Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 276, 2001 г.

А. В. Хорошева

ЧИСЛО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ p-ОДНОМЕРНЫХ ФОРМ РОДОМ

Введение

Пусть $F = [Q]$ – род целочисленных положительно определенных квадратичных форм размерности n определителя $d = |Q|$; A – квадратичная форма размерности $m < n$ определителя $|A|$. Форма A представляется родом F, если хотя бы для одной формы $Q \in F$ матричное уравнение

$$Q[X] = {}^tXQX = A, \qquad (1)$$

имеет целое решение. Исследуется задача о нахождении количества примитивных представлений формы A родом F. Представление называется примитивным, если наибольший общий делитель его миноров порядка m равен 1. Вес примитивных представлений $pn(A;F)$ определяется формулой

$$pn(A;F) = \sum_{i=1}^{h} \frac{pr(A;Q_i)}{o(Q_i)},$$

где суммирование ведется по всем классам эквивалентности Q_i рода F; $pr(A;Q_i)$ – число примитивных представлений формы A формой Q_i; $o(Q_i)$ – порядок группы автоморфизмов Q_i. В [1] была получена общая формула Гаусса–Минковского для веса примитивных представлений квадратичных форм

$$pn(A;F) = c(n-m)\mathrm{std}(n-m,|G|) \prod_{p|2ad} \alpha_p(A;Q), \qquad (2)$$

где $c(n-m)$ – множитель, зависящий только от разности размерностей $n-m$; $\mathrm{std}(n-m,|G|)$ – стандартная масса, равная произведению ζ-функции Римана и L-функции Дирихле; $\alpha_p(A;Q)$ – локальные множители, зависящие только от p-адических инвариантов формы A и рода F.

Если A – тернарная форма уровня a, F – одноклассный род, содержащий форму шестимерной решетки корней Госсета E_6, то формула (2) для числа примитивных решений X (1) принимает вид [1]

$$pr(A;E_6) = 1440\left(3-\left(\frac{a_3}{3}\right)\right)\prod_{p|a}\left(p+\varepsilon_1(A)\left(\frac{3}{p}\right)\right), \qquad (3)$$

где a – бесквадратное число, не делящееся на 3. Определитель d формы E_6 равен 3, и в формуле (3) предполагается отсутствие общих делителей для d и a. Если у d и a появляются общие делители, то нахождение числа представлений усложняется. В этом случае в формуле (2) выделяются ветвящиеся множители $\alpha_p(A;Q)$ для p, делящих одновременно a и d. В их вычислении состоит основная трудность.

В [2] был предложен один из способов нахождения ветвящихся множителей $\alpha_p(A;Q)$, который заключается в прямом вычислении $\alpha_p(A;Q)$ для p, делящих одновременно a и d, из формулы (2) для конкретной формы Q. Все остальные множители из (2) явно вычислены в [1], а $pn(A;Q)$ можно вычислить как взвешенное число решений уравнений (1) для всех $Q_i \in [Q]$. В [3] были найдены формулы для количества представлений чисел конкретными формами в случае ветвления. Во всех этих работах формы A и Q имеют жордановы разложения над $\mathbb{Z}_p$

$$Q \sim Q_1 \oplus pQ_p, \qquad A \sim A_1 \oplus pA_p$$

с одномерными блоками Q_p и A_p. Для этого случая число примитивных представлений равно (2.21)

$$pr(A;E_6) = 1440\left(9+\left(\frac{a_3}{3}\right)\right)\prod_{p|a}\left(p+\varepsilon_1(A)\left(\frac{3}{p}\right)\right), \qquad (4)$$

где a – бесквадратное число, делящееся на 3.

В данной статье исследуются формы Q и A с разложением над $\mathbb{Z}_p$

$$Q \sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s}, \qquad A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu} \qquad (5)$$

с одномерными блоками Q_{p^s}, A_{p^ν} и $\nu = 1,2,3$, $p \neq 2$, причем разность размерностей $n-m$ нечетна. Все основные результаты представлены в теореме 1. Так, для E_6 и тернарной формы A ступени $a = 3^\nu a_3$, $3 \nmid a_3$, из теоремы 1 получаем формулу

$$pr(A; E_6) = 1440 \cdot 3(9-1) \prod_{\substack{p^s \| a \\ s \geqslant 2}} p^{s-1} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p} \right) \right), \tag{6}$$

если $\nu = 2$, $p \neq 2, 3$; и формулу

$$pr(A; E_6) = 1440 \cdot 9(9-1) \prod_{\substack{p^s \| a \\ s \geqslant 2}} p^{s-1} \left(p + \varepsilon_1(A) \left(\frac{3}{p} \right) \right), \tag{7}$$

если $\nu = 3$.

В формулах (4), (6–7) a и d имеют общий простой делитель $p = 3$. Особенности этого случая проясняются, если от кольца $\mathbb{Z}$ перейти к кольцу целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ и рассмотреть примитивные представления

$$Q[X] = A, \qquad X \in M_{n,m}(\mathbb{Z}_p) \tag{8}$$

над локальным кольцом $\mathbb{Z}_p$. Если p не делит a и d одновременно, то решения X уравнения (8) образуют одну орбиту $\{X\}$. Если же p делит оба числа a и d, то имеет место явление ветвления и множественности орбит. С орбитами $\{X_i\}$ связываются неэквивалентные формы G_i размерности $n - m$ определителя

$$|G| = a^{n-m}|Q|/|A|,$$

и такая связь лежит в основе метода Гаусса, с помощью которого он получил формулу для суммы трех квадратов. Формулы (3–4), (6–7) отличаются локальными множителями

$$\alpha_3(A; E_6) = 3 - \left(\frac{a_3}{3} \right), \qquad \alpha_3(A; E_6) = 9 + \left(\frac{a_3}{3} \right),$$

$$\alpha_3(A; E_6) = 3(9-1), \qquad \alpha_3(A; E_6) = 9(9-1).$$

Множители $\alpha_p(A; Q)$ для простых p, делящих a и d, имеют сложную структуру и их вычисление представляет основную трудность. Для форм A и Q (5) существование ветвления проявляется в том, что $\alpha_p(A; Q)$ распадается в сумму

$$\alpha_p(A; Q) = \sum_{G_i} \alpha_p(A; Q, G_i).$$

Вычислить множители $\alpha_p(A;Q,G_i)$ значительно проще (§2), так как вычисление сводится к нахождению $c_p(A;Q,G_i)$ – числа решений $C \bmod A$ матричного сравнения

$$aA^{-1}[C] + G_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ a\ Z_p), \tag{9}$$

где a – ступень формы A.

В основе доказательства теоремы 1 лежит классификация минимальных неразложимых представлений над $\mathbb{Z}_p$. Для $\nu = 1$ возможны всего два минимальных представления – одномерное и двумерное (1.2). При $\nu = 2$ появляется уже 7 видов минимальных представлений (1.3)–(1.5) размерностей один, два и три. Для $\nu = 3$ имеется 13 видов минимальных представлений (1.6)–(1.9), добавляются четырехмерные формы. Таким образом, найдя все виды форм G_i и число решений сравнений (9), можно вычислить соответствующий локальный множитель $\alpha_p(A;Q)$.

Для построения родов $F = [Q]$ с нужными характеристиками применяется метод ортогонального дополнения (§3). С его помощью получен двуклассный род $F_1 = \{Q_1, Q_2\}$, состоящий из неэквивалентных форм

$$Q_1 = 1_4 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

с инвариантами $n = 6$, $d = 9$, $3_{F_1} = 1^{-5}9^{-1}$, $2_{F_1} = 1^{+6}_{\mathrm{I},0}$. Вес примитивных представлений одномерной формы $A = a$ родом F_1 вычисляется по формуле

$$pn(A, F_1) = 2^{-8}3^{-2}\alpha_2(A;Q)\alpha_3(A;Q) \prod_{\substack{p^s || a \\ p \neq 2,3}} p^{2(s-1)} \left(p^2 - \left(\frac{-1}{p}\right)\right)$$

с локальными множителями

$\alpha_3(A;Q) = \left(3^4 - \left(\frac{a_3}{3}\right)\right)/2$, если $3 \nmid a$;

$\alpha_3(A;Q) = 3^2(3^4-1)/2 = 360$, если $3 \,||\, a$;

$\alpha_3(A;Q) = 6480 + 9\left(9 + \left(\frac{a_3}{3}\right)\right)$, если $3^2 \,||\, a$, $\varepsilon_9(A) = +1$;

$\alpha_3(A;Q) = 3^4(3^4-1)/2 + 3^4 = 3321$, если $3^2 \,||\, a$, $\varepsilon_9(A) = -1$;

$\alpha_3(A;Q) = 3^6(3^4-1)/2 + (3^2-1) = 29168$, если $3^3 \,||\, a$.

Для тернарной формы $A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}$, где $\nu = 0, 1, 2, 3$; $p = 3$, вес примитивных представлений родом F_1 по теореме 1 равен

$$pn(A; F_1) = \frac{1}{6}\alpha_2(A;Q)\alpha_3(A;Q)\prod_{p^s || a} p^{s-1}(p + \varepsilon_1(A)),$$

где $p \neq 2, 3$, и при $3 \nmid a$ локальный множитель $\alpha_3(A;Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_3(A;Q) = \left(9 - \left(\frac{a_3}{3}\right)\right)/2.$$

При появлении общих делителей, когда уровень a равен $a = 3^\nu a_3$, получаем следующие множители ветвления:
при $\nu = 1$

$$\alpha_3(A;Q) = 3(9-1)/2 = 12;$$

при $\nu = 2$

$$\alpha_3(A;Q) = 9(9-1)/2 + 9 = 45, \text{ если } \varepsilon_9(A) = -1;$$
$$\alpha_3(A;Q) = 45 - 3\cdot\varepsilon_1(A)\left(\frac{a_3}{3}\right), \text{ если } \varepsilon_9(A) = +1;$$

при $\nu = 3$

$$\alpha_3(A;Q) = 3^3(9-1)/2 + (3 + \varepsilon_1(A)) = 111 + \varepsilon_1(A).$$

Локальный множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_2(A;Q) = (4 + \varepsilon_2)/8,$$

где $\varepsilon_2 = \left(\frac{a_2 \cdot t(A)}{2}\right)$, если a – четное. Если a – нечетное, то

$$\alpha_2(A;Q) = (1 \pm 2^{-1})/4 \text{ при oct} \equiv \pm 1 \quad \text{или } \pm 3 (\mathrm{mod}\ 8),$$

где oct $\equiv -t(A) (\mathrm{mod}\ 8)$, если $\left(\frac{a_2}{2}\right) = +1$; oct $\equiv 4 - t(A) (\mathrm{mod}\ 8)$, если $\left(\frac{a_2}{2}\right) = -1$. Здесь $t(A)$ – странность формы A [4].

§1. Минимальные представления

1.1. Исследуем вес примитивных представлений для форм A, имеющих жорданово разложение над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$

$$A \sim_p A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu},\ \nu = 1, 2, 3$$

для всех простых $p > 2$, делящих одновременно a и d, причем размерность блока A_{p^ν} равна 1. Условие примитивности представлений равносильно существованию матрицы $Q_G^A(C)$, эквивалентной исходной матрице Q,

$$Q_G^A(C) = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & Q' \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $Q' = a^{-1}(E[C]+G)$, a – уровень формы A, то есть наименьшее положительное целое число, для которого матрица $E = aA^{-1}$ будет целочисленной, G – целая симметрическая матрица размерности $k = n - m$. Если в разложении (1.1) сцепляющую матрицу выбрать в виде $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ C_p \end{smallmatrix}\right)$ с блоком C_p высоты $\dim A_{p^\nu}$, то выполняется соотношение

$$pn(A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}; Q) = pn(p^\nu A_{p^\nu}; Q \ominus A_1),$$

где форма $X = Q \ominus A_1$ – любая форма из разложения $Q = A_1 \oplus X$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что форма $A = p^\nu A_{p^\nu}$ одномерна.

1.2. В [5] были получены все возможные сцепляющие матрицы C и минимальные представления для $\nu = 1, 2, 3$.

Пусть форма G имеет жорданово разложение над $\mathbb{Z}_p$ $G \sim \overset{\oplus}{\alpha} G_\alpha$ с блоками G_α, $\dim G_\alpha = k_\alpha$. Разобьем сцепляющие векторы C соответственно на блоки C_α длины k_α. Пусть $C = (C_0|...|C_\alpha|...)$ и $G = G(C) \oplus G_{\mathrm{res}}$, где $G(C)$ – прямая сумма всех блоков G_α, для которых $C_\alpha \not\equiv 0 (\bmod p^\nu)$. Тогда форма (1.1) распадается в прямую сумму

$$Q_G^A(C) \sim Q(C) \oplus \frac{1}{a} G_{res}, \text{ где } Q(C) = \begin{pmatrix} A & C_{\not\equiv 0} \\ {}^tC_{\not\equiv 0} & Q'(C) \end{pmatrix}.$$

Так, для $A = pA_p$, выбирая $C = (0|...|0)$ и $C = (C_{0,\mathrm{fix}}|0...)$, получаем формы $Q(C) = A$ и $Q(C) = 1_2^-$, где $1_2^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому представления формы A формой Q распадаются на суммы минимальных представлений и число орбит $\{X\}$ решений уравнения (1) равно взвешенному числу разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес:

$$\begin{aligned} pX_1 &= pA_p, \quad \omega_1 = 1, \\ X_{20} &= 1_2^-, \quad \omega_{20} = 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

"Взвешенное" число означает, что каждое разложение засчитывается соответствующее ω число раз.

Если $A = p^2 A_{p^2}$, то добавляются сцепляющие матрицы C вида

$$C_{\text{fix}} = pC'_{\text{fix}} = (0|...|pC'_\alpha|0...)$$

с блоком $C'_\alpha = (10...0)$ и $\alpha \geqslant 2$. Отсюда, уравнение (1) имеет число орбит $\{X\}$, равное взвешенному числу разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес.

1. Одномерные формы

$$p^2 X_1 = p^2 A_{p^2},\ \omega_1 = 1. \tag{1.3}$$

2. Двумерные формы

$$\begin{aligned} &X_{20} = 1_2^-,\ pX_{20} = p1_2^-,\ \omega_{20} = 1;\\ &X_{22}^\eta = 1^{\eta_1} \oplus p^2 \cdot 1^{\eta_2},\ \omega_{22}^\eta = (\eta);\\ &X_{2\alpha} = A_{p^2} \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm \text{ для } \alpha > 2,\ \omega_{2\alpha} = (p-1)/2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

3. Трехмерные формы

$$\begin{aligned} &X_{32} = 1_2^- \oplus p^2 A_{p^2},\ \omega_{32} = 1;\\ &X_{3\alpha} = A_{p^2} \oplus p^\alpha \cdot 1_2^- \text{ для } \alpha \geqslant 2,\ \omega_{3\alpha} = 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь

$$(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(p - 2 - 3\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right), & \text{если } \eta_1 = \eta_2 = \left(\dfrac{-a_p E}{p}\right),\\ \dfrac{1}{4}\left(p - 2 + \left(\dfrac{-1}{p}\right)\right) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\eta_1 = \left(\dfrac{a_p(E+c)}{p}\right)$, $\eta_2 = \left(\dfrac{a_p(E^{-1}+c^{-1})}{p}\right)$. И в этом случае по теореме Витта [6] о продолжении изометрии двух подпространств до изометрии содержащих их невырожденных пространств, можно считать, что α-блок матрицы G равен

$G_{p^\alpha} = \begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & c^\perp(G_{p^\alpha}) \end{pmatrix}$ с $c = c_\alpha^{-1}$, если $G_{p^\alpha}^{-1}[C'_\alpha] = c_\alpha \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$,

или

$G_{p^\alpha} = \begin{pmatrix} J_2 & 0\\ 0 & J_2^\perp(G_{p^\alpha}) \end{pmatrix}$ с $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, если $c_\alpha \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Для $A = p^3A_{p^3}$, помимо векторов вида 1 и 2

$$(C_{0,\mathrm{fix}}|0...) \text{ и } (0|...|0),\ (0|...|p^2C'_\alpha|0...) \text{ с } \alpha \geqslant 3$$

в случае формы $G \sim \bigoplus_{\alpha\geqslant 2} p^\alpha G_{p^\alpha}$, где $k_0 = k_1 = 0$, $k_2 = 1$ и $G_{p^2} \sim -E$, появляются еще векторы третьего вида

$$(C_2|0...) \text{ с } C_2 = p(C'_2 + pC''_2),\ C''_2 \mathrm{mod}\ p$$

и

$$(C_2|...|p^2C'_\alpha|0...) \text{ с } C'_\alpha = (10...0) \text{ и } \alpha \geqslant 4.$$

Число орбит $\{X\}$ решений уравнения (1) в данном случае совпадает со взвешенным числом разложений $Q \sim X \oplus Y$, где формы X имеют следующие вид и вес.

1. Одномерные формы

$$p^3X_1 = p^3A_{p^3},\ \omega_1 = 1. \tag{1.6}$$

2. Двумерные формы

$$\begin{aligned}
&X_{20} = 1_2^-,\ pX_{20},\ p^2X_{20},\ \omega_{20} = 1;\\
&X_{22}^1 = \pm 1 \oplus p^2(\mp 1),\ \omega_{22}^1 = (p-1);\\
&pX_{22}^\eta = p(1^{\eta_1} \oplus p^2 \cdot 1^{\eta_2}),\ \omega_{22}^\eta = (\eta);\\
&X_{23} = 1^\pm \oplus p^3A_{p^3},\ \omega_{23} = (p-1)/2;\\
&pX_{2\alpha} = p(A_{p^3} \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm) \text{ для } \alpha \geqslant 3,\ \omega_{2\alpha} = (p-1)/2.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

3. Трехмерные формы

$$\begin{aligned}
&pX_{32} = p(1_2^- \oplus p^2A_{p^3}),\ \omega_{32} = 1;\\
&X_{33} = 1_2^- \oplus p^3A_{p^3},\ \omega_{33} = 1;\\
&pX_{3\alpha}^1 = p(A_{p^3} \oplus p^\alpha \cdot 1_2^-) \text{ для } \alpha \geqslant 2,\ \omega_{3\alpha} = 1;\\
&X_{3\alpha} = 1_2^- \oplus p^\alpha \cdot 1^\pm \text{ для } \alpha \geqslant 3,\ \omega_{3\alpha} = (p-1)/2.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

4. Четырехмерные формы

$$X_{4\alpha} = 1_2^- \oplus p^\alpha \cdot 1_2^- \text{ для } \alpha \geqslant 2,\ \omega_{4\alpha} = 1. \tag{1.9}$$

По виду матриц $Q_G^A(C) \sim Q$ можно судить о количестве возможных минимальных представлений. Для $A = p^2A_{p^2}$ все 7 видов представлений допускает форма $Q \sim Q_1 \oplus pQ_p \oplus p^2Q_{p^2} \oplus p^\alpha Q_{p^\alpha}$, где $\dim Q_{p^\alpha} \geqslant 2$, $\alpha \geqslant 3$.

§2. Локальные множители

2.1. Здесь рассмотрим такие формы A и формы Q рода F, которые для нечетного простого p, делящего одновременно a и d, над кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$ имеют жордановы разложения

$$\begin{aligned} &A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu},\ \dim A = m;\ \dim A_1 = m-1;\ \nu = 1,2,3. \\ &Q \sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s},\ \dim Q = n;\ \dim Q_1 = n-1;\ s = 1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для таких форм A и Q найдем локальные множители $\alpha_p(A;Q)$ по формуле [1]

$$\alpha_p(A;Q) = \sum_{\{G\}} c_p(A;Q,G)m_p(G)/\mathrm{std}_p(G), \tag{2.2}$$

где $c_p(A;Q,G)$ – число орбит матриц сцепки C над кольцом $\mathbb{Z}_p$, $m_p(G)$ – p-масса рода $[G]$, $\mathrm{std}_p(G)$ – стандартная p-масса рода $[G]$. Число орбит матриц сцепки находится по формуле (см. [5])

$$c_p(A;Q,G) = p^{k_{<\alpha}} \frac{o(G_{p^\alpha}/\mathrm{mod}\ p)}{o(c^\perp(G_{p^\alpha}/\mathrm{mod}\ p))} \tag{2.3}$$

для $c_\alpha \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, (1.4), (1.7) (эта величина удваивается для (1.8)), и по формуле

$$c_p(A;Q,G) = p^{k_{<\alpha}} \frac{o(G_{p^\alpha}/\mathrm{mod}\ p)}{p^{k_\alpha - 2} o(J_2^\perp(G_{p^\alpha}/\mathrm{mod}\ p))} \tag{2.4}$$

для $c_\alpha \equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$, (1.5), (1.8) (эта величина удваивается для (1.9)). Здесь $k_{<\alpha} = k_2 + \ldots + k_{\alpha-1}$, а формулы порядков ортогональных групп известны (см. [1]).

2.2. Найдем определитель формы G,

$$|G| = p^{\nu n' + s},$$

и построим все возможные формы G:

$$\begin{aligned} &G^{\mathrm{I}} \sim G_0^{\mathrm{I}} \oplus p^\nu G_{p^\nu}^{\mathrm{I}} \oplus p^{s+\nu} G_{p^{s+\nu}}^{\mathrm{I}};\ k_0 = 1,\ k_\nu = n'-1,\ k_{s+\nu} = 1; \\ &G^{\mathrm{II}} \sim p^\nu G_{p^\nu}^{\mathrm{II}};\ k_\nu = n'+1,\ s = \nu = 1,2,3; \\ &G^{\mathrm{III}} \sim p^2 G_{p^2}^{\mathrm{III}} \oplus p^s G_{p^s}^{\mathrm{III}};\ k_2 = n',\ k_s = 1;\ s > 3,\ \nu = 2; \\ &G^{\mathrm{IV}} \sim p^2 G_{p^2}^{\mathrm{IV}} \oplus p^3 G_{p^3}^{\mathrm{IV}};\ k_2 = 1,\ k_3 = n',\ s = 2,\ \nu = 3; \\ &G^{\mathrm{V}} \sim p^2 G_{p^2}^{\mathrm{V}} \oplus p^3 G_{p^3}^{\mathrm{V}} \oplus p^{s+1} G_{p^{s+1}}^{\mathrm{V}};\ k_2 = k_4 = 1,\ k_3 = n'-1,\ s \geqslant 3,\ \nu = 3. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3. Построим формы расширения $Q_G^A(C)$ (1.1) для различных случаев.

При $C=(C_{0,\mathrm{fix}}\ 0...0)$, $\nu=1,2,3$; $s\geqslant 1$

$$Q^A_{G^{\mathrm{I}}}(C)\sim 1_2^-\oplus G^{\mathrm{I}}_{p^\nu}\oplus p^s G^{\mathrm{I}}_{p^{s+\nu}}. \tag{2.6}$$

При $C_1=(0...0)$, $\nu=s=1,2,3$

$$Q^A_{G^{\mathrm{II}}}(C_1)\sim A\oplus G^{\mathrm{II}}_{p^\nu}. \tag{2.7}$$

При $C_2=(p\ 0...0)$, $\nu=s=2$; $c_\alpha\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

$$Q^A_{G^{\mathrm{II}}}(C_2)\sim 1^{\eta_1}\oplus p^2\cdot 1^{\eta_2}\oplus a_p\cdot c^{\perp}(G^{\mathrm{II}}_{p^2}). \tag{2.8}$$

При $C_3=(p^2\ 0...0)$, $\nu=s=3$; $c_\alpha\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

$$Q^A_{G^{\mathrm{II}}}(C_3)\sim A\oplus 1^{\pm}\oplus a_p\cdot c^{\perp}(G^{\mathrm{II}}_{p^\nu}). \tag{2.9}$$

При $C_2=(p\ 0...0)$, $C_3=(p^2\ 0...0)$, $\nu=s=i$, $i=2,3$; $c_\alpha\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$

$$Q^A_{G^{\mathrm{II}}}(C_i)\sim 1_2^-\oplus A\oplus a_p\cdot J_2^{\perp}(G^{\mathrm{II}}_{p^\nu}). \tag{2.10}$$

При $C=(p\ 0...0)$, $\nu=2$, $s>3$

$$Q^A_{G^{\mathrm{III}}}(C)\sim A_{p^2}\oplus p^s\cdot 1^{\pm}\oplus G^{\mathrm{III}}_{p^2}. \tag{2.11}$$

При $C=(pC_2'\ 0...0)$, $C'_{2,\mathrm{fix}}=1+pC_2''$; $\nu=3$, $s=2$

$$Q^A_{G^{\mathrm{IV}}}(C)\sim \pm 1\oplus p^2(\mp 1)\oplus G^{\mathrm{IV}}_{p^3}. \tag{2.12}$$

При $C=(p\ \ p^2\ 0...\ 0)$, $\nu=3$, $s\geqslant 3$

$$Q^A_{G^{\mathrm{V}}}(C)\sim 1_2^-\oplus p^s\cdot 1^{\pm}\oplus G^{\mathrm{V}}_{p^3}. \tag{2.13}$$

Эквивалентность форм $Q_G^A(C)$ исходной матрице Q означает совпадение знаков и размерностей соответствующих блоков жорданова разложения. Для существования форм (2.6), (2.10), (2.13) необходимо, чтобы $\dim Q_1\geqslant m{+}1$, а если $\dim Q_1=m{+}1$, то должно выполняться равенство $\left(\frac{-1}{p}\right)=\varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)$. Для того, чтобы формы (2.7), (2.9), (2.10) были эквивалентны заданной форме Q, необходимо совпадение знаков $\varepsilon_{p^\nu}(A)=\varepsilon_{p^s}(Q)$.

2.4. Для вычисления локальных множителей (2.2) осталось найти число орбит матриц сцепки C, так как, зная все формы G, по формулам из [1] все остальные множители находятся прямым вычислением.

Для (2.6) $c_p(A;Q,G^{\mathrm{I}})=2$; для (2.7) и (2.12) $c_p(A;Q,G^{\mathrm{II}})=1$. По (2.3) найдем количество орбит матриц C для (2.8), (2.9), (2.11), (2.13)

$$c_p(A;Q,G^{\mathrm{II}})=p^{n'/2}(p^{n'/2}+\varepsilon);$$
$$c_p(A;Q,G^{\mathrm{III}})=p^2;$$
$$c_p(A;Q,G^{\mathrm{V}})=4p^{n'};$$

$\varepsilon=\left(\dfrac{(-1)^{n'/2}}{p}\right)\left(\dfrac{|c^{\perp}(G_{p^2})|}{p}\right)$. Для (2.10) находим число матриц C по (2.4):

$$c_p(A;Q,G^{\mathrm{II}})=p^{n'}-1.$$

Отсюда и по (2.2) находим локальные множители.

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{I}})=p^{(s+\nu-2)n'/2}(p^{n'}-1)/2. \tag{2.14}$$

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{II}},C_1)=1; \tag{2.15}$$

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{II}},C_i)=(p^{n'}-1), \tag{2.16}$$

если $c_\alpha\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, $i=2,3$;

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{II}},C_i)=p^{n'/2}(p^{n'/2}+\varepsilon), \tag{2.17}$$

если $c_\alpha\not\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$, где при $i=2$ $\varepsilon=\left(\dfrac{(-1)^{n'/2}a_p}{p}\right)\varepsilon_1(Q)\varepsilon_{p^2}(Q)\varepsilon_1(A)$, если $\eta_1=\eta_2$ (то есть $\left(\dfrac{-1}{p}\right)\varepsilon_{p^2}(A)=\varepsilon_{p^2}(Q)$), и ε умножается на (-1) в противном случае (то есть если $\eta_1\neq\eta_2$); при $i=3$ $\varepsilon=\left(\dfrac{(-1)^{n'/2}}{p}\right)\varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)$.

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{III}})=p^2\cdot p^{(s-3)n'/2}(p^{n'/2}+\varepsilon_1)/2, \tag{2.18}$$

где $\varepsilon_1=\left(\dfrac{-1}{p}\right)^{n'/2}\varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)\varepsilon_{p^s}(A)$.

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{IV}})=(p^{n'/2}+\varepsilon_2)/2, \tag{2.19}$$

где $\varepsilon_2 = -\left(\frac{-1}{p}\right)^{n'/2} \varepsilon_1(Q)\varepsilon_1(A)\varepsilon_{p^2}(Q)$.

$$\alpha_p(A;Q,G^{\mathrm{V}}) = p^{n'(s-1)/2}(p^{n'}-1). \tag{2.20}$$

2.5. Для того, чтобы получить окончательную формулу для $\alpha_p(A;Q)$ необходимо засчитать каждое минимальное представление соответствующее ω число раз. Для (2.6), (2.7), (2.10) $\omega = 1$; для (2.9), (2.11), (2.13) $\omega = (p-1)/2$; для (2.12) $\omega = (p-1)$ и для (2.8) $\omega = (\eta)$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $A \sim A_1 \oplus p^\nu A_{p^\nu}$, $Q \sim Q_1 \oplus p^s Q_{p^s}$, и $\dim Q_{p^s} = \dim A_{p^\nu} = 1$, тогда множитель ветвления $\alpha_p(A;Q)$ для нечетного p, делящего a и d одновременно, вычисляется по следующим формулам.*

1. *Если $s = \nu = 1$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = (p^{n'} + \varepsilon_p(A)\varepsilon_p(Q))/2. \tag{2.21}$$

2. *Если $s \geqslant 2$, $\nu = 1$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{(s-1)n'/2}(p^{n'}-1)/2. \tag{2.22}$$

3. *Если $s = 1$, $\nu = 2$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{n'/2}(p^{n'}-1)/2. \tag{2.23}$$

4. *Если $s = \nu = 2$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{n'}(p^{n'}-1)/2 + p^{n'/2}(p^{n'/2}+\varepsilon)(\eta) + p^{n'}, \tag{2.24}$$

где последнее слагаемое не равно нулю, если $\varepsilon_{p^2}(A) = \varepsilon_{p^2}(Q)$; знак ε берется из (2.17).

5. *Если $s \geqslant 3$, $\nu = 2$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = (p^{sn'/2}(p^{n'}-1) + p^2 \cdot p^{(s-3)n'/2}(p-1)/2(p^{n'/2}+\varepsilon_1))/2, \tag{2.25}$$

где знак ε_1 берется из (2.18).

6. *Если $s = 1$, $\nu = 3$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{n'}(p^{n'}-1)/2 \tag{2.26}$$

7. *Если $s = 2$, $\nu = 3$, то*

$$\alpha_p(A;Q) = (p^{3n'/2}(p^{n'}-1) + (p-1)(p^{n'/2}+\varepsilon_2))/2, \tag{2.27}$$

где знак ε_2 *берется из* (2.19).

8. *Если* $s = \nu = 3$, *то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{n'}(p^{n'}-1)(p^{n'}+p-1)/2+(p^{n'/2}(p-1)(p^{n'/2}+\varepsilon)+2p^{n'})/2, \tag{2.28}$$

где последнее слагаемое не равно нулю, если $\varepsilon_{p^3}(A) = \varepsilon_{p^3}(Q)$; *знак* ε *из берется* (2.16).

9. *Если* $s > 3$, $\nu = 3$, *то*

$$\alpha_p(A;Q) = p^{(s-1)n'/2}(p^{n'}-1)(p^{n'}+p-1)/2. \tag{2.29}$$

§3. Формулы веса для конкретных форм

3.1. Чтобы получить конкретные квадратичные формы, можно применить метод специализации квадратичных диофантовых систем. Пусть $\{X\}$ – орбиты всех примитивных представлений одноклассной формы A' одноклассной формой Q', и пусть существует ортогональное дополнение $K_i \perp X_i$ из некоторого рода $[K]$. Тогда классы $\{K_i\}$, содержащиеся в $[K]$, образуют весь род. Для приложений формул, полученных в §2, удобно полагать $A' = a$ – число, $Q' = 1_n$ – единичная матрица размерности n. Полученный в результате ортогонального дополнения род форм имеет размерность $n-1$ и определитель a.

Четырёхклассный род $F_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$, полученный специализацией $A' = 27$, $Q' = 1_6$, задаётся формами вида

$$Q_1 = 1_3 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = 1_2 \oplus \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 10 & 0 \\ 4 & 0 & 17 \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}.$$

Инварианты рода F_2 равны $d = 27$, $3_{F_2} = 1^{-4}27^{-1}$, $2_{F_2} = 1^{-5}_{\mathrm{I},3}$. Вес примитивных представлений бинарной формы $A \sim A_1 \oplus 3^\nu A_{3^\nu}$ уровня $a = 3^\nu \cdot a_{3^\nu}$ определяется соотношением (2)

$$pn(A;F_2) = \frac{1}{6}\alpha_2(A;Q)\alpha_3(A;Q)\prod_{p^s||a} p^{s-1}\left(p+\varepsilon_1(A)\left(\frac{3}{p}\right)\right),$$

где локальный множитель $\alpha_3(A;Q)$ вычисляется по формуле

$$\alpha_3(A;Q) = \left(27 + \left(\frac{a_3}{3}\right)\right)/2,$$

если $a = a_3$ не делится на 3. Если $a = 3^\nu a_{3^\nu}$, то возникает ветвление представлений и при $\nu = 1$ по (2.22)

$$\alpha_3(A;Q) = 3^2(3^2-1)/2 = 36;$$

количество представлений формы A родом F_2 увеличивается. Если же $\nu = 2$, то множитель ветвления вычисляется по формуле (2.27) и равен

$$\alpha_3(A;Q) = 108 + 9(3-\varepsilon_1(A))/2.$$

При $\nu = 3$ множитель ветвления находится по (2.28) и равен

$$\alpha_3(A;Q) = 3^2(3^2-1)(3^2+3-1)/2 = 396,$$

если $\varepsilon_{27}(A) = -1$, и

$$\alpha_3(A;Q) = 405 + 3(3+\varepsilon_1(A)),$$

если $\varepsilon_{27}(A) = +1$. Множитель $\alpha_2(A;Q)$ вычисляется по формулам из [1] и равен для четного a

$$\alpha_2(A;Q) = (4+\varepsilon_2)/8,$$

где $\varepsilon_2 = \left(\dfrac{a_2(3-t(A))}{2}\right)$; для нечетного a

$$\alpha_2(A;Q) = (1 \pm 2^{-1})/4 \text{ при } \mathrm{oct} \equiv \pm 1 \text{ или } \pm 3 (\mathrm{mod}\ 8),$$

где $\mathrm{oct} \equiv 3 - t(A) (\mathrm{mod}\ 8)$ при $\left(\dfrac{a_2}{2}\right) = -1$; $\mathrm{oct} \equiv 7 - t(A) (\mathrm{mod}\ 8)$ при $\left(\dfrac{a_2}{2}\right) = +1$.

Сравнение множителя без ветвления $\alpha_p(A;Q) = (p^{sn'/2} \pm 1)$ и ветвящихся множителей (2.22), (2.24)–(2.29)показывает, что при появлении общих делителей p у определителя d и уровня a возникает рост примитивных представлений формы A родом F. Усложняется структура множителей ветвления в связи с появлением различных форм G из ортогонального дополнения к A. Нахождение этих множителей стало возможным благодаря выявлению всех минимальных представлений (1.2)–(1.9) формы A родом F.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Представление формы родом квадратичных форм,* Алгебра и анализ **8**, No. 1 (1996), 21–112.
2. А. В. Хорошева, *Представление чисел кватернарными квадратичными формами,* VII международная конференция. Математика. Экономика. Экология. Образование. Тезисы докладов. Ростов-на-Дону (1999), 109–110.
3. А. В. Хорошева, *Представление чисел родом одноклассных кватернарных форм,* Вестник Владимирск. гос. пед. ун-та, No. 5 (2000), 338–346.
4. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решётки и группы,* М., 1990.
5. В. Г. Журавлев, *Орбиты представлений чисел локальными квадратичными формами,* Тр. Мат. ин-та РАН **218** (1997), 151–164.
6. Дж. Касселс, *Рациональные квадратичные формы,* М., 1982.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 24 августа 2000 г.