Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Я. И. Белопольская

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение

Известно, что некоторые нелинейные уравнения в частных производных имеют удивительно простую скрытую структуру, и их решения могут быть получены с помощью методов линейной теории. Этот эффект был обнаружен в шестидесятые годы и позволил явно решить ряд классических нелинейных задач. В частности, для построения решения (одномерного) уравнения Кортевега де Фриза (КдФ) был предложен так называемый метод обратной задачи рассеяния, позволивший использовать связь между КдФ и линейным одномерным стационарным уравнением Шредингера [1, 2]. Существование аналогичной связи между КдФ и одномерным уравнением теплопроводности с потенциалом, зависящим от параметра было обнаружено в работе [3] М. Каца и В. Мербеке.

В основе возможности отыскать явные решения нелинейных уравнений часто лежит существование нелинейного преобразования, позволяющего линеаризовать рассматриваемую задачу и построить явное решение редуцированной задачи. Однако, как правило, этот подход существенно одномерный и не допускает распространения на фазовое пространство большей размерности. Заметим, что исключениями из этого правила являются уравнения Бюргерса и Риккати. Вероятностная трактовка этих уравнений [4, 5], основанная на связи их решений с логарифмическими производными диффузионных мер, показывает, что естественно рассматривать многомерные аналоги этих уравнений. Классическая подстановка Коула–Хопфа, позволяющая линеаризовать уравнение Бюргерса, является аналитическим представлением этой связи. Опираясь на результаты Ю. Л. Далецкого [6] и ряда других авторов, эти результаты удается перенести и на бесконечномерный случай [7].

Работа поддержана грантами РФФИ 00-01-00477 и 00-15-96019.

В этой работе мы обсудим вероятностный смысл ряда нелинейных уравнений, в частности, уравнений, встречающихся в теории солитонов, и их многомерных аналогов. При этом будет показано, что эти уравнения играют важную роль в описании семейств абсолютно непрерывных преобразований диффузионных мер.

Например, мы покажем, что уравнение совпадающее в одномерном случае с КдФ, является достаточным условием для того, чтобы эволюционное семейство в пространстве мер (порожденное некоторым диффузионным процессом и однопараметрическим семейством его мультипликативных функционалов) обладало логарифмической производной по параметру, и приведем выражение для этой логарифмической производной.

Мы опишем два способа вывода многомерных обобщений КдФ. Один из них основан на использовании пар Лакса, а другой на обобщенном преобразовании Дарбу. Первый из них позволит вывести многомерный аналог уравнения КдФ, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП), а также уравнение, обобщающее (с вероятностной точки зрения) эти уравнения. Полученные уравнения позволяют, в частности, описать изоспектральные преобразования для многомернорго оператора Лапласа.

Используя аналог преобразования Дарбу, построенный в [4, 5], мы выводим еще одно многомерное обобщение КдФ. Это уравнение также описывает семейство потенциалов, связанных с изоспектральной задачей. Наряду с этим оно еще и позволяет найти выражение, описывающее логарифмическую производную по скалярному параметру α семейства мер $\mu(dy, \alpha)$, удовлетворяющих рассматриваемому эллиптическому уравнению.

Полученные результаты, обобщая результаты работ [3–5], представляют лишь первые шаги в изучении связи между диффузионными процессами и нелинейными уравнениями теории солитонов.

В последнем параграфе мы обсудим еще одно классическое одномерное нелинейное уравнение – уравнение Шварца [8] и установим его связь с теорией диффузионных процессов. Мы интерпретируем уравнение Шварца, как уравнение для производной Радона–Никодима $\eta(x) = \frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}$ пары мер μ_1, μ_2, порожденных диффузионными процессами и их мультипликативными функционалами. Отметим, что в многомерном случае не удается получить замкнутое уравнение типа уравнения Шварца. Уравнение, описывающее поведение функции $\eta(x)$ при этом, зависит от логарифмической производной одной из мер, которую в одномерном случае удается исключить. Мы также используем полученный результат для вывода уравнения, которому удовлетворяет логарифмическая производная по параметру меры, рассмотренной в параграфе 1.

1. Диффузионные процессы и меры ассоциированные с многомерным КдФ

Пусть $w(t) \in R^n$ винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t$ поток σ-алгебр, согласованный с винеровским процессом, $a(x) \in R^n, A(x) \in R^n \times R^n$, $x \in R^n$.

Рассмотрим марковский случайный процесс $\zeta(t) \in R^n$, $t \in [0,T]$, удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$d\zeta = a(\zeta(t))dt + A(\zeta(t))dw, \quad \zeta(0) = \zeta_0 \in R^n, \tag{1.1}$$

где ζ_0 – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая гладкое распределение $\nu(dy) = P\{\zeta_0 \in dy\}$, и $0 \leqslant T \leqslant \infty$.

Известно, что марковский процесс $\zeta(t)$ задает пару полугрупп $T(t)$ и $V(t)$, действующих соответственно в пространстве ограниченных борелевских функций и борелевских мер на R^n и сопряженных в смысле естественного спаривания этих пространств. Действие полугрупп $T(t)$ и $V(t)$ определяется соотношениями

$$T(t-s)f(x) = Ef(\zeta_{s,x}(t)), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \tag{1.2}$$

и

$$\int\limits_{R^n} T(t-s)f(x)\nu(dx) = \int\limits_{R^n} f(y)V(t-s)\nu(dy).$$

Наряду с этим, при определенных условиях процесс $\zeta(t)$ определяет также полугруппу $S(t)$ в пространстве $L_2(R^n)$, действие которой по-прежнему задается соотношением (1.2). Ниже нас будут интересовать ситуации, в которых все перечисленные выше полугруппы корректно определены.

В этой работе мы ограничимся рассмотрением лишь нескольких простейших вариантов стохастических диффузионных уравнений вида (1.1).

Пусть $u(x,\alpha) \in R^1$, $x \in R^n$, $\alpha \in R^1$ – гладкая ограниченная функция и $\xi_0 \in R^n$ – $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = \xi_0 + \sqrt{2}w(t)$$

и мультипликативный функционал от него, определяемый линейным уравнением

$$d\eta = -u(\xi(t),\alpha)\eta(t)dt, \quad \eta(0) = h \in R^1, \quad \alpha \in R^1.$$

Двухкомпонентный случайный процесс $\gamma(t) = (\xi(t),\eta(t)) \in R^{n+1}$ является марковским процессом в фазовом пространстве R^{n+1}. Его переходная вероятность

$$P(t,(\xi_0,h),dy \times d\kappa) = P(\xi(t) \in dy,\ \eta(t) \in d\kappa \,|\, \xi(0) = \xi_0, \eta(0) = h)$$

порождает эволюционное семейство, действующее в пространстве мер на R^n по формуле

$$U(t)\nu(dy) = E\nu(dy - \xi(t)) \exp\left[-\int\limits_0^t u(\xi(s),\alpha)ds\right] = \Psi(t,dy) \qquad (1.3)$$

и обладает плотностью $\Psi(t,y)$ относительно меры Лебега. При этом функция $\Psi(t,y)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности с потенциалом $-u(y,\alpha)$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Delta\Psi - u(y,\alpha)\Psi, \quad \Psi(0,y) = \nu(y). \qquad (1.4)$$

Здесь $\Delta\Psi(y) = \sum\limits_{k=1}^n \frac{\partial^2\Psi(y)}{\partial y_k^2}$ – оператор Лапласа.

Рассмотрим начально- краевую задачу для уравнения (1.4) в области $G \in R^n$ с гладкой границей Γ и краевыми условиями

$$\Psi(t,y) = f(y)|_{y\in\Gamma}, \quad y \in G, \quad \nu(y)|_\Gamma = f(y)|_\Gamma. \qquad (1.5)$$

Если положить

$$\Psi(t,y) = \gamma(y) + \Phi(t,y),$$

где $\gamma(y)$ – решение стационарной краевой задачи

$$\Delta\gamma(y) - u(y,\alpha)\gamma(y) = 0, \quad y \in G, \quad \gamma(y)|_\Gamma = \nu(y), \qquad (1.6)$$

то нетрудно проверить, что функция $\Phi(t,y)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Delta\Phi - u(y,\alpha)\Phi,$$
$$\Phi(t,y)|_\Gamma = 0, \quad \Phi(0,y) = \nu(y) - \gamma(y). \tag{1.7}$$

Для того, чтобы решение $\Psi(t,y)$ задачи (1.4)–(1.5) сходилось к решению $\gamma(y)$ задачи (1.6) при $t \to \infty$ необходимо, чтобы решение $\Phi(t,y)$ задачи (1.7) сходилось к 0.

Будем искать решение задачи (1.7) в виде

$$\Phi(t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t}\phi_k(y), \tag{1.8}$$

где пары λ_k, $\phi_k(y)$ определяются из решения задачи на собственные значения

$$\Delta\phi_k = \lambda_k\phi_k + u(y,\alpha)\phi_k, \quad \phi_k|_\Gamma = 0 \tag{1.9}$$

и собственные функции $\phi_k(y)$ нормированы условием

$$\int\limits_G \phi_k^2(y)dy = 1.$$

Если все собственные числа λ_k задачи (1.9) отрицательны, то решение $\Phi(t,y)$ задачи (1.7) сходится к 0 при $t \to \infty$.

Только в этом случае решение $\Psi(t,y)$ задачи (1.4)–(1.5) сходится к решению $\gamma(y)$ стационарной задачи (1.6) при $t \to \infty$ при любых начальных условиях $\nu(y)$.

Поскольку потенциал $u(y,\alpha)$ зависит от параметра α, то и собственные функции ϕ_k и собственные числа λ_k оператора $\Delta - u(y,\alpha)$, вообще говоря, зависят от параметра α. Нас будут интересовать условия на потенциал $u(y,\alpha)$, при которых собственные числа λ_k не зависят от параметра α.

Заметим, что анализ результатов, известных для случая $n = 1, G = [0,1], \Gamma = \{0,1\}$, показывает, что уравнение КдФ

$$u_\alpha + 6uu'_y + u'''_{yyy} = 0$$

может быть истолковано как условие, гарантирующее, что мера, порожденная процессом $\xi(t)$ вида (1.1) (при $n = 1$) и его мультипликативным функционалом и удовлетворяющей начально-краевой задаче (1.4)–(1.5) определяется соотношением (1.8) с показателями λ_k не зависящими от параметра α. При этом функции $\kappa_k(y,\alpha)$ в (1.8) удовлетворяют задаче Штурма–Лиувилля

$$\kappa_k''(y) - u(y,\alpha)\kappa_k(y) = \lambda_k\kappa_k(y), \quad \kappa_k(0) = \kappa_k(1) = 0,$$

и нормированы условием $\int_0^1 \kappa_k^2(y)dy = 1$, а коэффициенты c_k определяются из начальных условий.

В других терминах этот результат означает, что эволюция потенциала по параметру α в соответствии с уравнением КдФ оставляет инвариантным спектр эллиптического оператора $\Delta - u(y,\alpha)$, т.е. соответствует изоспектральной задаче для этого оператора.

Покажем, что аналогичные результаты имеют место и в многомерном случае. Воспользуемся для этого классическим подходом, основанным на так называемых парах Лакса, разработанным в теории солитонов для решения одномерного уравнения КдФ (см., например, [1, 2]) и применим его для вывода обобщенного многомерного КдФ.

С этой целью рассмотрим скалярное уравнение

$$\Delta\phi - u(y,\alpha)\phi = \lambda\phi, \quad y \in R^n,\ \alpha \in R^1 \tag{1.10}$$

и обсудим возможный выбор семейства скалярных функций $u(y,\alpha)$, для которых постоянная λ в этом уравнении не зависит от выбора α.

Обозначим $L\phi = \Delta\phi - u(y,\alpha)\phi, \quad \phi'_\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}$. и рассмотрим пару уравнений

$$L\phi - \lambda\phi = 0, \tag{1.11}$$

$$\phi'_\alpha = B\phi, \tag{1.12}$$

где B – дифференциальный оператор по переменной y. Как уже упоминалось выше, классический способ вывода уравнений, которым должна подчиняться функция $u(y,\alpha)$, чтобы гарантировать изоспектральность оператора $\Delta - u(\alpha)$, базируется на построении пары Лакса - пары некоммутирующих дифференциальных операторов $L = \Delta - u(\alpha)$ и B таких, что

$$-\frac{\partial u}{\partial\alpha} + [L,B] = 0. \tag{1.13}$$

Отметим, что (1.13) является условием совместности системы (1.11), (1.12).

Действительно, дифференцируя (1.11) по параметру α, получим

$$(L\phi)'_\alpha = L'_\alpha\phi + L\phi'_\alpha = \Delta\phi'_\alpha - u'_\alpha(y,\alpha)\phi - u(y,\alpha)\phi'_\alpha =$$

$$= \lambda'_\alpha\phi + \lambda\phi'_\alpha,$$

откуда следует, что

$$L'_\alpha = -u'_\alpha(y,\alpha). \tag{1.14}$$

Полагая $\lambda'_\alpha = 0$, получим

$$L\phi'_\alpha - u'_\alpha(y,\alpha)\phi - \lambda\phi'_\alpha = 0.$$

Подстановка $\phi'_\alpha = B\phi$ дает условие

$$L'_\alpha + [L,B] = 0, \tag{1.15}$$

необходимое для совместности (1.11) и (1.12) и совпадающее с (1.13) в силу (1.14).

Ниже в качестве B выбирается один из двух вариантов $B\phi = B_1\phi = (f(y),\nabla\phi)$ или

$$B\phi = B_3\phi = \nabla_a\nabla_b\nabla_c\phi + (f,\nabla\phi) + g\phi, \tag{1.16}$$

где a, b, $c \in R^n$ постоянные векторы, обеспечивающие, вместе с векторным полем $f(y) \in R^n$ и скалярной функцией $g(y) \in R^1$, выполнение соотношения (1.15), а $(\cdot,\cdot)$- скалярное произведение в R^n. Вычислим выражение для коммутатора $[L,B]$. Для $B = B_1$ получаем

$$\Delta(f,\nabla\phi) - u(f,\nabla\phi) - (f,\nabla[\Delta\phi - u\phi]) = (\Delta f,\nabla\phi) +$$

$$+2(\nabla f,\nabla^2\phi) + (f,\Delta\nabla\phi) - u(f,\nabla\phi) - (f,\nabla\Delta\phi) + (f,\nabla u)\phi + (f,u\nabla\phi).$$

Таким образом, выбрав $f(y)$ так, чтобы $\Delta f = 0$ и $\nabla f = 0$, то есть выбрав в качестве f постоянный вектор, мы получим соотношение (1.14) в виде

$$-u'_\alpha + (f,\nabla u) = 0.$$

Следовательно, функция $u(y,\alpha)$ должна иметь вид $u(y,\alpha) = u(y+\alpha f)$ для того, чтобы потенциал вида $u(y+\alpha f)$ допускал выполнение соотношения (1.11), в котором λ является абсолютной константой.

Вычислим далее коммутатор $[L, B_3]$,

$$[L, B_3]\phi = 2(\nabla f, \nabla^2\phi) + 3(a, \nabla u)\nabla_b\nabla_c\phi + (\Delta f, \nabla\phi) +$$

$$+2(\nabla g, \nabla\phi) + 3\nabla_a\nabla_b u\nabla_c\phi + [\Delta g + \nabla_a\nabla_b\nabla_c u + (f, \nabla u)]\phi, \qquad (1.17)$$

полагая векторы a, b, c постоянными. Приравнивая нулю коэффициенты при первых и вторых производных функции ϕ по пространственным переменным, получим соотношения

$$2\frac{\partial f_i}{\partial y_j} + 3\nabla_a u b_i c_j = 0 \qquad (1.18)$$

и

$$\Delta f + 2\nabla g + 3\nabla_a\nabla_b u c = 0. \qquad (1.19)$$

Подставляя (1.18)–(1.19) в (1.11), приходим к соотношению

$$-u'_\alpha + \Delta g + \nabla_a\nabla_b\nabla_c u + (f, \nabla u) = 0 \qquad (1.20)$$

Вычисляя дивергенцию левой и правой части (1.19) получаем равенство

$$\Delta g = -\frac{1}{2}\Delta \operatorname{div} f - \frac{3}{2}\nabla_a\nabla_b\nabla_c u, \qquad (1.21)$$

тогда как из (1.18) следует, что

$$\operatorname{div} f = \frac{3}{2}\nabla_a u(b, c). \qquad (1.22)$$

Подставляя, наконец, (1.21) и (1.22) в (1.20), и обозначив $q = \frac{3}{2}a(b, c)$, получим замкнутое уравнение для функции $u(y, \alpha)$, зависящее от векторных параметров a, b, c,

$$u'_\alpha + \frac{3}{4}(b, c)\Delta\nabla_a u - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b\nabla_c u - (uq, \nabla u) = 0. \qquad (1.23)$$

Поскольку при выводе (1.23) мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} = \frac{3}{2}\nabla_a u b_i c_j,$$

это позволяет выбрать $f = qu$. Уравнение (1.23) представляет собой многомерную версию уравнения КдФ. Нетрудно проверить, что в одномерном случае оно превращается в классический вариант КдФ при следующем выборе параметров $a = 4$, $b = 1$, $c = 1$.

Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть потенциал $u(y,\alpha)$ уравнения* (1.10) *удовлетворяет уравнению* (1.23). *Тогда собственные числа оператора $L = \Delta - u(y,\alpha)$ не зависят от параметра α.*

Для того, чтобы установить связь между уравнением КдФ и поведением меры $\mu(\alpha,t,dy)$ заданной на борелевской σ-алгебре пространства R^n, плотность $\mu(\alpha,t,y)$ которой по мере Лебега представима в виде

$$\mu(\alpha,t,y) = E\nu(y-\xi(t))\exp\left[-\int_0^t u(\alpha,\xi(s))ds\right].$$

Заметим, что она удовлетворяет уравнению теплопроводности с потенциалом $-u$ в пространстве мер. Повторяя описанные выше рассуждения на языке уравнений для мер, мы получим, что решение соответствующей краевой задачи также можно искать в виде (1.7), где “собственные меры” $\mu_k(\alpha,dy)$ удовлетворяют эллиптическому уравнению вида

$$\Delta\mu = [\lambda + u(y,\alpha)]\mu, \tag{1.24}$$

если понимать производную от меры в следующем смысле

$$\int_{R^n} \nabla_h\phi(x)\mu(dx) = -\int_{R^n} \phi(x)\nabla_h\mu(dx)$$

для любого (постоянного) вектора $h \in R^n$ (см., например, [6]). Рассмотренная выше задача может быть переформулирована как задача вывода условий на потенциал $u(\alpha,y)$, при которых λ в (1.24) не зависит от α и решена точно также, как это было сделано выше.

Для того, чтобы найти выражение, описывающее логарифмическую производную меры $\mu(\alpha,dy)$ по параметру α, воспользуемся методом, аналогичным классическому методу Дарбу [1]. Этот метод позволит наряду с выводом многомерного аналога КдФ получить и соотношения описывающие логарифмическую производную меры $\mu(\alpha,dy)$ по параметру α.

Пусть $\rho_\mu(\alpha,y) = \frac{\nabla\mu(\alpha,dy)}{\mu(\alpha,dy)}$ обозначает логарифмическую производную меры $\mu(\alpha,dy)$, удовлетворяющей (1.24). Рассмотрим производную $\mu'_\alpha(\alpha,dy)$ по параметру α, покажем, что она абсолютно непрерывна относительно самой меры $\mu(\alpha, dy)$ и выведем выражение для логарифмической производной

$$\kappa(\alpha, y) = \frac{\mu'_\alpha(\alpha, dy)}{\mu(\alpha, dy)}.$$

Теорема 1.2. *Пусть мера $\mu(\alpha, dy)$ удовлетворяет уравнению (1.24), а потенциал в (1.24) подчиняется уравнению*

$$u'_\alpha + \frac{a}{2}\Delta^2 u + 2a\nabla^2 u \circ [\nabla\rho_\mu + \rho_\mu \otimes \rho_\mu]) + a(\nabla u, \nabla u) = 0. \qquad (1.25)$$

Тогда $\mu(\alpha, dy)$ дифференцируема по α и ее логарифмическая производная $\kappa(y, \alpha)$ по параметру α допускает представление

$$\kappa = -\frac{a}{2}[\Delta u + 2(\nabla u, \rho_\mu)] \qquad (1.26)$$

где a- некоторая константа.

Доказательство. Воспользуемся многомерным аналогом метода Дарбу, примененным ранее в работах [3, 4].

Пусть $\rho_\mu(\alpha, y) = \frac{\nabla\mu(\alpha, dy)}{\mu(\alpha, dy)}$ обозначает логарифмическую производную меры $\mu(\alpha, dy)$, удовлетворяющей (1.24). Рассмотрим производную $\mu'_\alpha(\alpha, dy)$ по параметру α и покажем, что она абсолютно непрерывна относительно самой меры $\mu(\alpha, dy)$. Представим меру $\mu'_\alpha(\alpha, dy)$ в виде

$$\mu'_\alpha(\alpha, dy) = \kappa(\alpha, y)\mu(\alpha, dy)$$

и будем искать $\kappa(\alpha, y)$ в виде

$$\kappa(\alpha, y) = [Q(y, \alpha) + (q(y, \alpha), \rho_\mu(\alpha, y))].$$

Переписав $\mu'_\alpha(\alpha, dy) = \kappa(\alpha, y))\mu(\alpha, dy)$ в виде

$$\mu'_\alpha(\alpha, dy) = Q(y, \alpha)\mu(\alpha, dy) + (q(y, \alpha), \nabla\mu(\alpha, dy)), \qquad (1.27)$$

покажем, что одним из условий существования постоянной λ, для которой имеет место (1.24) при всех α, является требование, чтобы потенциал $u(y, \alpha)$ удовлетворял некоторому нелинейному уравнению, совпадающему в одномерном случае с уравнением КдФ. С этой целью мы применим к (1.27) оператор Δ, а (1.24) продифференцируем по переменной α. При этом мы получим соотношение

$$\Delta Q\mu + 2(\nabla Q, \nabla\mu) + Q(\lambda + u)\mu + (\Delta q, \nabla\mu) +$$

$$+2\nabla q \circ [\nabla \rho_\mu + \rho_\mu \otimes \rho_\mu]\mu + (q, \nabla u)\mu + [u+\lambda](q, \nabla \mu) =$$
$$= -u'_\alpha \mu - (\lambda + u)[Q\mu + (q, \nabla \mu)], \tag{1.28}$$

где использовано обозначение $\beta \circ \gamma = \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik}\gamma_{ik}$.

Приравнивая коэффициенты при μ и $\nabla \mu$ в (1.28), мы приходим к равенствам

$$\Delta Q + 2\nabla q \circ [\nabla \rho_\mu + \rho_\mu \otimes \rho_\mu] + (q, \nabla u) + u'_\alpha = 0, \tag{1.29}$$
$$\Delta q + 2\nabla Q = 0.$$

Используя, наконец, последнее соотношение, мы получим

$$\frac{1}{2}\Delta \operatorname{div} q + 2\nabla q \circ [\nabla \rho_\mu + \rho_\mu \otimes \rho_\mu] + (q, \nabla u) + u'_\alpha = 0.$$

Выбирая $q(y) = a\nabla u(y)$, где a – константа, мы получим следующее уравнение

$$u'_\alpha + \frac{a}{2}\Delta^2 u + 2a\nabla^2 u \circ [\nabla \rho_\mu + \rho_\mu \otimes \rho_\mu]) + a(\nabla u, \nabla u) = 0.$$

В случае $n = 1$ ситуация несколько упрощается. С одной стороны, из (1.24), (1.27) в этом случае следует соотношение

$$\frac{1}{2}q'''_{yyy} + 2(u+\lambda)q'_y + qu'_y + u'_\alpha = 0.$$

С другой стороны, выбирая $q(y) = 2u(y) - 4\lambda$, мы получим соотношение

$$u'_\alpha + 6uu'_y + u'''_{yyy} = 0, \tag{1.30}$$

совпадающее с уравнением Кортевега-де-Фриза.

Итак, если имеет место (1.29), то справедливо равенство

$$\mu'_\alpha = a[(\nabla u, \rho_\mu) - \frac{1}{2}\Delta u]\mu,$$

означающее, что мера $\mu'_\alpha(dy, \alpha)$ абсолютно непрерывна относительно $\mu(dy, \alpha)$ и соответствующая производная Радона–Никодима (логарифмическая производная по параметру) имеет вид

$$\kappa = a[(\nabla u, \rho_\mu) - \frac{1}{2}\Delta u].$$

В одномерном случае при выполнении (1.30), мы получаем

$$\kappa(y) = 2[(u(y) - 2\lambda)\rho_\mu(y) - u'_y(y) + a],$$

где a – некоторая константа.

2. Диффузионный процесс, связанный с уравнением Кадомцева–Петвиашвили

Рассмотрим диффузионный процесс $\xi(t)$, связанный с уравнением Кадомцева–Петвиашвили (К–П). Пусть $w(t) \in R^2$ – винеровский процесс, $\xi(t) \in R^2$ – случайный процесс вида

$$\xi(t) = x + mt + Aw(t), \quad x = (x_1, x_2) \in R^2. \tag{2.1}$$

Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$ имеет компоненты $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$, а вектор $m \in R^2$ имеет вид $m = (0, q)$. Прямое уравнение Колмогорова для процесса $\xi(t)$, заданного соотношением (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + q\frac{\partial \phi}{\partial y} + u(x, y, \alpha)\phi = 0. \tag{2.2}$$

Будем искать решение задачи Коши для этого уравнения в виде

$$\phi(t, x, y, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k t}\phi_k(x, y, \alpha),$$

где ϕ_k нормированы условием

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k^2(x, y)dxdy = 1.$$

При этом $\phi_k(x, y, \alpha)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + q\frac{\partial \phi}{\partial y} = [\lambda - u(x, y, \alpha)]\phi,$$

пара Лакса, соответствующая этой задаче, имеет вид

$$L\phi = D_{xx}^2\phi + qD_y\phi + u\phi,$$

$$B\phi = a_1 b_1 c_1 D_{xxx}^3\phi + f_1 D_x\phi + f_2 D_y\phi + g\phi, \tag{2.3}$$

где q, a_1, b_1, c_1 – константы, а $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $g(x, y)$ скалярные функции, которые предстоит выбрать. Покажем, что при специальном выборе этих параметров уравнение (1.7) совпадает с уравнением Кадомцева–Петвиашвили

$$D_x[u'_\alpha + 6uD_x u + D_{xxx}^3 u] = -3q^2 D_{yy}^2 u, \tag{2.4}$$

если L, B заданы соотношениями (2.3). Вычислим для этого коммутатор

$$[L,B]\phi=[D^2_{xx}+qD_y+u][a_1b_1c_1D^3_{xxx}+f_1D_x+f_2D_y+g]\phi-$$
$$-[a_1b_1c_1D^3_{xxx}+f_1D_x+f_2D_y+g][D^2_{xx}+qD_y+u]\phi=$$
$$=[2D_xf_1D^2_{xx}\phi+2D_xf_2D^2_{xy}\phi--3a_1b_1c_1D_xuD^2_{xx}\phi]+$$
$$+[2D_xgD_x\phi-3D^2_{xx}ua_1b_1c_1D_x\phi+qD_yf_1D_x\phi+qD_yf_2D_y\phi]+$$
$$+[D^2_{xx}g+qD_yg-a_1b_1c_1D^3_{xxx}u]\phi. \tag{2.5}$$

Для того, чтобы получить замкнутое уравнение для функции $u(x,y,\alpha)$, приравняем нулю коэффициенты при первых и вторых производных функции ϕ по пространственным переменным в (2.5). В результате получим соотношения

$$2D_xf_1D^2_{xx}\phi+2D_xf_2D^2_{xy}\phi-3a_1b_1c_1D_xuD^2_{xx}\phi=0,$$
$$D^2_{xx}f_1D_x\phi+D^2_{xx}f_2D_y\phi+qD_yf_1D_x\phi+qD_yf_2D_y\phi-$$
$$-3D^2_{xx}a_1b_1c_1D_x\phi+2D_xgD_x\phi=0. \tag{2.6}$$

В силу (2.6), мы можем выбрать

$$f_2(x,y)=\kappa=\mathrm{const},\quad D_xf_1=\frac{3}{2}a_1D_xu, \tag{2.7}$$

так что $f=(f_1,f_2)=(\frac{3a_1}{2}u,\kappa)$. Из (2.3)–(2.5) вытекает соотношение

$$D^3_{xxx}u-\frac{3a_1}{2}uD_xu-\kappa D_yu+D^2_{xx}g+qD_yg+u'_\alpha=0. \tag{2.8}$$

Перепишем далее уравнение Кадомцева–Петвиашвили в виде

$$D_xu'_\alpha+6D_xuD_xu+6uD^2_{xx}u+D^4_{xxxx}u+3q^2D^2_{yy}u=0 \tag{2.9}$$

и вычислим производную по пространственной переменной x уравнения (2.8). В результате получим уравнение

$$D^4_{xxxx}u+\frac{3a_1}{2}D_xuD_xu+\frac{3a_1}{2}uD^2_{xx}u+$$
$$+\kappa D^2_{xy}u+D^3_{xxx}g+qD^2_{xy}g+D_xu'_\alpha=0. \tag{2.10}$$

Вычисляя далее $D^3_{xxx}g$ и $D^2_{xy}g$ из (2.5), (2.6) и подставляя полученные выражения в (2.10), остается лишь подобрать константы a_1, b_1, c_1 так, чтобы выполнялись соотношения

$$-\frac{1}{2}(1+q)+3qb_1c_1=0, \quad a_1=4$$

и заметить, что при таком выборе констант (2.8) и (2.10) совпадают. Таким образом, функция $u(x,y,\alpha)$, удовлетворяющая (2.10) с указанным выше выбором параметров, подчиняется уравнению К–П.

Обобщая описанные выше случаи, рассмотрим многомерный диффузионный процесс вида

$$\xi(t)=\xi_0+ht+\sqrt{2}w(t)\in R^n$$

и скалярный мультипликативный функционал от него порожденный линейным уравнением

$$d\eta=u(\xi(t))\eta(t)dt.$$

Цоответствующая ему пара Лакса имеет вид

$$L\phi=\Delta\phi+(h,\nabla\phi)+u\phi, \tag{2.11}$$

$$B\phi=\nabla_a\nabla_b\nabla_c\phi+(f,\nabla\phi)+g\phi \tag{2.12}$$

где h – заданное постоянное векторное поле, a, b, c – постоянные векторные поля, которые предстоит подобрать, также как и скалярную функцию $g(x)$ и векторную функцию $f(x)$. Подбирать параметры мы будем так, чтобы выполнялось уравнение вида (1.7). Вычислим коммутатор $[L,B]$

$$[L,B]\phi=[2\nabla_f\nabla_h\phi)-3\nabla_a u\nabla_b\nabla_c\phi]+$$

$$+[\nabla f\nabla_h\phi-3\nabla_a\nabla_b u\nabla_c\phi]-[\nabla_a\nabla_b\nabla_c u+\nabla_f u-\Delta g-\nabla_h g]\phi. \tag{2.13}$$

Для того, чтобы определить параметры оператора B, приравняем нулю коэффициенты при первых и вторых производных функции ϕ.

$$2\nabla_i f_j-3a_ib_j\nabla_c u=0, \quad i,j=1,\dots,n, \tag{2.14}$$

$$\Delta f_i+2\nabla_i g+2\sum_j^n(\nabla_i f_j\nabla_i\nabla_j\phi-3\nabla_b\nabla_a uc_i)=0, \tag{2.15}$$

откуда

$$\Delta g + \nabla_h g - \nabla_a \nabla_b \nabla_c u - \nabla_f u = 0. \qquad (2.16)$$

Из соотношения (2.14) следует, что

$$\nabla_i f_j = -\frac{3}{2} \nabla_a u b_i c_j, \qquad (2.17)$$

$$\Delta f_j = -\frac{3}{2} \nabla_a \nabla_b u c_j$$

и, после подстановки последних соотношений в (2.16), что

$$\nabla_i g = -\Delta f_i + 3 \nabla_a \nabla_b u c_i,$$

$$\Delta g = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_i \Delta f_i + 3 \nabla_c \nabla_a \nabla_b u = \frac{3}{2} \nabla_c \nabla_a \nabla_b u. \qquad (2.18)$$

Наконец, подставляя (2.17) и (2.18) в (2.15), получим

$$[L, B] = \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b \nabla_c u + \frac{9}{2} \nabla_a \nabla_b u(c, h) - \nabla_{F(u)} u,$$

где $f = F(u)$ определяется из (2.17). При этом уравнение для $u(x, \alpha)$ имеет вид

$$-u'_\alpha + \frac{1}{2} \nabla_a \nabla_b \nabla_c u + \frac{9}{2} \nabla_a \nabla_b u(c, h) - \nabla_f u = 0.$$

Заметим, что в одномерном случае соответствующее уравнение имеет вид

$$-u'_\alpha + \frac{a}{2} u''' + \frac{9}{2} a u'' - \frac{3}{2} a u u' = 0.$$

3. Вероятностная интерпретация уравнения Шварца и его обобщений

В работе [3] были изучены условия абсолютной непрерывности мер, порожденных диффузионными процессами в R^n и их мультипликативными функционалами, при выполнении которых удавалось вывести уравнение для соответствующей производной Радона–Никодима, не используя явно меры в пространстве траекторий. Для вывода соответствующей производной Радона–Никодима было построено обобщенное преобразование Дарбу. Кроме того, в [4] было показано, что при определенных условиях на диффузионные коэффициенты стационарная мера, порожденная распределением диффузионного процесса и его мультипликативным функционалом обладает логарифмической производной, подчиняющейся многомерному уравнению Риккати.

В этом параграфе мы выведем уравнение, которому удовлетворяет производная Радона–Никодима $\eta(t,y)$ пары абсолютно непрерывных мер $\mu_k(t,dy)$, порожденных распределениями диффузионных процессов $\xi_k(t)$, $k=1,2$ удовлетворяющих уравнению вида (1.1) с различными начальными условиями и их мультипликативными функционалами, а также соответствующими стационарными распределениями, если они существуют. В одномерном случае мы выведем замкнутое уравнение для стационарной функции $\eta(y)$ и покажем, что при соответствующем выборе коэффициентов оно совпадает с классическим уравнением Шварца [8].

Пусть $\xi_k(t)$ – сильные решения стохастического уравнения (1.1),

$$d\xi_k = a(\xi_k(t))dt + A(\xi_k(t))dw, \tag{3.1}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\xi_k(0) = \kappa_k \in R^n, \quad k=1,2. \tag{3.2}$$

Рассмотрим меры

$$\mu_k(t,dy) = E\exp\left\{\int_0^t c(\xi_k(s))\nu_k(dy-\xi_k(t)), \quad k=1,2. \right. \tag{3.3}$$

Как нетрудно проверить, они представляют собой решения следующей задачи Коши

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \nabla_{A^j}(A^j\mu^k) - a\mu\right] + c\mu, \quad \mu(0,dy)=\nu^k(dy). \tag{3.4}$$

Предположим что плотности $\mu_k(t,y)$ мер $\mu_k(t,dy)$ вида (3.3) относительно меры Лебега интегрируемы с квадратом и допускают разложение

$$\mu_k(t,y) = \sum_{m=1}^\infty \beta_m e^{\lambda_n t}\mu_{km}(y), \tag{3.5}$$

коэффициенты β_m которого определяются начальными значениями $\mu_k(0,y)$. Тогда, меры $\mu_{km}(dy)$ удовлетворяют уравнению вида

$$\operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\nabla_{A^j}(A^j\mu)-a\mu\right]+(c-\lambda)\mu=0. \tag{3.6}$$

Обозначим $\eta(t,y)=\frac{\mu_1(t,dy)}{\mu_2(t,dy)}$, $(\operatorname{div}B)_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_{ij}(y)}{\partial y_j}$ и пусть $\rho_\mu=\frac{\nabla\mu}{\mu}$ обозначает логарифмическую производную меры μ. Выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $\eta(t,y)$. Прямые вычисления показывают, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты уравнений (3.1), (3.2) удовлетворяют условиям, гарантирующим существование непрерывных ограниченных производных у мер $\mu_k(t,dy)$ вида (3.3). Тогда функция $\eta(t,y)=\frac{\mu_1(t,dy)}{\mu_2(t,dy)}$ удовлетворяет следующей задаче Коши*

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{1}{2}A^*\eta''A+\nabla_p\eta+q\eta,\quad \eta(0,y)=\frac{\nu^1(dy)}{\nu^2(dy)}, \tag{3.8}$$

где $p=-a+\operatorname{div}B-B\rho_{\mu_2}$, $q=-\operatorname{div}a+\frac{1}{2}\operatorname{div}(\operatorname{div}B)+c$.

Ниже мы покажем, что при $n=1$ производная Радона–Никодима мер, определяемых соотношениями (3.5), (3.6) при соответствующем выборе коэффициентов, удовлетворяет замкнутому уравнению – классическому уравнению Шварца.

Напомним, что в случае постоянных коэффициентов диффузии $A(y)=A$ логарифмическая производная $\rho_{\mu_2}(t,y)$ меры $\mu_2(t,dy)$ вида (3.3) определяется соотношениями

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A^*\rho''A+(B\rho,\nabla)\rho-$$
$$\nabla a\rho-(a_2,\nabla\rho)-\nabla\operatorname{div}a_2+\nabla c_2,\quad \rho(0,y)=\rho_{\nu_2}(y),$$

а вектор-функция $u(t,y)=-B\rho(t,y)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u,\nabla)u=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}A^*u''A+(a,\nabla u)+B\nabla\operatorname{div}a+\nabla_u a-B\nabla c \tag{3.9}$$

и условию

$$u(0,y)=-B\rho(0,y).$$

При этом, если существует стационарное решение уравнения (3.9), то оно совпадает с градиентом решения уравнения Риккати

$$\operatorname{div} u-(B^{-1}u,u)+(a,B^{-1}u)-c+\operatorname{div} a=0. \tag{3.10}$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению одномерного случая, полагая в (3.1)–(3.3) $n=1$ и напомним как определяются оператор Шварца и уравнение Шварца.

Мы начнем с определения оператора Шварца и связанных с ним конструкций.

Пусть $f:R^1\to R^1$ функция вещественного аргумента y. Оператор

$$[S(f)](y)=\left(\frac{f''(y)}{f'(y)}\right)'-\frac{1}{2}(\frac{f''(y)}{f'(y)})^2$$

называется производной Шварца (или оператором Шварца). Ниже нам понадобится также следующее представление

$$S(\eta)=\frac{\eta'''}{\eta'}-\frac{3}{2}(\frac{\eta''}{\eta'})^2 \tag{3.11}$$

Оператор S обладает важными свойствами – он инвариантен относительно группы дробно-линейных преобразований функции η и преобразуется как квадратичный дифференциал при дробно-линейных преобразованиях аргумента.

Оператор S тесно связан с ОДЕ второго порядка вида

$$B(y)\mu''(y)+p(y)\mu'(y)+q(y)\mu(y)=0. \tag{3.12}$$

Для того, чтобы показать это, рассмотрим два линейно независимых решения $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$ уравнения (3.12) и обозначим

$$\eta(y)=\frac{\mu_1(y)}{\mu_2(y)} \tag{3.13}$$

их отношение. Проверим, что $\eta(y)$ удовлетворяет уравнению Шварца

$$S(\eta)=2\frac{q}{B}-\frac{p^2}{2B^2}-\frac{pB'}{B^2}. \tag{3.14}$$

Из соотношений

$$B\mu_1''+p\mu_1'+q\mu_1=0,\quad B\mu_2''+p\mu_2'+q\mu_2=0$$

следует, что

$$B(\mu_1''\mu_2 - \mu_2''\mu_1) + p(\mu_1'\mu_2 - \mu_1\mu_2') = 0. \tag{3.15}$$

Дифференцируя (3.3), получаем с учетом (3.5) что

$$\frac{\eta''}{\eta'} = -\frac{p}{B} - 2\frac{\mu_2'}{\mu_2}. \tag{3.16}$$

Дифференцируя (3.16), получаем

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -\frac{p'}{B} + \frac{pB'}{B^2} - 2\frac{\mu_2''}{\mu_2} + 2\left(\frac{\mu_2'}{\mu_2}\right)^2.$$

Наконец, принимая во внимание (3.16), получаем

$$S(\eta)(y) = -\frac{p^2(y)}{2B^2(y)} - \frac{p'(y)}{B(y)} - \frac{p(y)B'(y)}{B^2(y)} - 2\frac{\mu_2''(y)}{\mu_2(y)} - 2\frac{p(y)}{B(y)}\frac{\mu_2'(y)}{\mu_2(y)}. \tag{3.17}$$

В силу (3.12) сумма членов, зависящих от μ_2 в правой части, равна величине $2\frac{q(y)}{B(y)}$. В результате мы приходим к соотношению

$$S(\eta)(y) = 2\frac{q(y)}{B(y)} - \frac{p^2(y)}{2B^2(y)} - \frac{B'(y)}{B(y)} - \frac{p(y)B'(y)}{B^2(y)}.$$

Отметим далее связь между уравнениями Шварца и Риккати. Напомним, что уравнение Риккати связано с уравнением (3.12). Действительно, если $\mu_2(y)$ удовлетворяет (3.12), то $u(y) = -B(y)\frac{\mu_2'}{\mu_2}$, удовлетворяет уравнению Риккати

$$Bu' - u^2 + pu - Bq = 0. \tag{3.18}$$

Для того, чтобы установить связь между уравнением Шварца (3.14) и уравнением Риккати (3.18), заметим, что из (3.16) следует равенство

$$u(y) = -\frac{B(y)}{2}\frac{\eta''(y)}{\eta'(y)} - \frac{1}{2}p(y). \tag{3.19}$$

При этом (3.19) связывает решения (3.17) и (3.18). Для того, чтобы доказать это рассмотрим произвольное решение $\eta(y)$ уравнения (3.17) и, подставив (3.19) в (3.18), проверим, что $u(y)$ удовлетворяет уравнению Риккати. С другой стороны, пусть $u(y)$ удовлетворяет (3.18). Подставляя в (3.16)

$$u(y) = \frac{-B(y)\mu_2'(y)}{\mu_2(y)}$$

можно найти выражение для $\eta'(y)$ в виде

$$\eta'(y) = \exp\left\{ -\int \left(\frac{p(y) - 2u(y)}{B(y)}\right) dy \right\}. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.20) в (3.17) и используя (3.18), нетрудно проверить, что η удовлетворяет уравнению Шварца (3.17).

Возвращаясь к рассмотрению мер (3.3) заметим, что $\mu_k(dy)$, удовлетворяют соотношениям (3.12) при $p = -a + B'$, $q = c - a' + \frac{1}{2}B''$ и (в силу проведенных выше рассуждений) для них справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть меры $\mu_k(dy)$ заданы соотношением соотношениями* (3.6), (3.7) *при $n = 1$. Тогда функция $\eta(y)$ вида* (3.13) *удовлетворяет уравнению Шварца* (3.14)*м где $p = -a + \operatorname{div} B - B\rho_{\mu_2}$, $q = -\operatorname{div} a + \frac{1}{2}\operatorname{div}(\operatorname{div} B) + c - \lambda$.*

В заключение мы используем технику этого параграфа для того, чтобы вывести уравнение для логарифмической производной по параметру α плотности $\psi(t, y, \alpha)$ (относительно меры Лебега) меры $\Psi(t, dy, \alpha)$, удовлетворяющей (1.6). Другой подход к вычислению логарифмической производной по параметру был рассмотрен в параграфе 1.

Рассмотрим решение $\phi(t, y, \alpha)$ уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Delta\phi - u(y, \alpha)\phi, \tag{3.18}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\phi(0, y) = \nu(y) - \gamma(y),$$

В предположении гладкости всех параметров задачи ее решение $\phi(t, y, \alpha)$ обладает ограниченными производными по аргументам t, y.

Выведем уравнение, которому удовлетворяет логарифмическая производная решения задачи (3.14) по параметру α.

Теорема 3.3. *Пусть при любом вещественном α функция $u(y, \alpha)$ – гладкая и ограниченная. Тогда решение задачи* (3.18) *обладает логарифмической производной по параметру α, удовлетворяющей линейному параболическому уравнению*

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\kappa - (\nabla\kappa, \rho_\phi) - \frac{\|\rho_\phi\|^2}{2}\kappa + u'_\alpha. \tag{3.19}$$

Доказательство проводится с помощью формальных вычислений.

Аналогичное уравнение можно вывести и для логарифмической производной по параметру меры вида (3.3). Полученное уравнение можно исследовать независимо и использовать результаты этого исследования для доказательства существования логарифмической производной меры по парамеру и изучения ее поведения.

Литература

1. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи.* Мир, Москва (1987).
2. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов.* Мир, Москва (1983).
3. M. Kac, P. van Moerbeke, *Some probabilistic aspects of scattering theory.* in: "Functional integration and its applications," ed. Arthurs, Oxford Univ. Press, (1975) pp. 87–96.
4. Я. И. Белопольская, *Гладкие диффузионные меры и их преобразования.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **260** (1999), 31–50.
5. Ya. Belopolskaya, *Smooth diffusion measures and their transformations.* Prepr.N 628 SFB 256, Univ. of Bonn, 1999 pp. 1–25.
6. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* Наука, М. (1983).
7. Я. И. Белопольская, *Гладкие меры и нелинейные уравнения математической физики.* — Проблемы математического анализа в. **15** (1995), 70–83.
8. М. И. Зеликин, *Однородные подпространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении.* Изд. Факториал (1998).

Belopolskaya Ya. I. Nonlinear equations in diffusion theory.

Connections between diffusion random processes and some classical nonlinear equations of mathematical physics, the solution theory, in particular, are investigated. It is shown that the solution theory equations select one-parameter families of absolutely continuons transformations of diffusion measures and make possible computation of the logarithmic derivatives of the corresponding measures with resect to the parameter.

СПбГАСУ

Поступило 15 декабря 2000 г.