Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

О. М. Фоменко

О ПОВЕДЕНИИ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ В ЦЕНТРЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

1. В этом пункте рассматривается задача заголовка в аспекте по ступени. Пусть $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$-параболических форм целого веса k и характера $\chi(\operatorname{mod} N)$; при четном k будем обозначать $S_k(\Gamma_0(N),1)=S_k(\Gamma_0(N))$. Пусть $f(z)\in S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)e^{2\pi inz},\quad z\in H=\{z=x+iy:y>0\};$$

$$a_f(n)n^{-\frac{k-1}{2}}=b_f(n);$$

$$L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)n^{-s};$$

$$L_f\left(s+\frac{k-1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_f(n)n^{-s}=\mathcal{H}_f(s).$$

Свойства $L_f(s)$ как функции от s хорошо известны и мы не будем их перечислять.

В настоящем пункте $k\geqslant 2$ – постоянное четное число, $N=p$ – растущее простое число. Пусть $\mathcal{F}$ – базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, состоящий из собственных форм Гекке; если $a_f(1)\neq 0$, то $a_f(1)=1$. Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(N))$. Как показал Делинь, $|b_f(n)|\leqslant d(n)$, $f\in\mathcal{F}_0$; здесь $d(n)$ – количество натуральных делителей n. На пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$ вводится метрика Петерсона $\langle f,g\rangle$; пусть

$$\omega_f=\frac{\Gamma(k-1)a_f(1)}{(4\pi)^{k-1}\langle f,f\rangle}.$$

В работах [1–3] были доказаны следующие соотношения ($N=p$ – растущее простое число):

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)=1+O\Big(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\Big);$$

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log N+c_1+O\Big(N^{-1}\log^4 N\Big).$$

Здесь $c_1=c_1(k)$; как обычно, ε – сколь угодно малое постоянное положительное число. В качестве следствия указанных соотношений в [3, 2] было показано, что

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0:\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0}1\gg\frac{N}{\log^2 N}. \tag{1}$$

В работе [4] оценка (1) была улучшена для веса 2. Пользуясь некоторыми результатами из [4], докажем следующую теорему (отметим, что $\dim S_2(\Gamma_0(N))=\frac{N}{12}+O(1)$).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N=p$ – простое число. Тогда справедливы следующие соотношения*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{N}{12}\zeta(2)+O\Big(N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}\Big); \tag{2}$$

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\zeta^3(2)}{\zeta(4)}\ \frac{N}{12}\log N+O\Big(N\log\log N\Big). \tag{3}$$

Известно, что в случае группы $\Gamma_0(p)$ и веса 2 имеем $\mathcal{F}=\mathcal{F}_0$. Для простоты будем писать

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\ldots=\sum_f\ldots.$$

Введем обозначение

$$\mathrm{Tr}\,(T_n)=\mathrm{Tr}\,\Big(T_n\mid S_k(\Gamma_0(N)\Big)=\sum_f b_f(n)$$

(след оператора Гекке T_n в пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$. Формула для $\mathrm{Tr}\,(T_n)$ была доказана Айхлером [5] и Сельбергом [6]. В случае веса 2 формула следа принимает сравнительно простой вид (см. [7, 4]). Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма (см. [4]).

Лемма 1. *Рассмотрим пространство $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N = p$ – простое число. Пусть $\{a_n\}$ – любая последовательность чисел. Для любого $C > 1$ и любого $B < N^2/4C$ имеем*

$$\sum_{n=B}^{CB} a_n \operatorname{Tr}(T_n) = \frac{N}{12}\sum_{n=B}^{CB}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\delta_{\boxed{n}} + a_{\max} O\Big(B^{7/4}N^{-\frac{1}{2}} + B^{39/32+\varepsilon}\,N^{1/4}\Big),$$

где $a_{\max}$ означает наибольшее значение $|a_n|$ в рассматриваемом промежутке и O-константа зависит лишь от C и ε; $\delta_{\boxed{n}}$ означает 1, если n является квадратом, и 0 в противном случае.

Переходим к доказательству соотношения (2). Рассмотрим функциональное уравнение L-функции $\mathcal{H}_f(s)$:

$$\xi_f\left(\frac{1}{2}+t\right) = \varepsilon_f \xi_f\left(\frac{1}{2}-t\right),$$

где

$$\xi_f\left(\frac{1}{2}+t\right) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^t \Gamma(1+t)\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}+t\right),$$

$\varepsilon_f = \pm 1$. Выразим $\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)$ в виде быстро сходящегося ряда. Интегрируя функцию

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\xi_f(1/2+t)X^t}{t}$$

по прямой $\operatorname{Re} t = 3/4$, сдвигая затем контур до прямой $\operatorname{Re} t = -3/4$ и используя функциональное уравнение, получим

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_f(k)}{k^{1/2}}F_0\left(\frac{2\pi k}{\sqrt{N}\,X}\right) + \varepsilon_f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_f(k)}{k^{1/2}}F_0\left(\frac{2\pi X k}{\sqrt{N}}\right), \qquad (4)$$

где

$$F_0(Y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} t = \frac{3}{4}} \frac{\Gamma(1+t)}{t}Y^{-t}\,dt.$$

Как показано в [4], при $Y > 1$

$$F_0(Y) \leqslant c_0 e^{-cY},$$

где $c > 0$, $c_0 > 0$, и если взять $X = \sqrt{N}\log N/c$, то второй член в (4) будет $\ll N^{-6}$. Легко показать, что при $0 < Y \leqslant c_1$

$$F_0(Y) = 1 + \varphi_0(Y),$$

где $\varphi_0(Y) \ll Y$. Имеем

$$\sum_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr}\,(T_k)}{k^{1/2}} F_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right) + O(1).$$

Бесконечную сумму делим на следующие части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cdots = \sum_{1\leqslant k\leqslant N\log N} \cdots + \sum_{N\log N<k\leqslant N\log^3 N} \cdots + \sum_{k>N\log^3 N}.$$

Последняя сумма оценивается как $O(1)$. В результате имеем

$$\sum_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + O(1),$$

где

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{1\leqslant k\leqslant N\log N} \frac{\mathrm{Tr}\,(T_k)}{k^{1/2}},$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{1\leqslant k\leqslant N\log N} \frac{\mathrm{Tr}\,(T_k)}{k^{1/2}}\, \varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right),$$

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{N\log N<k\leqslant N\log^3 N} \frac{\mathrm{Tr}\,(T_k)}{k^{1/2}} F_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right).$$

Рассмотрим сумму $\sum_1$. Разобъем её на $\ll \log N$ сумм с интервалами суммирования $[B, CB]$. Возьмем каждую из этих сумм $\sum_1(B)$ и применим к ней лемму 1:

$$\sum\nolimits_1(B) = \frac{N}{12}\sum_{k=B}^{CB} \frac{a_k}{\sqrt{k}}\delta_{\boxed{n}} + a_{\max} O\left(B^{7/4}N^{-1/2} + B^{39/32}N^{1/4}\right);$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad a_{\max} \asymp \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Следовательно,

$$\sum\nolimits_1 = \frac{N}{12}\zeta(2) + O\left(N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}\right).$$

Сумму $\sum_2$ разобъем на две:

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{N}} \frac{\operatorname{Tr}(T_k)}{k^{1/2}}\,\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right)+ \\ + \sum_{\sqrt{N}<k\leqslant N\log N} \frac{\operatorname{Tr}(T_k)}{k^{1/2}}\,\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right) = \sum\nolimits_2^{(1)} + \sum\nolimits_2^{(2)}.$$

В сумме $\sum_2^{(1)}$ применим оценку

$$\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right) \ll \frac{1}{\sqrt{N}\,\log N};$$

поэтому по лемме 1 получаем

$$\sum\nolimits_2^{(1)} \ll \frac{N^{1/2}}{\log N}.$$

С помощью леммы 1 и тривиальной оценки

$$\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N\log N}\right) \ll 1$$

получаем

$$\sum\nolimits_2^{(2)} \ll N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}.$$

Аналогично имеем

$$\sum\nolimits_3 \ll N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}.$$

Соотношение (2) доказано.

Переходим к доказательству соотношения (3). Пусть

$$\tau_\nu(n) = |n|^{\nu-1/2}\sigma_{1-2\nu}(n),$$

где

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n,\,d>0} d^a.$$

Легко показать, что

$$\mathcal{H}_f\left(s+\nu-\frac{1}{2}\right)\mathcal{H}_f\left(s-\nu+\frac{1}{2}\right) = \zeta_p(2s)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{b_f(l)\tau_\nu(l)}{l^s}, \tag{5}$$

где

$$\zeta_p(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad p = N.$$

Положим $\nu = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2} + t$. Тогда

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2} + t\right)^2 = \zeta_p(1+2t)\sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_f(l)d(l)}{l^s}.$$

Представим $\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2$ в виде быстро сходящегося ряда. Имеем

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdot 2\sum_{1\leqslant l,n<\infty} \frac{b_f(l)d(l)}{l^{1/2}n} G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right),$$

где

$$G_0(Y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\, t=\frac{3}{4}} \Gamma(1+t)^2\, Y^{-t}\,\frac{dt}{t}.$$

Как показано в [4], при $Y > 1$

$$G_0(Y) \ll e^{-c\sqrt{Y}}, \quad c > 0.$$

Легко показать, что при $0 < Y \leqslant c_1$

$$G_0(Y) = 1 + \varphi_1(Y),$$

где

$$\varphi_1(Y) \ll Y\Big(|\log Y| + 1\Big).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\sum_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdot 2\sum_{1\leqslant l,n<\infty} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n} G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right)\\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdot 2\sum\nolimits_0.\end{aligned}$$

Разобъем сумму $\sum_0$ на следующие подсуммы:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_0 = &\sum_{1\leqslant ln^2\leqslant N} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n}+\\ &+\sum_{1\leqslant ln^2\leqslant N} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n}\,\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right)+\\ &+\sum_{N<ln^2\leqslant N\log^4 N} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n}\,G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right)+\\ &+\sum_{N\log^4 N<ln^2<\infty} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n}\,G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right)=\\ &=\ \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3+O(1).\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму $\sum_1$. Разобъем её на $\ll \log N$ сумм с интервалами суммирования $[B, CB]$. Возьмем каждую из этих сумм и применим к ней лемму 1. Суммируя затем по B, получаем

$$\sum\nolimits_1 = \frac{N}{12}\sum_{l=1}^{N}\frac{a_l}{\sqrt{l}}\,\delta_{\boxed{l}}+O\left(N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}\right),$$

где

$$a_l=\frac{d(l)}{l^{1/2}}\left(\sum_{n=1}^{[\sqrt{N/l}\,]}\frac{1}{n}\right).$$

Имеем

$$\sum\nolimits_1 = \frac{N}{12}\sum_{\substack{l=1\\ l=l_1^2}}^{N}\frac{d(l)}{l}\left(\frac{1}{2}\log N-\frac{1}{2}\log l+O(1)\right)+O\left(N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{N}{12}\log N\sum_{l_1=1}^{[\sqrt{N}\,]}\frac{d(l_1^2)}{l_1^2}+O(N)=\frac{1}{2}\,\frac{\zeta^3(2)}{\zeta(4)}\,\frac{N}{12}\log N+O(N).$$

Сумму $\sum_2$ разобъем на две:

$$\sum\nolimits_2=\sum_{1\leqslant ln^2\leqslant \frac{N}{\log^3 N}}\frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n}\,\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right)+$$

$$+ \sum_{\frac{N}{\log^3 N} < ln^2 \leqslant N} \frac{d(l)\mathrm{Tr}\,(T_l)}{l^{1/2}n} \varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) = \sum\nolimits_2^{(1)} + \sum\nolimits_2^{(2)}.$$

На интервале $\left[1, \frac{N}{\log^3 N}\right]$ справедлива оценка

$$\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) \ll \frac{\log\log N}{\log^3 N},$$

поэтому, применяя лемму 1, имеем

$$\sum\nolimits_2^{(1)} \ll \frac{N}{\log^2 N}.$$

На интервале $\left[\frac{N}{\log^3 N}, N\right]$ берем оценку

$$\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) \ll 1$$

и применяем к $\sum_2^{(2)}$ лемму 1. В результате получаем

$$\sum\nolimits_2^{(2)} \ll N \sum_{\substack{l=1\\ l=l_1^2}} \frac{d(l)}{l} \sum_{\sqrt{N/(l\log^3 N)} \leqslant n \leqslant \sqrt{N/l}} \frac{1}{n} + O\Big(N^{\frac{31}{32}+\varepsilon}\Big) \ll N\log\log N.$$

Аналогично имеем

$$\sum\nolimits_3 \ll N\log\log N.$$

Соотношение (3), а с ним и теорема 1, доказаны.

2. В настоящем пункте изучается задача заголовка в аспекте по весу. Рассматривается пространство параболических форм $S_k(\Gamma)$, где $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ и $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ – растущий вес. Пусть $\mathcal{F}$ – базис пространства $S_k(\Gamma)$, состоящий из собственных форм Гекке. Можно считать, что $a_f(1) = 1$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

В теореме 2 работы [2] был получен аналог по весу соотношения (1). К сожалению, при доказательстве этой теоремы была допущена ошибка (в доказательстве предложения 2 из [2] неверна оценка величины S_2). В настоящей работе мы получаем слегка ослабленную версию теоремы 2 из [2].

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ – базис пространства $S_k(\Gamma)$, состоящий из собственных форм Гекке. Тогда при $k = 4k_1$ имеем*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}:\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0} 1 \gg \frac{k}{\log^6 k}.$$

Доказательство начнем с формулировки некоторых результатов. В [8, 9] было получено следующее соотношение

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\log k + c + O\Big(k^{-1/2}\log k\Big), \tag{6}$$

где c – некоторая абсолютная константа. В [10] был доказан результат

$$\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2 = \zeta(2) + O\big(k^{-1}\log k\big). \tag{7}$$

Доказательства (6) и (7) опирались на пуассоновскую формулу суммирования, связанную с рядом Эйзенштейна–Маасса (см. [8, теорема 2.3]).

Сходным образом докажем еще одно соотношение:

$$\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1)\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + O\big(k^{-1}\big). \tag{8}$$

Для этого напишем аналог соотношения (5) для случая группы Γ:

$$\mathcal{H}_f\left(s+\nu-\frac{1}{2}\right)\mathcal{H}_f\left(s-\nu+\frac{1}{2}\right) = \zeta(2s)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{b_f(l)\tau_\nu(l)}{l^s}. \tag{9}$$

По известной формуле Петерсона, имеем

$$\sum_f \omega_f b_f(n) b_f(m) = \delta_{nm} + 2\pi\sum_{c\geqslant 1}\frac{1}{c}S(n,m;c)J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \tag{10}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $S(n,m;c)$ – сумма Клостермана, $J_{k-1}(x)$ – функция Бесселя порядка $k-1$.

Положим

$$Z_k(s,\nu) = \frac{1}{2\pi}\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f\left(s+\nu-\frac{1}{2}\right)\mathcal{H}_f\left(s-\nu+\frac{1}{2}\right).$$

Из (9), (10) следует, что

$$Z_k(s,\nu) = \frac{\zeta(2s)}{2\pi} + \zeta(2s) \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_\nu(n)}{n^s} \sum_{c\geqslant 1} \frac{1}{c} S(n,1;c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c}\right). \quad (11)$$

Формула (11) принадлежит Н. В. Кузнецову (см. [8, формула (84)]). Считаем, что в (11) $\operatorname{Re} s \gg 1$ (с условием сходимости ряда). Отметим, что в теореме 2.3 работы [8] в формуле Пуассона, ассоциированной с рядом Эйзенштейна–Маасса, берется ν с условием $\operatorname{Re}\nu = \frac{1}{2}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. Мы будем использовать вариант этой формулы с условием $\frac{1}{4} < \nu < \frac{3}{4}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. В качестве функции $\varphi(x)$, фигурирующей в формуле Пуассона, возьмем $\varphi(x) = x^{-2s} J_{k-1}(x)$. В результате применения формулы Пуассона к правой части соотношения (11) получаем выражение для $Z(s,\nu)$ со специальными функциями (ср. [10]), в котором предполагается, что $\operatorname{Re} s \gg 1$ и $\frac{1}{4} < \nu < \frac{3}{4}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. Но в этом выражении уже можно положить $s = 3/4$ и $\nu = 3/4$. Тем самым, мы приходим к асимптотической формуле для $Z(3/4, 3/4)$ при $k \to \infty$ и, следовательно, к (8).

По неравенству Коши, имеем

$$\left(\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1) \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{f:\mathcal{H}_f(1/2)\neq 0} \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2 \right) \left(\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \right). \quad (12)$$

Применяя к (12) соотношения (6) и (8), получаем

$$\frac{1}{\log k} \ll \sum_{f:\mathcal{H}_f(1/2)\neq 0} \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2. \quad (13)$$

Известно, что

$$\omega_f \ll \frac{\log k}{k} \quad (f \in \mathcal{F}). \quad (14)$$

Неравенство (14) является следствием отсутствия зигелевского нуля у симметрического квадрата $L_f^{(f,f)}(s)$ L-функции Гекке $L_f(s)$ (см. [11]).

Оценим сверху $\mathcal{H}_f(1)$. По Ютиле [12],

$$\mathcal{H}_f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_f(n)\, e^{-n/U} n^{-1} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = -\beta} \mathcal{H}_f(-s)\Psi(s+1)\Gamma(s)U^s\, ds, \quad (15)$$

где

$$\Psi(s) = (2\pi)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + s\right)},$$

$\beta = 1 - \varepsilon$, $U \geqslant 1$. Выбираем $U = k^6$. Тогда

$$\int\limits_{\operatorname{Re} s = -\beta} \mathcal{H}_f(-s)\Psi(s+1)\Gamma(s)U^s\, ds = O(1). \quad (16)$$

В силу оценки Делиня

$$|b_f(n)| \leqslant d(n),$$

имеем

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{b_f(n)}{n} \ll \log^2 x. \quad (17)$$

Соотношения (15), (16) и (17) дают

$$\mathcal{H}_f(1) \ll \log^2 k, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (18)$$

Наконец, из соотношений (13), (14) и (18) получаем доказательство теоремы 2.

Литература

1. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
2. О. М. Фоменко, *Необращение в нуль автоморфных L-функций в центре критической полосы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 193–204.
3. W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level,* Invent. Math. **119**, No. 1 (1995), 165–174.
4. J. M. Vanderkam, *The rank of quotients of $J_0(N)$,* Duke Math. J. **97**, No. 3 (1999), 545–577.
5. M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulfunktionen,* Acta Arithm **4**, No. 3 (1958), 217–239.

6. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous group in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series,* J. Indian Math. Soc. **20**, No. 1–3 (1956), 47–87; русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей **1**, No. 4 (1957), 3–28.
7. A. Brumer, *"The rank of $J_0(N)$",* in Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). Asterisque **228**, Soc. Math. France, Montrouge, 1995, 41–68.
8. Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна–Маасса,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **129** (1983), 43–84.
9. Р. Ф. Файзиев, *Оценка в среднем в аддитивной проблеме делителей,* В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Теория чисел и ее приложения" (17–19 сентября 1985 г., г. Тбилиси), Тбилиси, 1985, 273–276.
10. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Поведение L-функций параболических форм в точке $s = 1$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 37–54.
11. D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, *An effective zero free region,* appendix to: D. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero,* Ann. Math. **140** (1994), 161–181.
12. M. Jutila, *On the mean value of $L(1/2, \chi)$ for real characters,* Analysis **1**, No. 2 (1981), 149–161.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.