения преобразования Фурье и операторов $F_\pm$ используются контура, изображенные на Рис. 2а, а для выполнения асимптотических оценок – контура, изображенные на Рис. 2б.

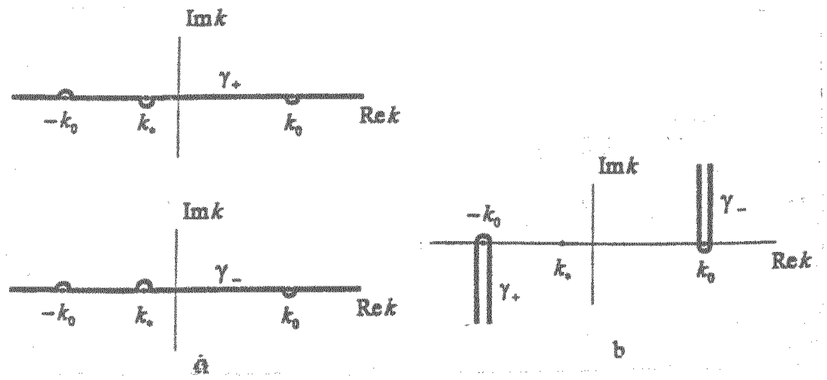

Рис. 2. Контуры интегрирования.

Величины $\overline{U}^n_{\dots}$ могут быть найдены методом Винера–Хопфа [8]. Выпишем окончательный вид решений, опуская детали.

Функции первого порядка определяются с помощью формул

$$\overline{U}_1(k) = A_1\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}\,(k-k_*)}, \quad \overline{U}_2(k) = A_2\frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}\,(k-k_*)}, \tag{1.17}$$

коэффициенты $A_{1,2}$ определяются как

$$A_1 = ie^{-ik_*a}\sqrt{k_0-k_*}, \quad A_2 = -ie^{ik_*a}\sqrt{k_0+k_*}. \tag{1.18}$$

Функции более выскоих порядков определяются рекуррсивно

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 1} = -\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0 - k}}\, F_+ \left[e^{-ika} \sqrt{k_0 - k}\, \overline{U}^{\,n-1}_{\dots 2} \right], \tag{1.19}$$

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 2} = -\frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0 - k}}\, F_- \left[e^{ika} \sqrt{k_0 + k}\, \overline{U}^{\,n-1}_{\dots 1} \right]. \tag{1.20}$$

Операторы F_+ и F_- осуществляют разложение на слагаемые, регулярные в верхней и нижней полуплоскости переменной k. Они определяются формулами

$$F_\pm[V(k)] = \pm \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\pm} \frac{V(\tau) d\tau}{\tau - k}, \tag{1.21}$$

Следует заметить, что спектральные функции $\overline{U}^{\,n}_{\dots}$ зависят не только от k, но и от величины k_*, связанной с углом падения. Далее мы будем явно указывать эту зависимость. Сумма всех членов $\overline{U}^{\,n}_{\dots}(k, k_*)$ пропорциональна диаграмме направленности поля в дальней зоне $f(\varphi, \psi)$, причем $k_0 \cos\psi = -k_*$, $k_0 \cos\varphi = -k$

$$f(k, k_*) \sim \sqrt{k_0^2 - k^2}\, \overline{U}(k_0^2 - k^2) = \\ = \sqrt{k_0^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{U}^{\,n}_{\dots 1}(k, k_*) + \overline{U}^{\,n}_{\dots 2}(k, k_*)). \tag{1.22}$$

2. Некоторые предварительные результаты, касающиеся дифракционного ряда

2.1. Вспомогательные функции G.

Избегая рекурсии, можно записать

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 1}(k, k_*) = \begin{cases} \frac{A_1 e^{ika}}{\sqrt{k_0 - k}}\, F_+ \left[\beta_+(k) F_- \left[\beta_-(k) \dots \right.\right. \\ \left.\left. \dots F_- \left[\beta_-(k) \frac{1}{k - k_*} \right] \dots \right]\right] \text{ для четных } n, \\ \frac{A_2 e^{ika}}{\sqrt{k_0 - k}}\, F_+ \left[\beta_+(k) F_- \left[\beta_-(k) \dots \right.\right. \\ \left.\left. \dots F_+ \left[\beta_+(k) \frac{1}{k - k_*} \right] \dots \right]\right] \text{ для нечетных } n, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\overline{U}^{\,n}_{\dots 2}(k,k_*) = \begin{cases} \frac{A_2 e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}\, F_-\left[\beta_-(k) F_+\left[\beta_+(k)\dots\right.\right. \\ \left.\left.\dots F_+\left[\beta_+(k)\frac{1}{k-k_*}\right]\dots\right]\right] \text{ для четных } n, \\ \frac{A_1 e^{-ika}}{\sqrt{k_0-k}}\, F_-\left[\beta_-(k) F_+\left[\beta_+(k)\dots\right.\right. \\ \left.\left.\dots F_-\left[\beta_-(k)\frac{1}{k-k_*}\right]\dots\right]\right] \text{ для нечетных } n, \end{cases} \tag{2.2}$$

Каждое выражение содержит n пар квадратных скобок.

Функции $\beta_\pm(k)$ определяются как

$$\beta_+(k) = e^{-2ika}\frac{\sqrt{k_0-k}}{\sqrt{k_0+k}}, \quad \beta_-(k) = e^{2ika}\frac{\sqrt{k_0+k}}{\sqrt{k_0-k}} \tag{2.3}$$

и возникают в результате факторизации символа задачи о полупрямой.

Ниже будут получены выражения для членов дифракционного ряда, в которых зависимость от k и k_* в некотором смысле разделяется. С этой целью введем вспомогательные функции $G^n_{\dots 1}(k)$ и $G^n_{\dots 2}(k)$, которые по своим свойствам близки к функциям $\overline{U}^{\,n}_{\dots 1}(k,k_*)$ и $\overline{U}^{\,n}_{\dots 2}(k,k_*)$, рассматриваемым как функции переменной k, однако не зависят от второй переменной k_*. Позже будет получено представление для функций $\overline{U}^{\,n}_{\dots}$ в виде линейных комбинаций функций $G^n_{\dots}$ с рациональными коэффициентами.

Итак, введем вспомогательные функции с помощью соотношений

$$G_1(k) = G_2(k) \equiv 1 \tag{2.4}$$

$$G^{n+1}_{\dots 1}(k) = F_+[\beta_+(k) G^n_{\dots 2}(k)], \tag{2.5}$$

$$G^{n+1}_{\dots 2}(k) = F_-[\beta_-(k) G^n_{\dots 1}(k)]. \tag{2.6}$$

Индексация функций G строится так же, как индексация функций $\overline{U}$, т.е. внизу стоит цепочка, состоящая из чередующихся символов 1 и 2, определяющих последовательность и число применений операторов $F_\pm$, а вверху – длина цепочки минус 1.

Сравним структуру функций $\overline{U}$ (как функций переменной k) и G. В качестве примера возьмем $\overline{U}_{12121}$ и G_{12121}:

$$\overline{U}_{12121}(k,k_*) = A_1\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}}\, F_+\left[\beta_+ F_-\left[\beta_- F_+\left[\beta_+ F_-\left[\beta_- \frac{1}{k-k_*}\right]\right]\right]\right], \tag{2.7}$$

$$G_{12121}(k) = F_+[\beta_+ F_-[\beta_- F_+[\beta_+ F_-[\beta_-]]]]. \tag{2.8}$$

Очевидно, что для того, чтобы выразить $\overline{U}_{12121}$ через G, необходимо каким-либо образом избавиться от дроби $1/(k-k_*)$ под знаками оператора. Ниже будет предложена соответствующая процедура, опирающаяся на некоторые свойства операторов $F_\pm$.

В конце данного раздела заметим, что в предлагаемой статье мы не будем касаться вопросов сходимости и асимптотической оценки членов ряда. Такие оценки делаются элементарно с помощью деформаций контуров интегрирования и с использованием известных теорем. Автор проделал всю эту работу и рад сообщить, что можно выбрать k_0 с такой мнимой частью, что все ряды сходятся, а все формулы справедливы. После этого следует применить обычную в теории дифракции процедуру аналитического продолжения по k_0.

2.2. Элементарные свойства операторов $F_\pm$.

В данном разделе будут исследованы некоторые свойства операторов $F_\pm$, позволяющие производить необходимые манипуляции с дифракционным рядом (исключение зависимости от угла падения и дифференцирование).

Свойства 1 и 2 очевидны и приводятся лишь для того, чтобы избежать непонимания в дальнейшем изложении. Первое из них выражает линейность операторов, второе инвариантность по отношению к трансляциям вдоль действительной оси.

Третье свойство менее очевидно. Необходимо скать, что *именно на нем построены все дальнейшие выкладки.*

1. Очевидно, что $F_\pm$ – линейные операторы, т.е. для произвольной константы c и произвольных функций $V(k)$, $V_1(k)$, $V_2(k)$

$$F_\pm[cV(k)] = cF_\pm[V(k)], \quad F_\pm[V_1(k)+V_2(k)] = F_\pm[V_1(k)] + F_\pm[V_2(k)].$$

Здесь мы не обсуждаем класс функций, к которым применимы операторы $F_\pm$. Однако, нет сомнений в том, что в нашем случае все функции “хорошие”. Это обеспечивается присутствием экспоненциальных множителей.

2. Для широкого класса функций V

$$(F_\pm[V])' = F_\pm[V'] \tag{2.9}$$

Данное свойство может быть доказано с помощью интегрирования по частям:

$$(F_\pm[V(k)])' = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm}\frac{V(\tau)d\tau}{(\tau-k^2)} =$$

$$= \mp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm}V(\tau)d\left(\frac{1}{\tau-k}\right) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm}\frac{V'(\tau)d\tau}{\tau-k}.$$

3. Для произвольного k_1, не лежащего на контурах $\gamma_\pm$ и $V = V(k)$

$$F_\pm\left[\frac{V}{k-k_1}\right] = \frac{F_\pm[V]}{k-k_1} + \frac{\mathcal{F}_\pm(V,k_1)}{k-k_1}, \tag{2.10}$$

где

$$\mathcal{F}_\pm(V,k_1) = \mp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm}\frac{V(\tau)d\tau}{\tau-k_1}. \tag{2.11}$$

Последнее свойство следует из элементарного соотношения

$$\frac{1}{(\tau-k_1)(\tau-k)} = \frac{1}{k-k_1}\left(\frac{1}{\tau-k} - \frac{1}{\tau-k_1}\right).$$

Заметим, что величина $\mathcal{F}_\pm(V,k_1)$ не зависит от k, т.е. является константой по переменной k.

Уравнение (2.11) допускает простую интерпретацию. Оператор F_+ осуществляет разложение функции V на слагаемые $V = V_+ + V_-$, регулярные соответственно выше и ниже контура γ_+. Попытаемся разложить таким же образом функцию $V/(k-k_1)$. Разложение вида

$$\frac{V}{k-k_1} = \frac{V_+}{k-k_1} + \frac{V_-}{k-k_1}$$

почти подходит, однако одно из слагаемых имеет нежелательный полюс в точке $k = k_1$. В зависимости от того, в какой полуплоскости (верхней или нижней) относительно контура γ_+ лежит k_1, лишний полюс имеет соответственно первое или второе слагаемое. Однако данная ошибка может быть легко устранена с помощью вычитания соответствующего полюса. Исходя из этого, справедливы формулы

$$\mathcal{F}_+(V,k_1) = \begin{cases} -V_+(k_1) & k_1 \text{ лежит выше контура } \gamma_+ \\ V(k_1) - V_+(k_1), & k_1 \text{ лежит ниже контура } \gamma_+ \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{F}_-(V,k_1) = \begin{cases} -V_-(k_1) & k_1 \text{ лежит выше контура } \gamma_- \\ V(k_1) - V_-(k_1), & k_1 \text{ лежит ниже контура } \gamma_-. \end{cases} \tag{2.13}$$

Заметим, что значения $\mathcal{F}(\dots)$ конечны, поэтому если k_1 совпадает с сингулярностью V_+ или V_-, то в равенствах, приведенных выше, необходимо брать соответствующий предел.

3. Преобразование дифракционного ряда

3.1. Представление членов ряда в терминах функций G.

Преобразуем выражение вида (2.7) следующим образом. Применим свойство (2.10) сначала к самому внутреннему оператору, затем к следующему и т.д., в каждом случае выбирая k_* в качестве k_1. Прежде чем перейти к более общему случаю, рассмотрим простой пример. С помощью (2.10) преобразуем член $\overline{U}_{21}$:

$$\overline{U}_{21} = -\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}} F_+\left[e^{ika}\sqrt{k_0-k}\,\overline{U}_2(k)\right] = -A_2\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}}\,F_+\left[\frac{\beta_+(k)}{k-k_*}\right] =$$

$$= -A_2\frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}}\left\{\frac{G_{21}(k)}{k-k_*} + \frac{\mathcal{F}_+(\beta_+,k_*)}{k-k_*}\right\}. \tag{3.1}$$

Заметим, что $\mathcal{F}_+(\beta_+,k_*)$ есть константа по отношению к k, величина которой определяется из (2.12):

$$\mathcal{F}_+(\beta_+,k_*) = -G_{21}(k_*). \tag{3.2}$$

Используя (3.1), можно преобразовать следующий член $\overline{U}_{212}$:

$$\overline{U}_{212} = A_2\frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}F_-\left[\beta_-(k)\frac{G_{21}(k)-G_{21}(k_*)}{k-k_*}\right] =$$

$$A_2\frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}(k-k_*)}\{G_{212}(k) - G_{21}(k_*)G_{12}(k) - \\ - G_{212}(k_*) + G_{21}(k_*)G_{12}(k_*)\}. \tag{3.3}$$

Ясно, что этот процесс может быть продолжен, т.е. члены $\overline{U}_{2121}$, $\overline{U}_{21212}\dots$ могут быть преобразованы тем же способом. Сформулируем общий результат в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Члены дифракционного ряда $\overline{U}_{\dots}$ могут быть представлены следующим образом:*

$$
\begin{aligned}
\overline{U}^{\,n}_{\nu\dots1}(k,k_*) &= (-1)^n A_\nu \frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}(k-k_*)} \sum_{m=0}^{n} g^{n-m}_{\nu\dots}(k_*) G^{m}_{\dots1}(k),\\
\overline{U}^{\,n}_{\nu\dots2}(k,k_*) &= (-1)^n A_\nu \frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0-k}(k-k_*)} \sum_{m=0}^{n} g^{n-m}_{\nu\dots}(k_*) G^{m}_{\dots2}(k),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где первый индекс $\nu = 1,2$ в цепочке индексов либо совпадает с последним μ (n четно), либо не совпадает (n нечетно). Величины $g^n_{\dots}$ не зависят от k.

Индексация величин $g^n_{\dots}$ устроена так же, как индексация величин $\overline{U}$ и G, т.е. цепочка состоит из чередующихся символов 1 и 2. Верхний индекс есть длина цепочки минус один. В данном случае трудно непосредственно интерпретировать такую систему индексов этих величин в терминах последовательности актов дифракции.

Индексы в формуле (3.4) строятся следующим образом. Пусть в левой части стоит величина $\overline{U}_{12121}$. В этом случае в правой части стоят произведения $g_1 G_{12121}$, $g_{12} G_{2121}$, $g_{121} G_{121}$, $g_{1212} G_{21}$ и $g_{12121} G_1$. Видно, что исходная цепочка 12121 разбивается на две части всеми возможными способами, при этом последний индекс при g и первый индекс при G должны совпадать (сумма длин частей оказывается на единицу больше длины исходной цепочки). Отметим характерный “сверточный” вид построенной суммы.

Приведем рекуррентные формулы для коэффициентов

$$
g_1(k_*) = g_2(k_*) \equiv 1, \tag{3.5}
$$

$$
g^{n+1}_{\nu\dots\mu}(k_*) = -\sum_{m=0}^{n} g^{n-m}_{\nu\dots}(k_*) G^{m+1}_{\dots\mu}(k_*). \tag{3.6}
$$

При этом предполагается, что индексы $\mu, \nu = 1,2$ совпадают при нечетном n и не совпадают в противном случае.

Докажем по индукции теорему 1 и формулы (3.5), (3.6). Базовое утверждение ($n = 0$) получаем, сравнивая (3.4) с (1.17).

Предположим, что утверждение (3.4) выполнено для какого-то n. Используя это, вычислим $\overline{U}^{\,n+1}_{\nu\dots1}$:

$$
\overline{U}^{n+1}_{\nu\dots1}(k,k_*) =
$$

$$= \frac{A_\nu(-1)^{n+1}e^{ika}}{\sqrt{k-k_0}} F_+ \left[e^{-2ika} \frac{\sqrt{k_0-k}}{\sqrt{k_0+k}(k-k_*)} \sum_{m=0}^{n} g_{\nu\ldots}^{n-m}(k_*) G_{\ldots 2}^{m}(k) \right] =$$

$$\frac{A_\nu(-1)^{n+1}e^{ika}}{\sqrt{k-k_0}} \sum_{m=0}^{n} g_{\nu\ldots}^{n-m}(k_*) F_+ \left[\frac{\beta_+(k) G_{\ldots 2}^{m}(k)}{k-k_*} \right]. \qquad (3.7)$$

Каждый член в сумме может быть преобразован с помощью (2.10), что дает

$$\overline{U}_{\ldots 1}^{n+1}(k,k_*) = \frac{A_\nu(-1)^{n+1}e^{ika}}{\sqrt{k-k_0}} \sum_{m=0}^{n} g_{\nu\ldots}^{n-m}(k_*) \frac{G_{\ldots 1}^{m+1}(k) - G_{\ldots 1}^{m+1}(k_*)}{k-k_*}. \qquad (3.8)$$

Соответствующие выражения можно получить и для $\overline{U}_{\ldots 2}^{n+1}$. Данные формулы подтверждают утверждение (3.4) теоремы 1 и рекуррентные формулы (3.5)–(3.6).

Обсудим результат теоремы 1. Каждый член дифракционного ряда зависит от k и k_*. Формула (3.4) представляет члены ряда в виде комбинации функций одной переменной: функции $G_{\ldots}^{n}$ зависят только от k, функции $g_{\ldots}^{n}$ зависят только от k_*.

Некоторые интересные свойства коэффициентов $g_{\ldots}^{n}(k_*)$ будут исследованы в Приложении.

3.2. Выражение для суммы ряда.

Выше было получено представление для каждого из членов дифракционного ряда. В настоящем разделе это представление будет использовано для упрощения стуктуры всего ряда. При этом будет неявно использоваться тот факт, что выражение (3.4) имеет структуру дискретной свертки по индексу.

Выпишем дифракционный ряд в форме

$$\overline{U}(k,k_*) = \sum_{\text{четн } n} \overline{U}_{1\ldots 1}^{n}(k,k_*) + \sum_{\text{нечет } n} \overline{U}_{2\ldots 1}^{n}(k,k_*) + \\ + \sum_{\text{четн } n} \overline{U}_{2\ldots 2}^{n}(k,k_*) + \sum_{\text{нечет } n} \overline{U}_{1\ldots 2}^{n}(k,k_*). \qquad (3.9)$$

Все суммы берутся по неотрицательным целым n. Применяя утверждение теоремы 1 и вынося общие множители при различных G, получаем представление

$$\overline{U}(k,k_*) =$$

$$= \frac{1}{k-k_*}\left[(A_1 g_{1-1}(k_*) - A_2 g_{2-1}(k_*))\left(\frac{G_{1-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}} - \frac{G_{1-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}\right) + \right.$$

$$\left.(A_1 g_{1-2}(k_*) - A_2 g_{2-2}(k_*))\left(\frac{G_{2-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}} - \frac{G_{2-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}\right)\right], \quad (3.10)$$

где индексом $\mu - \nu$ обозначена сумма всех соответствующих величин с цепочками, начинающихся с μ и кончающихся ν, т.е.

$$G_{1-1} = G_1 + G_{121} + G_{12121} + \ldots \quad G_{2-2} = G_2 + G_{212} + G_{21212} + \ldots \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} G_{1-2} &= G_{12} + G_{1212} + G_{121212} + \ldots \\ G_{2-1} &= G_{21} + G_{2121} + G_{212121} + \ldots \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$g_{1-1} = g_1 + g_{121} + g_{12121} + \ldots \quad g_{2-2} = g_2 + g_{212} + g_{21212} + \ldots \quad (3.13)$$

$$g_{1-2} = g_{12} + g_{1212} + g_{121212} + \ldots \quad g_{2-1} = g_{21} + g_{2121} + g_{212121} + \ldots \quad (3.14)$$

Свойства таких сумм описаны в Приложении. Приведем здесь некоторые из этих свойств, необходимые для дальнейших преобразований дифракционного ряда.

Из (П.23)–(П.26) следует, что

$$g_{1-1}(k_*) = G_{2-2}(k_*)/N(k_*), \quad (3.15)$$

$$g_{2-1}(k_*) = -G_{2-1}(k_*)/N(k_*), \quad (3.16)$$

$$g_{2-2}(k_*) = G_{1-1}(k_*)/N(k_*), \quad (3.17)$$

$$g_{1-2}(k_*) = -G_{1-2}(k_*)/N(k_*), \quad (3.18)$$

где $N(k_*)$ представляет собой определитель

$$N(k_*) = \begin{vmatrix} G_{1-1}(k_*) & G_{2-1}(k_*) \\ G_{1-2}(k_*) & G_{2-2}(k_*) \end{vmatrix}. \quad (3.19)$$

Кроме того, в Приложении показано, что

$$N(k_*) \equiv 1. \quad (3.20)$$

Заметим, что диаграмма направленности поля в дальней зоне пропорциональна $\sqrt{k_0^2 - k^2 U}$. Используя определения коэффициентов $A_{1,2}$, а также свойства (3.15)–(3.20), преобразуем выражение (3.10) к виду

$$f(k, k_*) \sim \sqrt{k_0^2 - k^2}\,\overline{U}(k) = i\frac{\sqrt{k_0^2 - k^2}\sqrt{k_0^2 - k_*^2}}{k - k_*} \times$$

$$\Bigg[\left(\frac{G_{1-1}(k_*)e^{ik_*a}}{\sqrt{k_0-k_*}}-\frac{G_{1-2}(k_*)e^{-ik_*a}}{\sqrt{k_0+k_*}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{G_{2-1}(k_*)e^{ik_*a}}{\sqrt{k_0-k_*}}-\frac{G_{2-2}(k_*)e^{-ik_*a}}{\sqrt{k_0+k}}\right)-$$
$$-\left(\frac{G_{2-1}(k)e^{ik_*a}}{\sqrt{k_0-k}}-\frac{G_{2-2}(k)e^{-ik_*a}}{\sqrt{k_0+k}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{G_{1-1}(k)e^{ik_*a}}{\sqrt{k_0-k}}-\frac{G_{1-2}(k)e^{-ik_*a}}{\sqrt{k_0+k}}\right)\Bigg]. \quad (3.21)$$

Диаграмма направленности оказалась выраженной в виде

$$f(k,k_*)=\frac{V(k)W(k_*)-W(k)V(k_*)}{k-k_*}, \quad (3.22)$$

где V и W – некоторые функции. Подобное представление для дифракционной картины было по-видимому впервые введено Вильямсом [3]. Заметим, что такое представление не может быть единственным. Любое преобразование вида

$$V^*(k)=c_1V(k)+c_2W(k), \quad (3.23)$$

$$W^*(k)=c_2V(k)+c_1W(k) \quad (3.24)$$

для произвольных констант $c_1 \neq c_2$ приводит к представлению того же вида. Как будет показано ниже, при определенном выборе этих констант формула (3.21) переходит в формулу Вильямса.

4. Дифференцирование дифракционного ряда

Формула (3.21) выглядит достаточно привлекательной, однако вычисление входящих в нее функций $G_{\mu-\nu}$ представляется непростой задачей. До настоящего момента мы не предложили ничего, кроме рекуррсивного вычисления слагаемых с помощью интегральных представлений (2.4)–(2.6).

Ниже мы покажем, что функции $G^n_{\dots}(k)$, а также их бесконечные суммы $G_{\mu-\nu}(k)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям с рациональными по k коэффициентами. При этом порядки дифференциальных уравнений для $G^n_{\dots}(k)$ равны n, а порядок дифференциальных уравнений для $G_{\mu-\nu}(k)$ оказывается равен 2.

4.1. Дифференцирование функций $G^n_{\dots}(k)$.

Будем обозначать штрихом дифференцирования по k.

Применим соотношение (2.9) к определению функций G. Получим соотношение

$$(G^{n+1}_{\nu\dots 1})' = F_+[\beta'_+ G^n_{\nu\dots 2}] + F_+[\beta_+ (G^n_{\nu\dots 2})']. \tag{4.1}$$

Похожее соотношение можно получить и для $(G^{n+1}_{\mu\dots 2})'$.

Заметим, что логарифмические производные функций $\beta_\pm(k)$ рациональны по k, иными словами, дифференцирование функций $\beta_\pm(k)$ приводит к умножению их на рациональные функции:

$$(\beta_\pm(k))' = \left(\mp 2ia \pm \frac{1}{2(k-k_0)} \mp \frac{1}{2(k+k_0)}\right)\beta_\pm(k). \tag{4.2}$$

Выше был описан способ избавления от рациональной функции под оператором $F_\pm$. В комбинации с соотношением (4.1) это дает возможность представить $(G^n_{\dots}(k))'$ в виде линейной комбинации функций $G^m_{\dots}(k)$ меньшего порядка $(m \leqslant n)$. Структура формул, получающихся в результате несколько сложнее (3.4):

Теорема 2. *Производные $G^n_{\dots}(k)$ по k выражаются формулами*

$$(G^n_{\nu\dots\mu}(k))' = \left(r_\nu - r_\mu - \frac{p_\mu}{k-k_0} - \frac{m_\mu}{k+k_0}\right) G^n_{\nu\dots\mu}(k) + \\ \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{p^{n-m}_{\nu\dots}}{k-k_0} + \frac{m^{n-m}_{\nu\dots}}{k+k_0}\right) G^m_{\dots\mu}(k). \tag{4.3}$$

Коэффициенты p, m не зависят от k.

Индексация величин p, m устроена так же, как индексация величин g.

Приведем рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$r_1 = ia, \quad r_2 = -ia, \tag{4.4}$$

$$p_1 = -1/4, \quad p_2 = 1/4, \tag{4.5}$$

$$m_1 = 1/4, \quad m_2 = -1/4, \tag{4.6}$$

$$p^{n+1}_{\nu\dots\overline{\mu}} = \sum_{m=0}^{n} p^{n-m}_{\nu\dots} \mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^m_{\dots\mu}, k_0) - p_\mu \mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^n_{\dots\mu}, k_0), \tag{4.7}$$

$$m^{n+1}_{\nu\ldots\mu} = \sum_{m=0}^{n} m^{n-m}_{\nu\ldots} \mathcal{F}_{\pm}(\beta_{\pm} G^{m}_{\ldots\mu}, -k_0) - m_{\mu} \mathcal{F}_{\pm}(\beta_{\pm} G^{n}_{\ldots\mu}, -k_0). \quad (4.8)$$

Знаки $\pm$ в двух последних формулах зависят от μ: это "+" при $\mu = 2$ и "−" при $\mu = 1$. Символом $\overline{\mu}$ обозначены 2 при $\mu = 1$ и 1 при $\mu = 2$.

Данная теорема легко доказывается по индукции с использованием соотношений (4.1) и (4.2).

Коэффициенты p и m обладают рядом интерсных алгебраических свойств, которые изучаются в Приложении.

Обсудим некоторые непосредственные следствия Теоремы 2. При $n = 1$ уравнение (4.3) представляет собой неоднородное линейное дифференциальное уравнение для $G_{21}(k)$ или $G_{12}(k)$ с рациональными коэффициентами и рациональной правой частью. Эти уравнения остаются справедливыми на всей комплексной плоскости (в отличие от представлений (2.5), (2.6), справедливых лишь выше γ_+ или ниже γ_- соответственно).

Далее, для описания G_{121} возьмем уравнения (4.3) для G_{121} и G_{21}. Тем самым будет получена замкнутая система из двух дифференциальных уравнений. Вообще, для каждого $G^{n}_{\ldots}$ имеем систему из n неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система должна быть дополнена соответствующими граничными условиями. Данные условия должны включать "правильное" поведение неизвестных функций на бесконечности и в точках $\pm k_0$. Здесь мы не ставим перед собой задачу провести какие-либо практические вычисления, поэтому не развиваем далее эту тему.

Заметим, что с использованием теоремы 1 дифференциальные уравнения могут быть получены и для величин $\overline{U}^{\,n}_{\ldots}$.

4.2. Дифференцирование бесконечных сумм.

Выше были введены ряды вида $G_{\nu-\mu}(k)$ (см. формулы (3.11), (3.12)). Через эти ряды выражается дифракционная картина для данной задачи. Попытаемся вычислить производные этих рядов. Для этого используем результат Теоремы 2:

$$(G_{\nu-\mu}(k))' = \left(r_{\nu} - r_{\mu} - \frac{p_{\mu}}{k-k_0} - \frac{m_{\mu}}{k+k_0} \right) G_{\nu-\mu}(k) +$$

$$\left(\frac{p_{\nu-1}}{k-k_0} + \frac{m_{\nu-1}}{k+k_0} \right) G_{1-\mu}(k) + \left(\frac{p_{\nu-2}}{k-k_0} + \frac{m_{\nu-2}}{k+k_0} \right) G_{2-\mu}(k), \quad (4.9)$$

где величины $p_{\mu-\nu}$ и $m_{\mu-\nu}$ вводятся аналогично $g_{\mu-\nu}$:

$$\begin{aligned} p_{1-1} &= p_1 + p_{121} + p_{12121} + \dots \\ p_{2-2} &= p_2 + p_{212} + p_{21212} + \dots \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} p_{1-2} &= p_{12} + p_{1212} + p_{121212} + \dots \\ p_{2-1} &= p_{21} + p_{2121} + p_{212121} + \dots \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} m_{1-1} &= m_1 + m_{121} + m_{12121} + \dots \\ m_{2-2} &= m_2 + m_{212} + m_{21212} + \dots \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} m_{1-2} &= m_{12} + m_{1212} + m_{121212} + \dots \\ m_{2-1} &= m_{21} + m_{2121} + m_{212121} + \dots \end{aligned} \tag{4.13}$$

В зависимости от значений ν и μ, формула (4.9) имеет четыре "реализации". Эти четыре уравнения разбиваются на две пары (одна из них – уравнения для $(G_{1-1})'$ и $(G_{2-1})'$, каждая из этих пар представляет собой системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Коэффициенты уравнений даются *асимптотическими* рядами (4.10)–(4.13), каждый член в которых может быть вычислен с помощью рекуррентных формул, включающих интегральные представления. В Приложении будут предложены несколько более простые формулы для коэффициентов.

Граничные условия для этих уравнений представляют собой ограничения на поведение функций $G_{\nu-\mu}$ на бесконечности и в особых точках $\pm k_0$.

4.3. Связь с результатами, полученными ранее.

Содержание настоящей статьи тесно связано с работами Вильямса [3] и Шанина [5], также исследующими возможность представить решение дифракционной задачи как линейную комбинацию решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В данном разделе будет предложена интерпретация полученных ранее результатов в терминах, используемых в данной статье. Более того, для неизвестных коэффициентов, входящих в [3] и [5], будут получены выражения в виде асимптотических рядов.

Начнем с работы [3]. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} V(k) = G_{1-2}(k_0)\left(\frac{G_{2-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}} - \frac{G_{2-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}}\right) + \\ + G_{1-1}(k_0)\left(\frac{G_{1-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}} - \frac{G_{1-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}\right), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$W(k) = G_{1-1}(k_0)\left(\frac{G_{2-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}} - \frac{G_{2-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}}\right) + \\ + G_{2-1}(k_0)\left(\frac{G_{1-1}(k)e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}} - \frac{G_{1-2}(k)e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}}\right), \quad (4.15)$$

С точностью до постоянного коэффициента эти функции совпадают с "фундаментальными решениями", введенными Вильямсом. Заметим, что $V(k) = W(-k)$, и построим дифференциальное уравнение для V и W. Используя (4.9), получаем в обозначениях Вильямса

$$V' - ia\cosh\frac{\theta}{2}V + ia\sinh\frac{\theta}{2}W = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma W - V}{k_0+k}. \quad (4.16)$$

Это в точности уравнение из [3]. Константы определяются как

$$\cosh\frac{\theta}{2} = \frac{(G_{2-1}(k_0))^2 + (G_{1-1}(k_0))^2}{(G_{2-1}(k_0))^2 - (G_{1-1}(k_0))^2}, \quad (4.17)$$

$$\Gamma = -2(m_{1-2} + m_{2-1}). \quad (4.18)$$

Рассмотрим теперь результаты работы [5]. Ключевым утверждением этой работы является то, что функции

$$\overline{U}_+(k) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \overline{U}^n_{\dots 1}(k,k_*) \text{ и } \overline{U}_-(k) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \overline{U}_{\dots 2}(k,k_*)$$

представляют собой как функции k решения одного и того же однородного дифференциального уравнения порядка 2 с рациональными коэффициентами.

Пусть это уравнение имеет вид

$$U'' = X(k)U' + Y(k)U, \quad (4.19)$$

где штрих обозначает дифференцирование по k. В этом случае коэффициенты уравнения X и Y выражаются в виде (см. [5]):

$$X = D'/D, \quad Y = E/D, \quad (4.20)$$

где D и E – определители

$$D = \begin{vmatrix} (\overline{U}_+)' & \overline{U}_+ \\ (\overline{U}_-)' & \overline{U}_- \end{vmatrix} \quad E = \begin{vmatrix} (\overline{U}_+)' & (\overline{U}_+)'' \\ (\overline{U}_-)' & (\overline{U}_-)'' \end{vmatrix}. \quad (4.21)$$

Используя технику суммирования дифракционного ряда, $\overline{U}_+$ и $\overline{U}_-$ сводятся к

$$\overline{U}_+(k,k_*) = \frac{e^{ika}}{\sqrt{k_0-k}(k-k_*)}[C_1G_{1-1}+C_2G_{2-1}(k)], \tag{4.22}$$

$$\overline{U}_-(k,k_*) = -\frac{e^{-ika}}{\sqrt{k_0+k}(k-k_*)}[C_2G_{2-2}+C_1G_{1-2}(k)], \tag{4.23}$$

где

$$C_1 = A_1g_{1-1} - A_2g_{2-1}, \quad C_2 = A_1g_{1-2} - A_2g_{2-2}. \tag{4.24}$$

Используя теоремы 1 и 2, можно построить определители D и E в общем случае, однако они получаются достаточно громоздкими. Рассмотрим случай нормального падения $k_* = 0$. В этом случае выкладки несколько упрощаются. Результат есть

$$D = \frac{-2ia(k^2-k_0^2)+k_0(1+4p_{2-2}+2p_{1-2}-2p_{2-1})}{(k_0^2-k^2)^{3/2}k^2} \tag{4.25}$$

$$E = \frac{Q}{4(k_0^2-k^2)^{7/2}k^2}, \tag{4.26}$$

где

$$\begin{gathered} Q = 8ia^3(k^2-k_0^2)^3 - 4a^2k_0(k^2-k_0^2)^2(3+2p_{1-2}+12p_{2-2}-2p_{2-1}) - \\ 2ia(k^2-k_0^2)(k_0^2(9-4(p_{1-2})^2+48(p_{2-2})^2+ \\ p_{2-2}(24-16p_{2-1})-8p_{2-1}-4(p_{2-1})^2+8p_{1-2}(2p_{2-2}+p_{2-1}))+ \\ k^2(-3+4(p_{1-2})^2-4p_{2-1}+4(p_{2-1})^2+4p_{1-2}(-1+2p_{2-1})))+ \\ k_0(1+2p_{1-2}+4p_{2-2}-2p_{2-1})(k_0^2(15-4(p_{1-2})^2+8p_{2-2}+16(p_{2-2})^2-4p_{2-1}- \\ 4(p_{2-1})^2+4p_{1-2}(-1+2p_{2-1}))+k^2(-15+4(p_{1-2})^2+4p_{2-1}+ \\ 4(p_{2-1})^2+4p_{1-2}(1+2p_{2-1})). \end{gathered}$$

(Разумеется, последнее выражение получено с помощью системы компьютерной алгебры.) Вид определителей D и E тот же, что и в [5]. Сравнивая (4.9) с уравнениями, полученными в [5], замечаем, что решение основного уравнения [5] представляется как линейная комбинация решений уравнений того же типа, но более простых. Так, новые уравнения содержат меньше особых точек и на их решения накладывается меньше ограничений. Данный факт может быть интерпретирован в терминах работы [9], однако эта тема требует дальнейшего исследования.

5. Заключение

В настоящей работе получены следующие основные результаты:

– Сформулировано свойство (2.10). Оно используется для упрощения и дифференцирования дифракционного ряда. Это свойство позволяет выразить члены дифракционного ряда, а также их производные, через вспомогательные функции G, не зависящие от угла падения.

– Показано, что коэффициенты g, p и m удовлетворяют неочевидным алгебраическим соотношениям. Наиболее важные из них – (П.23)–(П.26), (П.28)–(П.31), (П.32), (П.45).

– Получено представление (3.21) и дифференциальные уравнения (4.9).

– Проведено сравнение с результатами работ [3] и [5]. Получены асимптотические ряды для неизвестных коэффициентов, встречающихся в этих работах.

Пришло время сказать несколько слов о мотивации данной работы. Первые результаты были получены как развитие идей из [5]. Необходимо было получить выражения для D и E, удобные для проведения численных расчетов. С другой стороны, из результатов [5] не следует представление (3.21), которое значительно упрощает вычисления, а также представляется частным случаем весьма общего теоретического факта.

Необходимо признаться, что задача о дифракции на полосе или щели сама по себе не так уж и интересна. Приятно получить новые результаты, относящиеся к задаче, изучаемой столь продолжительное время и столь интенсивно, однако еще приятнее было бы создать технику, применимую к более широкому кругу задач. Мы надеемся обобщить предложенные здесь методы на случай задач, сводящихся к распространению на многолистных поверхностях в смысле Зоммерфельда (он рассматривал дифракцию на полупрямой как задачу на двулистной поверхности).

В качестве примеров таких задач приведем двумерную задачу о дифракции на системе из нескольких отрезков с идеальными граничными условиями, лежащих на одной прямой, а также дифракцию на уголке, представляющем собой два отрезка, соединяющихся под прямым углом.

В принципе, подход [5] годится для таких задач, однако практические вычисления с помощью этого метода затруднены наличием огромного количества неизвестных парметров и соответствующих ограничений, накладываемых на решения дифференциальных уравнений. Мы надеемся получить для заявленных задач представления вида (3.21) и дифференциальные уравнения, сходные с (4.9).

Приложение. Некоторые свойства коэффициентов g, p, m

Коэффициенты $g^n_{\ldots}, p^n_{\ldots}$ и $m^n_{\ldots}$ были заданы с помощью рекуррентных формул. В эти формулы входили величины $\mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^m_{\ldots}, k_1)$, где k_1 могло быть равным $\pm k_0$ или k_*. Свойства коэффициентов, таким образом, порождаются свойствами $\mathcal{F}$-операторов, а также структурой рекуррентных формул. Здесь мы изучим только свойства, следующие только из структуры рекуррентных формул. При этом величины $\mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^m_{\ldots}, k_1)$ будем заменять произвольным набором чисел.

а) Последовательности типа q и типа h.

Пусть $f^n_{\ldots}$ – произвольный набор чисел (или символов) с характерной для дифракционного ряда индексацией ($f_{21}, f_{212}, f^n_{\ldots 1}$ и т.д.). При этом не будут использоваться символы с $n = 0$, т.е. f_1 и f_2. Рассмотрим рекуррентные соотношения двух видов. Последовательность, удовлетворяющую соотношениям вида

$$q_1 = q_2 = 1, \tag{П.1}$$

$$q^{n+1}_{\nu\ldots\mu} = \sum_{m=0}^{n} q^{n-m}_{\nu\ldots} f^{m+1}_{\ldots\mu} \tag{П.2}$$

назовем последовательностью q-типа, ассоциированной с набором $f^n_{\ldots}$.

Положив, например,

$$f^n_{\nu\ldots} = -G^n_{\nu\ldots}(k_*), \tag{П.3}$$

получим

$$g^n_{\nu\ldots}(k_*) = q^n_{\nu\ldots} \tag{П.4}$$

(см. (3.5)–(3.6)). Помимо этого примера, ниже будут введены вспомогательные q-последовательности, необходимые для вычисления p и m. Они будут ассоциированы с другими наборами f.

Последовательности другого типа (h-последовательности) удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$h_1 = 1/2, \quad h_2 = -1/2, \tag{П.5}$$

$$h^{n+1}_{\nu\dots\mu} = \sum_{m=0}^{n} h^{n-m}_{\nu\dots} f^{m+1}_{\dots\mu} - h_\mu f^{n+1}_{\nu\dots\mu}. \tag{П.6}$$

Коэффициенты p и m, относящиеся к теореме 2, представляют собой последовательности h-типа. Действительно,

$$p^n_{\nu\dots} = -\frac{h^n_{\nu\dots}}{2} \tag{П.7}$$

в том случае, если последовательность $h^n_{\dots}$ ассоциирована с $f^n_{\nu\dots} = \mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^{n-1}_{\nu\dots}, k_0)$;

$$m^n_{\nu\dots} = \frac{h^n_{\nu\dots}}{2}, \tag{П.8}$$

если h-последовательность ассоциирована с $f^n_{\nu\dots} = \mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^{n-1}_{\nu\dots}, -k_0)$.

Рассмотрим пример. Вычислим коэффициенты $q_{12}, q_{121}, q_{1212}$, q_{12121}, следуя соотношениям (П.1)–(П.2):

$$q_{12} = f_{12}, \tag{П.9}$$

$$q_{121} = f_{12}f_{21} + f_{121}, \tag{П.10}$$

$$q_{1212} = f_{12}f_{21}f_{12} + f_{121}f_{12} + f_{12}f_{212} + f_{1212}, \tag{П.11}$$

$$\begin{aligned} q_{12121} = {} & f_{12}f_{21}f_{12}f_{21} + f_{121}f_{12}f_{21} + f_{12}f_{212}f_{21} + f_{1212}f_{21} + \\ & f_{12}f_{21}f_{121} + f_{121}f_{121} + f_{12}f_{2121} + f_{12121} \end{aligned} \tag{П.12}$$

Некоторые из этих выражений могут быть упрощены, однако мы сознательно не делаем этого.

Обратимся к элементам h-последовательности. Следуя правилам (П.5)–(П.6), выпишем выражения для h_{12121} и h_{21212}:

$$\begin{aligned} h_{12121} &= f_{12}f_{21}f_{12}f_{21} + f_{12}f_{212}f_{21} + f_{1212}f_{21} + f_{12}f_{21}f_{121} + f_{12}f_{2121} \\ h_{21212} &= -(f_{21}f_{12}f_{21}f_{12} + f_{21}f_{121}f_{12} + f_{2121}f_{12} + f_{21}f_{12}f_{212} + f_{21}f_{1212}) \end{aligned} \tag{П.13}$$

б) Свойства бесконечных сумм членов q- и h-последовательностей.

Введем величины

$$f_{1-1} = f_{121} + f_{12121} + f_{1212121} + \ldots \tag{П.14}$$

$$f_{1-2} = f_{12} + f_{1212} + f_{121212} + \ldots \tag{П.15}$$

$$f_{2-1} = f_{21} + f_{2121} + f_{212121} + \ldots \tag{П.16}$$

$$f_{2-2} = f_{212} + f_{21212} + f_{2121212} + \ldots \tag{П.17}$$

т.е. сумма $f_{\nu-\mu}$ содержит все слагаемые с цепочками, начинающимися с ν и кончающимися μ. Заметим, что в отличие от (3.11), суммы (П.14) и (П.17) не содержат f_1 и f_2.

Кроме того, введем суммы $q_{\nu-\mu}$ и $h_{\nu-\mu}$ по аналогии с (3.13) и (3.14).

Используя рекуррентные соотношения, легко получить следующие соотношения

$$q_{1-1}f_{1-1} + q_{1-2}f_{2-1} = q_{1-1} - 1, \tag{П.18}$$

$$q_{1-1}f_{1-2} + q_{1-2}f_{2-2} = q_{1-2}, \tag{П.19}$$

$$q_{2-1}f_{1-1} + q_{2-2}f_{2-1} = q_{2-1}, \tag{П.20}$$

$$q_{2-1}f_{1-2} + q_{2-2}f_{2-2} = q_{2-2} - 1. \tag{П.21}$$

Последние соотношения могут быть переписаны в матричной форме и разрешены относительно q:

$$\begin{pmatrix} q_{1-1} & q_{1-2} \\ q_{2-1} & q_{2-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - f_{1-1} & -f_{1-2} \\ -f_{2-1} & 1 - f_{2-2} \end{pmatrix}^{-1}, \tag{П.22}$$

или по компонентам

$$q_{1-1} = \frac{1 - f_{2-2}}{N^*}, \tag{П.23}$$

$$q_{2-1} = \frac{f_{2-1}}{N^*}, \tag{П.24}$$

$$q_{1-2} = \frac{f_{1-2}}{N^*}, \tag{П.25}$$

$$q_{2-2} = \frac{1 - f_{1-1}}{N^*}, \tag{П.26}$$

где N^* – определитель

$$N^* = \begin{vmatrix} 1 - f_{1-1} & -f_{1-2} \\ -f_{2-1} & 1 - f_{2-2} \end{vmatrix}. \tag{П.27}$$

Рассмотрим последовательности q и h, ассоциированные с одним и тем же набором $f^n_{\dots}$.

Легко показать, что

$$h_{2-1} = -f_{2-1} q_{1-1}, \tag{П.28}$$

$$h_{1-2} = f_{1-2} q_{2-2}, \tag{П.29}$$

$$h_{1-1} = f_{1-2} q_{2-1}, \tag{П.30}$$

$$h_{2-2} = -f_{2-1} q_{1-2}, \tag{П.31}$$

Используя (П.28)–(П.31) и (П.23)–(П.26), получим важное тождество

$$h_{1-1} = -h_{2-2} = \frac{f_{1-2} f_{2-1}}{N_*}. \tag{П.32}$$

Принимая во внимание (П.7) и (П.8), заключаем, что

$$p_{1-1} = -p_{2-2}, \quad m_{1-1} = -m_{2-2} \tag{П.33}$$

в) Вычисление определителей N и N^*.

Покажем, что определитель $N(k)$, заданный формулой (3.19), тождественно равен 1. Прежде всего, покажем, что он является константой (не зависит от k).

Заметим, что формула (3.19) определяет N как функцию k_*, но переменная k_* в определении может быть заменена на любой символ, например, на k.

Продифференцируем $N(k)$ по k. Применяя соотношения (4.3), получаем после элементарных преобразований

$$(N(k))' = \left(\frac{p_{1-1} + p_{2-2}}{k - k_0} + \frac{m_{1-1} + m_{2-2}}{k + k_0} \right) (G_{1-1} G_{2-2} - G_{2-1} G_{1-2}). \tag{П.34}$$

Принимая во внимание соотношения (П.33), заключаем, что N' тождественно равно 0, а $N(k)$ – константа.

Для определения этой константы исследуем поведение определителя на бесконечности. Заметим, что при больших действительных k все функции $G^n_{\dots}(k)$ при $n > 0$ стремятся к нулю как $\sim |k|^{-1}$. Следовательно, старший член $N(k)$ есть $G_1 G_2$ и

$$G_{1-1}(k) G_{2-2}(k) - G_{1-2}(k) G_{2-1}(k) \equiv 1. \tag{П.35}$$

Перейдем к вычислению определителя N^*, заданного формулой (П.27) и используемого для вычисления коэффициентов m. В качестве набора величин f выберем $f^m_{v\ldots} = \mathcal{F}_\pm(\beta_\pm G^{m-1}_{v\ldots}, -k_0)$.

В соответствии со свойствами операторов $\mathcal{F}$,

$$f^m_{\ldots 2} = -G^m_{\ldots 2}(-k_0) = -\lim_{\tau\to -k_0} G^m_{\ldots 2}(\tau), \qquad (\text{П}.36)$$

$$f^m_{\ldots 1} = \lim_{\tau\to -k_0}[\beta_-(\tau)G^{m-1}_{\ldots 2}(\tau) - G^m_{\ldots 1}(\tau)]. \qquad (\text{П}.37)$$

Отсюда

$$N^* = \lim_{\tau\to -k_0}[N^*(\tau) + \beta_-(\tau)(G_{2-2}(\tau)G_{1-2}(\tau) - G_{1-2}(\tau)G_{1-2}(\tau))] \equiv 1. \qquad (\text{П}.38)$$

Принимая во внимание формулы (П.23)–(П.26), заключаем, что

$$m_{2-1} = -\frac{f_{2-1}(1 - f_{2-2})}{2}, \qquad (\text{П}.39)$$

$$m_{1-2} = \frac{f_{1-2}(1 - f_{1-1})}{2}, \qquad (\text{П}.40)$$

$$m_{1-1} = \frac{f_{1-2}f_{2-1}}{2}, \qquad (\text{П}.41)$$

$$m_{2-2} = -\frac{f_{1-2}f_{2-1}}{2}. \qquad (\text{П}.42)$$

Свойства коэффициентов p могут быть получены из свойств коэффициентов m из соотношений симметрии:

$$p_{\mu-\nu} = m_{\nu-\mu}. \qquad (\text{П}.43)$$

г) Дополнительные свойства элементов h-последовательностей и конечные комбинации функций G.

Выше было показано, что для сумм элементов любой h-последовательности выполняется тождество $h_{1-1} = -h_{2-2}$. Оказывается, справедливо и более сильное утверждение. Именно, при любом четном n

$$h^n_{1\ldots 1} = -h^n_{2\ldots 2}. \qquad (\text{П}.44)$$

Автору известно доказательство этого факта, оно громоздко и здесь не приводится. Обсудим применение этого свойства.

Тождества (П.33), следующие из (П.32), использовались для доказательства того, что $N(k) \equiv 1$. Определитель $N(k)$ представляет собой бесконечную сумму произведений функций G. Оказывается, что тождество (П.35) может быть разбито на бесконечную последовательность тождеств, содержащих конечные суммы:

$$G_1(k)G_2(k) \equiv 1,$$

$$G_{121}(k)G_2(k) - G_{21}(k)G_{12}(k) + G_1(k)G_{212}(k) \equiv 0,$$

$$G_{12121}(k)G_2(k) - G_{2121}(k)G_{12}(k) + G_{121}(k)G_{212}(k) -$$

$$G_{21}(k)G_{1212}(k) + G_1(k)G_{21212}(k) \equiv 0,$$

т.е., для любого четного $n \neq 0$

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m G^{n-m}_{\dots 1}(k) G^{m}_{\dots 2}(k) \equiv 0. \qquad (\text{П}.45)$$

Доказательство элементарно, однако достаточно громоздко. Оно опирается на тождества (П.44).

Тождества вида (П.45) на первый взгляд кажутся неожиданными, однако существует еще одно доказательство этих тождеств с помощью теоремы Лиувилля (см. [5]).

Литература

1. P. M. Morse and P. J. Rubenstein, *The diffraction of waves by ribbons and by slits.* Phys. Rev., **54** (1938), 895–898.
2. E. Luneburg, *The Sommerfeld problem: methods, generalizations and frustrations.* Modern Mathematical Methods in Diffraction Problems and their Application in Engineering: Proceedings of the Sommerfeld's Workshop, Freudenstadt, 30 Sept. – 4 Oct. 96. (ed. by Meister, E.) Francfurt on Main, 1997.
3. M. H. Williams, *Diffraction by a finite strip.* Quart. J. of Mech. and Appl. Math., **35**, No. 1 (1982), 103–124.
4. G. E. Latta, *The solution of a class of integral equations.* J. Rat. Mech., **5**, No. 5 (1956), 821–834.
5. A. V. Shanin, *An extension of Wiener–Hopf method: Ordinary differential equations associated with diffraction problems.* Proceedings of the international seminar "Day on Diffraction'99", S.Pb., June 1–3, pp. 176–182.
6. K. Schwarzschild, *Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt.* Math. Ann., **55** (1902), 177.
7. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* М., Наука, 1966, 456 с.
8. B. Noble, *Methods based on the Wiener–Hopf technique.* Pergamon Press, 1958.

9. R. V. Craster, *The solution of a class of free boundary problems.* Proc. Roy. Soc. Lond. A, **453** (1997), 607–630.

Shanin A. V. To the problem of diffraction by a strip. Some properties of the Sohwarzschild's sries.

The $2D$ problem of diffraction of a plane wave by a strip with ideal boundary conditions is considered. The solution is constructed in the form of diffraction series, i.e., the series over the successive acts of scattering by the edges of the slit. The technique of exact transformations of the diffraction series is proposed. The embedding formula and the ordinary differential equations for the far-field diagram of the field is obtained.

Московский государственный
университет
shanin@ort.ru

Поступило 20 октября 2000 г.