Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Н. Н. Амосова

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть X_1, $\mathrm{X}_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих $\mathbf{E}\,\mathrm{X}_1 = 0$ и $\mathbf{D}\,\mathrm{X}_1 = 1$. Обозначим через S_n сумму $\sum_{k=1}^n X_k$, через $\mathrm{F}(x)$ функцию распределения случайной величины X_1, через γ неотрицательную постоянную и рассмотрим вопрос о том, при каких условиях будет справедливо неравенство

$$P(S_n \geqslant x\sqrt{n}) \leqslant e^{-\beta x^2} \tag{1}$$

для всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$ в области $0 \leqslant x \leqslant \mathrm{b}\, n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}$ для любого $\mathrm{b} > 0$, а также в области $0 \leqslant x \leqslant n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\rho(n)$ для любой функции $\rho(n) \to \infty$, $n \to \infty$.

Этот вопрос в случае $\gamma = 0$ рассматривался в [1]. В [2] рассматривался двусторонний аналог неравенства (1). Из результатов, полученных в [2] следует, что условие

$$P\big(|X_1| \geqslant x\big) = O\Big(\exp\Big\{-\alpha x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}\Big), \quad x \to +\infty,$$

выполненное для некоторого $\alpha > 0$, является необходимым и достаточным для выполнения неравенства

$$P\big(|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\big) \leqslant e^{-\beta x^2}$$

в области $0 \leqslant x \leqslant \frac{n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}}{\rho(n)}$ для любой функции $\rho(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$.

Кроме того, в [3, с. 309] можно найти следующий результат, принадлежащий В. В. Петрову: пусть X_1, $\mathrm{X}_2, \ldots$ последовательность независимых случайных величин (не обязательно одинаково распределенных), пусть $EX_j = 0$, $DX_j < \infty$, $j = 1, 2, \ldots$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} < \infty$, где $B_n = \sum_{i=1}^n DX_i$. Пусть существуют положительные постоянные $\alpha < \frac{1}{2}$, b_0 и b_1 и функция $\rho(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$

такие, что $P(S_n > x\sqrt{B_n}) \leqslant b_0\, e^{-b_1 x^2}$, $P(S_n < -x\sqrt{B_n}) \leqslant b_0\, e^{-b_1 x^2}$ для $0 \leqslant x \leqslant n^{\alpha}\rho(n)$ и всех достаточно больших n. Тогда

$$\mathbf{E}\exp\left\{\beta |X_j|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}}\right\} < \infty$$

для любого $\beta > 0$ и $j = 1, 2, \dots$.

Заметим, что приведенные ниже результаты обобщают и усиливают некоторые результаты, полученные в [1] и [2].

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Утверждения*

(A) *существуют такие положительные постоянные a и α, что*

$$P(X_1 \geqslant x) \leqslant a \exp\left\{-\alpha x^{\frac{1}{1+\gamma}}\right\}$$

при всех $x > 0$;

(B) *существуют такие положительные постоянные δ и L, что*

$$\int_0^{\infty} \exp\left\{\delta x^{\frac{1}{1+\gamma}}\right\} dF(x) \leqslant L < \infty;$$

(C) *неравенство* (1) *справедливо в области $0 \leqslant x \leqslant b n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}$ для любого фиксированного $b > 0$, всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$, $\beta = \beta(b)$;*

(D) *неравенство* (1) *справедливо в области $0 \leqslant x \leqslant \frac{n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}}{\rho(n)}$ для любой функции $\rho(n) \to \infty$ $(n \to \infty)$, всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$,*

равносильны.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Условия* (A) *и* (B) *эквивалентны.*

Замечание. Из леммы 1 в случае $\gamma = 0$ следует известный результат о равносильности следующих условий (см. [3, с. 71]):

(a) существует такая постоянная H, что

$$\mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\mathrm{tX}} < \infty \quad \text{при} \quad |\mathrm{t}| < \mathrm{H},$$

(b) существует такая постоянная a, что

$$\mathbf{E}\, \mathrm{e}^{\mathrm{a}|\mathrm{X}|} < \infty,$$

(c) существуют такие положительные постоянные b и c, что

$$\mathrm{P}\big(|\mathrm{X}| > x\big) \leqslant \mathrm{b}e^{-cx} \quad \text{при всех} \quad x > 0.$$

Доказательство леммы 1. Пусть выполнено условие (A). Тогда можно записать

$$\int_1^\infty \exp\Big\{\frac{\alpha}{2} x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\} dF(x) = -\Big(\big(1-\mathrm{F}(x)\big)\exp\Big\{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}\Big)\Big|_1^\infty +$$

$$\int_1^\infty \big(1-\mathrm{F}(x)\big)\exp\Big\{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}\frac{\alpha}{2(1+\gamma)}x^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\,\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\mathrm{L}_1 + \mathrm{a}_1\int_1^\infty \exp\Big\{-\frac{\alpha}{2}x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}x^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{L}.$$

Здесь a_1, L_1 и L – некоторые положительные постоянные.

Таким образом, выполнено условие (B).

Пусть теперь выполнено условие (B). Тогда

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant x) = \int_x^\infty \mathrm{dF}(x) \leqslant \mathrm{L}\exp\Big\{-\delta x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}$$

для любого $x > 0$ и некоторых $\mathrm{L} > 0$ и $\delta > 0$, т.е. выполнено условие (A). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Утверждение*

(a) *для любого* $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant x) = \exp\Big\{-\alpha x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}\mathrm{R}_\alpha(x), \tag{2}$$

где $\mathrm{R}_\alpha(x) > 0$, $\limsup\limits_{x\to+\infty}\mathrm{R}_\alpha(x) = +\infty$

и утверждение

(b) $$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant x) = \exp\Big\{-\frac{x^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\mathrm{g}(x)}\Big\} \qquad (3),$$

где $\limsup\limits_{x\to+\infty}\mathrm{g}(x) = +\infty$, *равносильны.*

Доказательство леммы 2. Докажем сначала, что (b) $\Rightarrow$ (a). Зададим некоторое $\alpha > 0$. Тогда можно записать

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant x) = \exp\Big\{-\frac{x^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\mathrm{g}(x)}\Big\} = \exp\Big\{\frac{x^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\mathrm{g}(x)}(\alpha \mathrm{g}(x) - 1)\Big\} \exp\Big\{-\alpha x^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}.$$

Таким образом, получили выражение (2), где

$$\frac{x^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\mathrm{g}(x)}(\alpha \mathrm{g}(x) - 1) = \ln \mathrm{R}_a(x).$$

Так как выполнено (b), то $\limsup\limits_{x\to+\infty}(\alpha \mathrm{g}(x) - 1) = +\infty$. Далее, из (3) и из очевидного соотношения $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1 \geqslant x) \to 0$ при $x \to +\infty$ следует, что $\frac{x^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\mathrm{g}(x)} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Значит $\limsup\limits_{x\to+\infty} \mathrm{R}_a(x) = +\infty$.

Докажем теперь, что (a) $\Rightarrow$ (b). Так как выполнено (2), то существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \to +\infty$ и

$$\mathrm{R}_a(x_n) = \exp\Big\{x_n^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(\alpha - \frac{1}{\mathrm{g}(x_n)}\Big)\Big\} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

Отсюда

$$x_n^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(\alpha - \frac{1}{\mathrm{g}(x_n)}\Big) \to +\infty \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Если бы $0 \leqslant \limsup\limits_{x\to+\infty} \mathrm{g}(x) = \mathrm{C} < +\infty$, то для $0 < \alpha < \frac{1}{2(C+1)}$ и для достаточно больших n было бы справедливо: $\mathrm{g}(x_n) < \mathrm{C} + 1$ и $\alpha - \frac{1}{C+1} < -\frac{1}{2(C+1)} < 0$. Но тогда $x_n^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(\alpha - \frac{1}{\mathrm{g}(x_n)}\Big) \to -\infty$ $(n \to \infty)$, что противоречит (4).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Докажем сначала, что (A)$\Rightarrow$(C). Так как в силу центральной предельной теоремы неравенство (1) справедливо в области $0 \leqslant x \leqslant \psi(n)$, где $\psi(n) \to \infty$, $n \to \infty$, достаточно медленно, то считаем, что $x \geqslant \psi(n)$.

Положим

$$\widetilde{X}_i = \begin{cases} X_i, & \text{если} \quad X_i \leqslant x\sqrt{n}, \\ 0, & \text{если} \quad X_i > x\sqrt{n}, \end{cases} \qquad \widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i.$$

Тогда

$$\mathrm{P}\big(S_n \geqslant x\sqrt{n}\big) \leqslant \mathrm{P}\big(\widetilde{S}_n \geqslant x\sqrt{n}\big) + n\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_1 \geqslant x\sqrt{n}\big). \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что в области $\psi(n) \leqslant x \leqslant \mathbf{n}^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}$

$$n\mathrm{P}\big(\mathrm{X}_1 \geqslant x\sqrt{n}\big) \leqslant a\,n\,\exp\Big\{-\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\} < \exp\{-\beta x^2\}$$

для некоторого $0 < \beta < \alpha/(2b^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}})$ и всех достаточно больших n. Действительно,

$$\exp\{\beta x^2\} a\,n\,\exp\Big\{-\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\} =$$

$$\exp\Big\{-\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(1 - \frac{\beta x^2}{\alpha(x\sqrt{n})^{1/(1+\gamma)}} + o(1)\Big)\Big\} = o(1), \quad n \to \infty,$$

так как

$$\frac{\beta x^2}{\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}} = \frac{\beta x^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}}{\alpha n^{\frac{1}{2(1+\gamma)}}} \leqslant \frac{\beta b^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}}{\alpha} < \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad \beta < \frac{\alpha}{2b^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}}.$$

Далее, так как $\mathbf{E}\,\mathrm{X}_1 = 0$, $\mathbf{D}\,\mathrm{X}_1 = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 d\mathrm{F}(x) = \varepsilon_0 < 1$. Зафиксируем q,

$$0 < q < \min\Big(1, \frac{\alpha}{2}\, b^{-\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}, \frac{3(1-\varepsilon_0)}{Mab(4+b)}\Big),$$

где

$$\mathrm{M} = \int\limits_1^\infty y^3 \exp\Big\{-\frac{\alpha}{2}\, y^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\} dy + 1,$$

и положим $h = xqn^{-1/2}$. Ясно, что

$$\mathrm{P}\big(\widetilde{S}_n \geqslant x\sqrt{n}\big) = \mathrm{P}\big(\exp\{h\widetilde{S}_n\} \geqslant \exp\{hx\sqrt{n}\}\big) =$$

$$\mathrm{P}\big(\exp\{h\widetilde{S}_n\} \geqslant \exp\{x^2 q\}\big) \leqslant \exp\{-x^2 q\}\mathbf{E}\,\exp\{h\widetilde{S}_n\} =$$

$$\exp\{-x^2 q\}\big(\mathbf{E}\,\exp\{h\widetilde{\mathrm{X}}_1\}\big)^n. \tag{6}$$

Для e^r справедливо разложение:

$$\mathrm{e}^r = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{r^\nu}{\nu!} + \mathrm{R}_k,$$

где

$$\frac{r^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant \mathrm{R}_k \leqslant \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{e}^r, \qquad \text{если} \quad r \geqslant 0,$$

$$|\mathrm{R}_k| \leqslant \frac{|r|^k}{k!}(1-\mathrm{e}^r), \qquad \text{если} \quad r < 0.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\exp\{h\widetilde{\mathrm{X}}_1\} = \int\limits_{-\infty}^{x\sqrt{n}} \mathrm{e}^{hy}\,\mathrm{dF}(y) \leqslant$$

$$1-h\int\limits_{x\sqrt{n}}^{\infty} y\mathrm{dF}(y) + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0} y^2(1-\mathrm{e}^{hy})\mathrm{dF}(y) + \frac{h}{3}\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\,\mathrm{dF}(y)\Big) \leqslant$$

$$1+\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}\Big(\varepsilon_0 + \frac{h}{3}\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\,\mathrm{dF}(y)\Big). \tag{7}$$

Покажем, что $\frac{h}{3}\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\mathrm{dF}(y) < 1-\varepsilon_0$. Действительно,

$$\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\,\mathrm{dF}(y) = -x^3 n^{3/2}\mathrm{e}^{hx\sqrt{n}}(1-\mathrm{F}(x\sqrt{n})) +$$

$$3\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^2\,\mathrm{e}^{hy}(1-\mathrm{F}(y))\mathrm{d}y + h\int\limits_{0}^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\big(1-\mathrm{F}(y)\big)\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

В силу условия (A) и выбора q имеем:

$$x^3 n^{3/2}\mathrm{e}^{hx\sqrt{n}}(1-\mathrm{F}(x\sqrt{n})) \leqslant$$

$$a\exp\Big\{-\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(1-\frac{hx\sqrt{n}}{\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}} + o(1)\Big)\Big\} = o(1), \quad n\to\infty, \tag{9}$$

так как

$$\frac{hx\sqrt{n}}{\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}} = \frac{x^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}q}{an^{\frac{1}{2(1+\gamma)}}} \leqslant \frac{b^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}q}{\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Далее, из условия (A) и в силу выбора q получаем:

$$\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^2\,\mathrm{e}^{hy}(1-\mathrm{F}(y))\mathrm{d}y \leqslant a\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^2\,\mathrm{e}^{hy-\alpha y^{\frac{1}{1+\gamma}}}\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$a\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^2\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y^{\frac{1}{1+\gamma}}}\,\mathrm{d}y \leqslant a\int\limits_0^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y^{\frac{1}{1+\gamma}}}\,\mathrm{d}y \leqslant a\mathrm{M}, \tag{10}$$

так как

$$\frac{h}{\alpha}y^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} = \frac{xq}{\sqrt{n}\,\alpha}y^{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \leqslant \frac{x^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}\,n^{\frac{\gamma}{2(1+\gamma)}}\,q}{\sqrt{n}\,\alpha} \leqslant \frac{b^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}\,q}{\alpha} < \frac{1}{2}.$$

$\Big($Здесь $\mathrm{M} = \int\limits_1^\infty y^3 \exp\Big\{-\frac{\alpha}{2}y^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big\}dy + 1\Big)$. Аналогично,

$$h\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\big(1-\mathrm{F}(y)\big)\,\mathrm{d}y \leqslant ha\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y^{\frac{1}{1+\gamma}}}\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$ha\int\limits_0^{\infty} y^3\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}y^{\frac{1}{1+\gamma}}}\,\mathrm{d}y \leqslant ha\mathrm{M}. \tag{11}$$

Таким образом, для достаточно больших n имеем

$$\frac{h}{3}\int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^3\,\mathrm{e}^{hy}\,\mathrm{dF}(y) \leqslant \frac{h}{3}(a+3a\mathrm{M}+ah\mathrm{M}) \leqslant$$

$$\frac{bqa}{3}(1+3\mathrm{M}+\mathrm{bM}) \leqslant \frac{bqa}{3}\mathrm{M}(4+\mathrm{b}) < 1-\varepsilon_0$$

в силу выбора q. Значит,

$$\big(\mathbf{E}\,\exp\{h\widetilde{\mathrm{X}}_1\}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{n\log(1+h^2)} \leqslant \mathrm{e}^{nh^2} = \mathrm{e}^{x^2q^2}$$

и $\mathrm{P}(\widetilde{S}_n \geqslant x\sqrt{n}) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2(q-q^2)}$.

Следовательно неравенство (1) справедливо в области $0 \leqslant x \leqslant bn^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}$ для любого $\mathrm{b} > 0$, для всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$, зависящего от b.

Докажем теперь, что $(C) \Rightarrow (A)$. Итак, выполнено неравенство (1) в области $0 \leqslant x \leqslant bn^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}$ для любого $\mathrm{b} > 0$, для всех достаточно больших n и некоторого $\beta > 0$.

Предположим. что условие (A) не выполнено. Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется функция $\mathrm{R}(x)$ такая, что $\mathrm{R}(x) > 0$, $\limsup\limits_{x\to+\infty} \mathrm{R}(x) = +\infty$ и имеет место (2). Далее, существует последовательность $\{x_n\sqrt{n}\}$ такая, что

$$x_n\sqrt{n} \to +\infty \quad \text{и} \quad \mathrm{g}\Big((x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}\Big) \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Положим $[x_n\sqrt{n}] = k(n) = k$ ($[x]$ обозначает целую часть числа x) и возьмем последовательность $\{x'_k\}$ такую, что

$$x'_k \to +\infty \quad (n \to \infty), \quad x'_k = k^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}/\sqrt{\rho_1(k)}, \quad \text{где} \quad \rho_1(k) \to +\infty$$

так, что

$$\rho_1(k) = o\Big(\mathrm{g}((x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}})\Big) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда, в частности,

$$x'_k = o\Big(k^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}}\Big) \ (n \to \infty), \quad \text{т.е.} \quad x'_k < \mathrm{b}k^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}} \quad \text{для любого} \quad \mathrm{b} > 0$$

и всех достаточно больших n. Далее, для всех достаточно больших n имеем, учитывая центральную предельную теорему:

$$\mathrm{P}(S_k \geqslant x'_k\sqrt{k}) \geqslant \mathrm{P}\Big(S_k \geqslant k^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}\Big) \geqslant \mathrm{P}\Big(S_k \geqslant (x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}\Big) \geqslant$$

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{X}_1 \geqslant (x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}\Big)\mathrm{P}(S_{k-1} \geqslant 0) \geqslant \mathrm{M}_1\mathrm{P}\Big(\mathrm{X}_1 \geqslant (x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}}\Big) =$$

$$\mathrm{M}_1 \exp\Big\{-\frac{(x_n\sqrt{n})^{\frac{1}{1+2\gamma}}}{\mathrm{g}((x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}})}\Big\}.$$

Здесь $\mathrm{M}_1 > 0$ – некоторая постоянная. Но

$$\mathrm{M}_1 \exp\Big\{-\frac{(x_n\sqrt{n})^{\frac{1}{1+2\gamma}}}{\mathrm{g}((x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}})}\Big\} > \exp\big\{-\eta {x'_k}^2\big\}$$

для любого $\eta > 0$, так как

$${x'_k}^2\Big(\eta - \frac{(x_n\sqrt{n})^{\frac{1}{1+2\gamma}}}{\mathrm{g}((x_n\sqrt{n})^{\frac{1+\gamma}{1+2\gamma}})}\ \frac{\rho_1(k)}{k^{\frac{1}{1+2\gamma}}}\Big) > \eta_1 {x'_k}^2$$

$(0 < \eta_1 < \eta)$ и соотношение (1) не может быть выполнено.

Докажем, что из $(A) \Rightarrow (D)$. Действительно, если как и выше ввести случайные величины $\widetilde{X}_i$, то тогда будет справедлива оценка (5) и

$$nP(X_1 \geqslant x\sqrt{n}) \leqslant an \exp\Big\{ -\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}} \Big\} < \exp\{-\beta x^2\}$$

для некоторого $\beta > 0$ и всех достаточно больших n. Здесь следует учесть, что

$$\exp\{\beta x^2\} an \exp\Big\{ -\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}} \Big\} =$$

$$\exp\Big\{-\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}\Big(1 - \frac{\beta x^2}{\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}} + o(1)\Big)\Big\} = o(1), \quad n \to \infty,$$

в силу того, что

$$\frac{\beta x^2}{\alpha(x\sqrt{n})^{\frac{1}{1+\gamma}}} \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\rho(n))^{\frac{1+2\gamma}{1+\gamma}}} = o(1), \quad n \to \infty.$$

Далее, справедливы оценки (6) и (7). Зафиксируем q, $0 < q < 1$. Тогда

$$h = xqn^{-1/2} \leqslant \frac{n^{\frac{1}{2(1+2\gamma)}} q}{\rho(n)\sqrt{n}} = o(1).$$

Как и выше справедливы оценки (8)–(11) и

$$\frac{h}{3} \int\limits_0^{x\sqrt{n}} y^3 \, \mathrm{e}^{hy} \, \mathrm{dF}(y) = o(1), \quad n \to \infty,$$

откуда

$$\mathbf{E} \exp\{h\widetilde{X}_1\} \leqslant 1 + h^2, \quad \big(\mathbf{E} \exp\{h\widetilde{X}_1\}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{x^2 q^2}$$

$$\text{и} \quad P(\widetilde{S}_n \geqslant x\sqrt{n}) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2(q-q^2)}$$

для всех достаточно больших n.

Доказательство того, что $(D) \Rightarrow (A)$ аналогично доказательству того, что $(C) \Rightarrow (A)$.

Теорема доказана.

Литература

1. Н. Н. Амосова, *Одно неравенство для вероятностей больших уклонений.* — Теория вероятн. и ее применен. **32**, No. 2 (1987), 364–367.
2. Н. Н. Амосова, *О необходимости условия Статулявичуса в предельных теоремах для вероятностей больших уклонений.* — Liet. matem. rink **39**, No. 3 (1999), 293–303.
3. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).

Amosova N. N. An estimate for distributions of sums of independent random variables.

Some necessary and sufficient conditions are investigated for one estimate of the exponentially type for large deviations probabilities of sums of i.i.d. random variables

С.-Петербургское государственный технический университет

Поступило 2 марта 2001 г.