Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

О. М. Фоменко

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

1. Пусть n – натуральное число, $k \geqslant 4$ – фиксированное натуральное число, $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = X^T AX$ – положительно определенная целочисленная примитивная квадратичная форма от k переменных, A – матрица формы f, $D = \det A$ – детерминант формы f, $r_f(n)$ – количество представлений n квадратичной формой f.

В. А. Тартаковский [1] доказал, что если $k \geqslant 5$ и n представимо родом формы f, то существует положительная постоянная C_f, зависящая только от f и такая, что при $n > C_f$ n представляется самой формой f. Ниже C означает положительное постоянное число, не всегда одно и то же. Ватсон [2] определил явную зависимость C_f от D. Он доказал, что

$$\begin{aligned} C_f &= CD^{5.2}, &\quad \text{если} \quad k = 5;\\ C_f &= CD^{2.67}, &\quad \text{если} \quad k = 6;\\ C_f &= CD, &\quad \text{если} \quad k \geqslant 7. \end{aligned}$$

Недавно в случае $k = 5$ была получена более точная граница (см. [3]):

$$C_f = CD^4.$$

А. В. Малышев [4] доказал при $k \geqslant 4$ асимптотическую формулу

$$r_f(n) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1}\mathfrak{S}_f(n) + O\left(D^{\frac{k}{4}+\frac{3}{2}} n^{\frac{k}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \tag{1}$$

где O-константа зависит от ε (и от k, если брать переменное k, но в данной работе мы предположили, что k – постоянное число),

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00099).

$\mathfrak{S}_f(n)$ – сингулярный ряд. Если сочетать формулу (1) с оценкой снизу сингулярного ряда (см. [4, с. 73]), то можно доказать, что при $k \geqslant 5$ и выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует при $n > C_\varepsilon D^{3(k+2)/(k-3)+\varepsilon}$. При $k = 4$ теорема Тартаковского не всегда верна, поэтому сделаем предположение $(n, 2^5 D) = 1$. Тогда из результатов А. В. Малышева следует, что при выполнении родовых условий асимптотическая формула (1) действует, если $n > C_\varepsilon D^{22+\varepsilon}$. Применяя теорию модулярных форм, автор [5] довел последний результат до $n > C_\varepsilon D^{14+\varepsilon}$. (В работе [5] имеются неточности, которые без труда устраняются.)

Для диагональных форм границу действия асимптотических формул можно уточнить. Ради простоты положим

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = \bigl[a, b, c, d\bigr].$$

Хорошо известно, что при $(n, 2D) = 1$ сингулярный ряд принимает простой вид

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} = \sum_{t|n} \left(\frac{D}{t}\right) t^{-1}, \qquad D = abcd.$$

Имеем

$$\mathfrak{S}_{[a,b,c,d]} \gg \frac{1}{\log\log n}, \quad \text{если} \quad (n, 2D) = 1.$$

Этот факт в сочетании с оценками собственных чисел операторов Гекке, принадлежащих Айхлеру и Делиню, позволяет получить довольно точные результаты. В работе [6] (исправления в [7]) рассматривались простейшие формы

$$F_1 = \bigl[1, p, p, p\bigr],$$
$$F_2 = \bigl[1, 1, p, p\bigr],$$
$$F_3 = \bigl[1, 1, 1, p\bigr],$$

где $p > 2$ – простое число. Были доказаны следующие результаты.

1) Для формы F_1 имеем

$$r_{[1,p,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p^{3/2}} \mathfrak{S}_{[1,p,p,p]}(n) + O_\varepsilon\Bigl(p^\varepsilon\, n^{1/2}\, d(n)\Bigr), \tag{2}$$

$(n, 2p) = 1$; $d(n)$ – количество делителей n.

2) Для формы F_2 имеем

$$r_{[1,1,p,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{p} \mathfrak{S}_{[1,1,p,p]}(n) + O_\varepsilon\left(p^\varepsilon\, n^{1/2}\, d(n)\right), \quad (n, 2p) = 1. \quad (3)$$

3) Для формы F_3 имеем

$$r_{[1,1,1,p]}(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{p}} \mathfrak{S}_{[1,1,1,p]}(n) + O_\varepsilon\left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\, n^{1/2}\, d(n)\right), \quad (n, 2p) = 1. \quad (4)$$

Асимптотические формулы (2), (3) действуют при

$$n \gg_\varepsilon D_i^{1+\varepsilon} \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

где D_i – детерминант F_i, а асимптотическая формула (4) действует при

$$n \gg_\varepsilon D_3^{2+\varepsilon}. \quad (6)$$

Одновременно для каждой из величин $r_{[1,p,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,p,p]}(n)$, $r_{[1,1,1,p]}(n)$ при выполнении соответствующих условий (5), (6) имеет место оценка снизу

$$\gg_\varepsilon \frac{n}{\sqrt{D_i}\, \log\log n} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В настоящей работе доказана асимптотическая формула для $r_f(n)$, где $f = [1, 1, 1, D]$, отличного от (4) вида. Эта формула действует при $n \gg_\varepsilon D^{1+\varepsilon}$, причем граница является неулучшаемой. Для доказательства мы используем метод Е. П. Голубевой [8], основанный на большом решете (по поводу других применений метода Е. П. Голубевой см. [9, 10]). Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $f = f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + Dw^2$, где $D > 1$, $D \neq d^2$; $\sqrt{n}/\sqrt{D} = n^\theta$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Пусть $(n, 2D) = 1$. Тогда*

$$r_f(n) = \pi^2 \frac{n}{\sqrt{D}}\, \mathfrak{S}_f(n) + O\left(\frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}}\right), \quad (7)$$

где $c(\theta) > 0$, ε – сколь угодно малое постоянное положительное число, $O(\cdots) = O_\varepsilon(\cdots)$. Выражение для $c(\theta)$ даётся в конце работы.

Замечание. Как легко видеть, числа $\{n \mid n \leqslant D-1, n \equiv 7 \pmod 8),$ $(n, 2D) = 1\}$ представимы родом формы $[1, 1, 1, D]$, но не представимы самой этой формой. Отсюда следует, что границу действия нашей асимптотической формулы нельзя довести до $n \gg D^\alpha$, где $\alpha < 1$.

2. В этом пункте дается доказательство теоремы. Пусть $E_3 = E_3(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2$, $r_3(n)$ – количество представлений n формой E_3. Имеем

$$r_f(n) = \sum_{-\sqrt{\frac{n}{D}} \leqslant w \leqslant \sqrt{\frac{n}{D}}} r_3\bigl(n - Dw^2\bigr).$$

Будем рассматривать сумму

$$\sum_{0 \leqslant w \leqslant \sqrt{\frac{n}{D}}} r_3\bigl(n - Dw^3\bigr).$$

Введем обозначение для гауссовой суммы:

$$S(E_3, a, q) = \sum_{x,y,z \,(\mathrm{mod}\, q)} e^{\frac{2\pi i a E_3(x,y,z)}{q}}.$$

Известно (см. [11]), что

$$r_3(n) = 2\pi\sqrt{n}\,\mathfrak{S}_3(n),$$

где

$$\mathfrak{S}_3(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} {\sum_{a \,(\mathrm{mod}\, q)}}' S(E_3, a, q) e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3} R(n,q)$$

– сингулярный ряд; ${\sum\limits_{a \,(\mathrm{mod}\, q)}}'$ означает суммирование по приведенной системе вычетов.

Опишем суть метода Е. П. Голубевой [8]. Пусть $0 < A < 1$ – постоянное число,

$$Q(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2,$$

$a_i > 0$ $(i = 1,2,3)$ – целые числа, $D = a_1a_2a_3$. Е. П. Голубева вычислила асимптотику суммы ($2k \geqslant 2$ – четное число)

$$\sum_{\substack{m = n - w^{2k} \\ 0 \leqslant w \leqslant An^{\frac{1}{2k}}}} \sqrt{m}\,\mathfrak{S}_Q(m), \tag{8}$$

где $\mathfrak{S}_Q(m)$ – сингулярный ряд задачи

$$m = Q(x,y,z).$$

Пусть

$$L\left(s, \left(\frac{-m}{\cdot}\right)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{-m}{r}\right) r^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

– L-ряд Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{-m}{\cdot}\right)$. Рассмотрим прямоугольник

$$\sigma \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1, \quad |\operatorname{Im} s| < T \quad \left(\sigma > \frac{1}{2},\ T > 1\right). \tag{9}$$

Пусть $S(Q, a, q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с тернарной формой $Q(x, y, z)$,

$$R(m, q) = \sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(Q, a, q)\, e^{-\frac{2\pi i a m}{q}}.$$

Е. П. Голубева заметила, что при отсутствии у $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d, 2) = 1$, нулей в прямоугольнике (9) сингулярный ряд

$$\mathfrak{S}_Q(m) = \sum_{q=1}^{\infty} R(m, q)/q^3$$

хорошо приближается коротким отрезком

$$\sum_{q \leqslant M} R(m, q)/q^3.$$

Связь $\mathfrak{S}_Q(m)$ с L-рядами задается соотношением ($\operatorname{Re} s > 0$)

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(m, q)}{q^{3+s}} = C(m, s) \sum_{\substack{d^2|m \\ (d,2)=1}} \frac{L\left(1 + s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)}{d^{1+2s}},$$

где $C(m, s)$ – несущественный множитель.

Вклад тех $m = n - w^{2k}$, $0 \leqslant w \leqslant n^{\frac{1}{2k}}$, в (8), для которых $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d, 2) = 1$, возможно, имеют нули в (9), оценивается сверху посредством большого решета (см. плотностные теоремы Монтгомери в [12]). Эти соображения позволяют быстро получить асимптотику суммы (8).

Будем применять результаты Е. П. Голубевой в форме, предложенной В. А. Быковским (см. [9, лемма 3]). Пусть

$$I = \sum_{0 \leqslant w \leqslant \sqrt{\frac{n}{D}}} \sqrt{n - Dw^2}\, \mathfrak{S}_3(n - Dw^2).$$

По [8, 9] имеем

$$I = \sum_{0 \leqslant w \leqslant n^\theta} \sqrt{n - Dw^2} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(n - Dw^2, q)}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \right) + O_\varepsilon(R),$$

где

$$R = n^{1/2+\varepsilon} \left(n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}} M^{-(1-\sigma)} \right), \quad 1/2 < \sigma < 1, \quad M \geqslant 1.$$

Меняем порядок суммирований:

$$I = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \sum_{a (\mathrm{mod}\, q)}{}' S(E_3, a, q) \times$$

$$\times e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} \sum_{0 \leqslant w \leqslant n^\theta} \sqrt{n - Dw^2}\, e^{\frac{2\pi i a D w^2}{q}} + O_\varepsilon(R). \tag{10}$$

Рассмотрим сумму

$$I_1 = \sum_{0 \leqslant w \leqslant n^\theta} \sqrt{n - Dw^2}\, e^{\frac{2\pi i a D w^2}{q}}.$$

Пусть $w = w_2 q + w_1$. Тогда

$$I_1 = \sum_{w_1 (\mathrm{mod}\, q)} \left(\frac{n}{q\sqrt{D}} \int_0^1 \sqrt{1 - X^2}\, dX + O_\varepsilon\left(\frac{n^{1/2+\varepsilon}}{\sqrt{D}}\right) \right) e^{\frac{2\pi i a D w_1^2}{q}}. \tag{11}$$

Очевидно,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - X^2}\, dX = \frac{\pi}{4}.$$

Соединяя (10) и (11), имеем

$$I = \frac{\pi n}{4\sqrt{D}} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{a(\operatorname{mod} q)}{}' S(f,a,q)\, e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} + O_\varepsilon(\mathcal{L}),$$

где $S(f,a,q)$ – гауссова сумма, ассоциированная с формой $f = x^2+y^2+z^2+Dw^2$,

$$\mathcal{L} = n^{1/2+\varepsilon}\left(\frac{M}{\sqrt{D}} + n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}}\, M^{-(1-\sigma)}\right). \qquad (12)$$

Пусть

$$\mathfrak{S}_f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{a(\operatorname{mod} q)}{}' S(f,a,q)\, e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} R_1(n,q)$$

– сингулярный ряд задачи

$$n = [1,1,1,D].$$

Имеем ($c > 0$)

$$I_2 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) R_1(n,q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = c} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}}\right) ds.$$

Известно (см., например, [13, 14]), что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}} = \prod_{p \mid 2nD} X_p(n,s) \cdot L^{-1}(s+2,\chi),$$

где χ – характер $(\operatorname{mod} D)$, $X_p(n,s)$ – всюду голоморфный множитель, выражение для которого даётся в [13, 14]. По теореме о вычетах получаем

$$I_2 = \mathfrak{S}_f(n) + \int\limits_{\operatorname{Re} s = -1+\varepsilon} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n,q)}{q^{4+s}}\right) ds =$$

$$= \mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon\left(n^\varepsilon / M\right),$$

поскольку

$$\prod_{p \mid 2nD} X_p(n,-1+\varepsilon) \ll n^\varepsilon.$$

Имеем теперь

$$I = \frac{\pi n}{4\sqrt{D}}\, \mathfrak{S}_f(n) + O_\varepsilon(\mathcal{L}) + O_\varepsilon\left(\frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{D}\,M}\right).$$

Последний член можно отбросить, поскольку

$$\mathcal{L} \gg_\varepsilon \frac{n^{1+\varepsilon}}{\sqrt{D}\,M}.$$

Остается оптимально выбрать параметры в (12). Приравнивая первый и третий члены суммы в (12), получим

$$M = n^{\frac{1}{2(2-\sigma)}}.$$

Приравнивая далее первый и второй члены, получаем

$$\theta = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)} \cdot \frac{7(16/7-\sigma)}{\sigma}.$$

При $0 < \theta < \frac{1}{2}$ $\sigma = \sigma(\theta)$ изменяется в пределах $c_0 < \sigma(\theta) < 1$, где $c_0 \approx \frac{9}{10}$. Положим

$$c(\theta) = \frac{1-\sigma}{2(2-\sigma)}.$$

Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{n^{1+\varepsilon-c(\theta)}}{\sqrt{D}},$$

и теорема доказана.

Литература

1. W. A. Tartakowsky, *Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, x_2, \dots, x_s)(s \geqslant 4)$ darstellbar sind,* Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук **7** (1929), 111–122, 165–196.
2. G. L. Watson, *Quadratic diophantine equations,* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. **A 253** (1960), 227–254.
3. J. S. Hsia and M. I. Icaza, *Effective version of Tartakowsky's theorem,* Acta Arith. **89**, No. 3 (1999), 235–253.
4. А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **65** (1962), 212 с.
5. О. М. Фоменко, *Оценки внутреннего произведения Петерсона с приложением к теории кватернарных квадратичных форм,* Докл. АН СССР **152**, No. 3 (1963), 559–562.

6. О. М. Фоменко, *Оценки скалярных произведений Петерсона параболических форм и арифметрические приложения,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 158–179.
7. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
8. Е. П. Голубева, *О проблеме Варинга для тернарной квадратичной формы и произвольной четной степени,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 27–37.
9. В. А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение арифметических функций на коротких интервалах,* Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 56–70.
10. О. М. Фоменко, *Распределение целых точек на четырехмерной сфере,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 226–236.
11. P. T. Bateman, *On the representations of a number as the sum of three squares,* Trans. Amer. Math. Soc. **71**, No. 1 (1951), 70–101.
12. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел,* М., 1974.
13. Г. А. Ломадзе, *О числе представлений чисел квадратичными формами с четырьмя переменными,* Труды Тбилисского мат. ин-та **40** (1971), 106–139.
14. Т. В. Вепхвадзе, *К аналитической теории квадратичных форм,* Труды Тбилисского мат. ин-та **72** (1983), 12–31.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.