Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

М. С. Ермаков

О ВЕРОЯТНОСТЯХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Постановка задачи. Основные предположения. Пусть $F \subseteq B$ – два сепарабельных банаховых пространства и $|\cdot|_F, |\cdot|_B$ – нормы в F и B соответственно такие, что $|x|_F \geqslant |x|_B$ для всех $x \in F$.

Пусть $X_1, \dots, X_n \in F$ независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностные распределения $L(X_1), \dots, L(X_n)$ соответственно и пусть $EX_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим $S_n = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n)$. Зафиксируем вектор $v \in F$, $|v|_B = 1$ и зададим последовательности $r_n > r_0 > 0$ и $d_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

В работах Бенткуса [1] и Бенткуса и Рачкаускаса [3] были доказаны теоремы о точной асимптотике вероятностей больших уклонений $P(|S_n|_B > r_n)$, когда $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Доказательство не использовало стандартную технику преобразований Лапласа и Фурье (см. Ибрагимов и Линник [8], Петров [11] и др.). Оно основывалось на применении формулы Тейлора, свойствах предельного гауссовского распределения и итерациях оценок относительно объема выборки n. Ранее аналогичный подход использовался для получения оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме (см. Bergstrem [4]; Kuelbs, Kurtz [9]; Паулаускас [10]; Бенткус, Рачкаускас [2]; Bolthausen [5]; Gotze [7] и др.).

В настоящей работе мы показываем, что техника развитая в работе Бенткуса и Рачкаускаса [3] может быть применена для нахождения точных асимптотик $P(|S_n - d_n v|_B < r)$, $r_0 < r < r_n$ и $P(|S_n - d_n v|_B > r)$, когда центры шаров $d_n v$ удаляются от нуля вместе с ростом объема выборки. Работа Бенткуса и Рачкаускаса [3] опирается на ряд предположений о свойствах функций распределений нормы гауссовской случайной величины с центром в

Работа частично поддержана грантом РФФИ “Ведущие научные школы” 00-15-96019 и грантом РФФИ 99-01-00160.

нуле. Мы исследуем аналогичные свойства распределений норм гауссовских случайных величин с центрами в произвольных точках. В последующей работе результаты будут применены для изучения точной асимптотики вероятностей больших уклонений ошибок второго рода непараметрических критериев типа омега-квадрат.

Условимся обозначать буквами C, c и C, c с индексами различные постоянные. Обозначим $[a]$ целую часть a для любого $a \in R^1$; $\chi(x \in A)$ – индикатор множества A и

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt$$

функцию стандартного нормального распределения.

Зафиксируем γ, $0 < \gamma < 1$ и обозначим s наибольшее целое число такое, что $s < (2-\gamma)/(1-\gamma)$.

Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия.

A. Для любого $h > 0$ конечно $E(|X|_F^{s+1} \exp\{h|X|_B^{\gamma}\}) < \infty$.

B0. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ предгауссовские. Это означает, что существует гауссовская случайная величина $Y \in F$ такая, что ковариации X_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ и Y совпадают, иначе говоря, $E(f_2(X_k)) = E(f_2(Y))$, $1 \leqslant k \leqslant n$, для любой непрерывной квадратичной формы $f_2 : F \to R^1$. Более того, если $\gamma > 1/2$, то $E(f_m(X_k)) = E(f_m(Y))$, $1 \leqslant k \leqslant n$, для каждой непрерывной формы степени m $f_m : F \to R^1$, $1 \leqslant m \leqslant s$.

Обозначим $V_r(u)$ шар в B радиуса $r > 0$ ц центром в точке $u \in B$. Для $0 < \epsilon < r$ положим $K_{\epsilon,r}(u) = V_{r+\epsilon}(u) \setminus V_{r-\epsilon}(u)$.

Следующие условия Б1 и Б2 будут использованы для оценок вероятностей $P(|S_n - d_n v|_B < r)$ и $P(|S_n - d_n v|_B > r)$ соответственно.

B1. Существует $\delta > 0$, $\delta < r_0$ и положительные постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 такие, что для любых $d > 0$, $\epsilon > 0$, $r - \epsilon > \delta$ выполнено

$$P(Y \in V_r(dv)) > a_2^{-1} \exp\{-b_1^2(d-r)^2\}, \tag{1.1}$$

$$P(Y \in K_{\epsilon,r}(dv)) \leqslant b_2\epsilon(b_2|d-r|+1)P(Y \in V_{r+\epsilon}(dv)), \tag{1.2}$$

$$P(Y \in V_{r+\epsilon}(dv)) < a_1 \exp\{b_1^2\epsilon|d-r|\}P(Y \in V_r(dv)). \tag{1.3}$$

B2. Существуют положительные постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 такие, что для любых $r > d > 0$, $r \geqslant \epsilon > 0$ выполнено

$$P(Y \notin V_r(dv)) > a_2^{-1} \exp\{-b_1^2(d-r)^2\}, \tag{1.4}$$

$$P(Y \in K_{\epsilon,r}(dv)) \leqslant b_2\epsilon(b_2|d-r|+1)P(Y \notin V_{r-\epsilon}(dv)), \tag{1.5}$$

$$P(Y \notin V_{r-\epsilon}(dv)) < a_1 \exp\{b_1^2\epsilon|d-r|\}P(Y \notin V_r(dv)). \tag{1.6}$$

Как следует из доказанной ниже теоремы 2.1, неравенства (1.1)–(1.6) выполнены для произвольной гауссовской случайной величины Y в банаховом пространстве, когда вектор v является допустимым сдвигом (в случае условия (1.5) надо дополнительно потребовать ограниченность плотности $P(|Y|_B > r)$ в нуле). При этом выбор $\delta > 0$ для (1.1)–(1.3) произволен. От него только зависят постоянные a_1, a_2, b_1, b_2. Постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 непосредственно фигурируют как параметры в условиях теорем. Поэтому неравенства (1.1)–(1.6) вынесены ввиде отдельных условий.

Определим множество $D^k(B/F)$ всех функций $f : B \to R^1$ таких, что для всех $h_1, \ldots, h_m \in F$, $x \in B, m \leqslant k$ существует m-я производная по Гато $f^{(m)}(x)$ такая что отображение $(h_1, \ldots, h_m) \to f^{(m)}(x)h_1 \ldots h_m : F \times \ldots \times F \to R^1$ m-линейно и непрерывно.

Введем условие.

C. Для любых r, $\epsilon > 0$ существует функция $f = f_{r,\epsilon} \in D^{s+1}(B/F)$ такая, что $0 \leqslant f \leqslant 1, f(x : |x|_B < r-\epsilon) = 0$, $f(x : |x|_B > r) = 1$ и для всех $x \in B$, $h \in F$, $1 \leqslant k \leqslant s+1$,

$$|f^{(k)}(x)h^k| < e\epsilon^{-k}|h|_F^k, \tag{1.7}$$

где постоянная $e > 0$ не зависит от r и ϵ.

2. Предварительные результаты. Из приводимой ниже теоремы 2.1 следует, что гауссовские случайные величины в банаховом пространстве удовлетворяют условиям $B1$, $B2$, при некоторых постоянных a_1, a_2, b_1, $b_2 > 0$, если вектор $v \in B$ является допустимым сдвигом.

Обозначим $F_d(r) = P(|Y - dv|_B < r)$.

Теорема 2.1. *Пусть Y гауссовская случайная величина в банаховом пространстве B. Тогда для любого допустимого сдвига $v \in B$*

и любого $\delta > 0$ найдутся такие постоянные $a_2 = a(\delta), c = c(\delta)$, что для всех $r > \delta$, $d > 0$

$$P(Y \in V_r(dv)) > a_2^{-1} \exp\{-c(d-r)^2\} \tag{2.1}$$

и

$$P(Y \notin V_r(dv)) > a_2^{-1} \exp\{-c(d-r)^2\}. \tag{2.2}$$

Существует такая постоянная $C = C(\delta)$, что

$$F_d'(r) = \frac{dF_d(r)}{dr} < CF_d(r)\sqrt{-2\ln F_d(r)} \tag{2.3}$$

и

$$F_d'(r) = \frac{dF_d(r)}{dr} < C(1-F_d(r))\sqrt{-2\ln(1-F_d(r))} \tag{2.4}$$

для всех $r > \delta > 0$.

Из (2.1), (2.3) и (2.2), (2.4) следует (1.2), (1.3) и (1.5), (1.6) соответственно для $r > \delta > 0$. Если $0 < r < \delta$, $\epsilon < r$, то (1.6) выполнено, так как существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$P(Y \notin V_r(dv)) < CP(Y \notin V_{r+\epsilon}(dv)),$$

а справедливость (1.5) вытекает из справедливости (1.5) для $d = 0$ (см. [3, неравенство (3.2)]) и ограниченности производной Радона–Никодима вероятностных мер случайных величин $Y - (d-r)v$ и Y (см. (2.5)) в шаре $V_{2\delta}(0)$. Отметим, что неравенство (3.2) в [3], а следовательно и (1.5) для произвольных $r > 0$ имеют место при дополнительном предположении, что плотность $P(|Y| > r)$ ограничена в нуле. Наконец остается заметить, что (2.2) справедливо для произвольных $r > 0$, что следует из его справедливости для $r > \delta > 0$.

Доказательство. Обозначим B^*-сопряженное банахово пространство непрерывных линейных функционалов g в B.

Определим линейное топологическое пространство $\overline{B}$, как пополнение B в топологии слабой сходимости относительно линейных функционалов из B^*. Назовем пространством измеримых линейных функционалов B_P^* замыкание B^* в $L_2(B, \mathcal{B}, P)$, где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств на B.

Определим корреляционный оператор $K : B_P^* \to B_P^*$ гауссовской меры P_Y случайной величины Y такой, что для всех f,

$g \in B^*$ имеет место

$$f(Kg) \doteq \int\limits_B f(x)g(x)P_Y(dx) \doteq < f,g > .$$

Как известно (см. Давыдов, Лифшиц, Смородина [6]), существуют оператор $I : B_P^* \to \overline{B}$ и сопряженный с ним $I^* : \overline{B} \to B_P^*$ такие, что

$$f(Ig) = < g, I^*f > \quad \text{и} \quad K = II^*.$$

Так как v допустимый сдвиг, то v допускает представление $v = Iz$, где $z \in B_P^*$.

Обозначим $P_{(d-r)v,Y}$ вероятностную меру случайной величины $Y-(d-r)v$. Мера $P_{(d-r)v,Y}$ абсолютно непрерывна относительно P_Y и имеет плотность распределения

$$\frac{dP_{(d-r)v,Y}}{dP_Y}(x) = \exp\left\{(d-r)z(x) - \frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z >\right\}. \tag{2.5}$$

Следовательно при $r > \delta$

$$F_d(r) = \int \exp\left\{(d-r)z(x) - \frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z > \right\}\chi(x \in V_r(rv))P_Y(dx) \geqslant$$

$$\int \exp\left\{(d-r)z(x) - \frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z >\right\}\chi(x \in V_\delta(\delta v))P_Y(dx) \geqslant$$

$$C\exp\left\{-\frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z > + o((d-r))\right\}. \tag{2.6}$$

и

$$1 - F_d(r) = P(|Y - dv|_B > r) =$$

$$\int \exp\left\{(d-r)z(x) - \frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z >\right\}\chi(x \notin V_r(rv))P_Y(dx) \geqslant$$

$$\int \exp\left\{(d-r)z(x) - \frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z >\right\}\chi(x \in V_\delta(-\delta v))P_Y(dx) \geqslant$$

$$C\exp\left\{-\frac{1}{2}(d-r)^2 < z,z > + o((d-r))\right\}. \tag{2.7}$$

так как $\delta > 0$ можно взять сколь угодно малым числом.

Из (2.6) и (2.7) следует (2.1) и (2.2) соответственно. Отметим, что оценки (2.6), (2.7) зависят только от разности $d-r$ при $r > \delta > 0$.

Обозначим Φ^{-1} функцию обратную к Φ.

Согласно теореме 11.1 в [6] функция $F_d(r)$ абсолютно непрерывна кроме может быть точки $r = 0$, дифференцируема за исключением точек из некоторого не более чем счетного исключительного множества Δ. В точках Δ функция F_d' имеет односторонние пределы и претерпевает скачки вниз. Согласно предложению 11.3 в [6] функция $\Gamma_d(r) = \Phi^{-1}(F_d(r))$ выпукла вверх и следовательно ее производные в точках $(c, \infty) \setminus \Delta$ равномерно ограничены.

Дифференцируя $\Gamma_d(r)$ по r, $r \in R^1 \setminus \Delta$, и используя стандартную асимптотику

$$\Phi(-r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

получаем, что функция $\frac{d\Gamma_d(r)}{dr}$ убывает по r, $r \in R^1 \setminus \Delta$,

$$\frac{d\Gamma_d(r)}{dr} = \frac{F_d'(r)}{F_d(r)\sqrt{-2\ln F_d(r)}}(1+o(1)) \tag{2.8}$$

при $d - r \to \infty$ и

$$\frac{d\Gamma_d(r)}{dr} = \frac{F_d'(r)}{(1-F_d(r))\sqrt{-2\ln(1-F_d(r))}}(1+o(1)) \tag{2.9}$$

при $r - d \to \infty$.

Из (2.8), (2.9), используя ограниченность $d\Gamma_d(r)/dr$, получаем (2.3) и (2.4) соответственно.

3. Основные результаты. Обозначим

$$G_k = L(X_k) - L(Y), \qquad G = (|G_1| + \ldots + |G_n|)/n,$$

где $|G_k|$ – вариация меры G_k, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\Psi(h) = \int\limits_F |x/h|_F^{s+1} \exp\{(|x|_B/h)^\gamma\} G(dx),$$

$$\nu = \inf\{h : \Psi(h) \leqslant 1\}. \tag{3.1}$$

Обозначим $a = \max\{a_1, a_2, 1\}$, $b = \max\{b_1, b_2\}$.

Положим
$$M_1 = \min\left\{Mb_1^{-2}; (b_1^2\nu^\gamma)^{1/(\gamma-2)}\right\},$$
где M удовлетворяет условию
$$\lambda_1(M) \doteq 9a^2e(M\nu)^{s+1}\exp\left\{\frac{5}{2}M^2b_1^{-2}\right\}/(s+1)! < 1.$$
Определим n_0 из условия $n_0 = \inf\{n : M_1R_{1n} > r_0\}$, где $R_{1n} = n^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}(1+1/n)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* A, B0, B1, C. *Тогда*
$$P(|S_n - d_nv|_B < r) < \kappa_nP(|Y - d_nv|_B < r) \tag{3.2}$$
для всех $r_0 < r < d_n < M_1R_{1n}$, $n \geqslant n_0$. *Здесь*
$$\kappa_n = \frac{\tau_1}{1-\lambda_1} + \kappa_{n_0}\lambda^{n-n_0}, \tag{3.3}$$
где $\lambda_1 = \lambda_1(M_1b_1^2)$, $\tau_1 = 3a + 2\lambda_1(M_1b_1^2)$, $\kappa_{n_0} = a\exp\left\{M_1^2b_1^2n_0^{\frac{\gamma}{2-\gamma}}\right\}$.

Обозначим $\tau_2 = 3a + 1.5\lambda_2$,
$$\lambda_2 = \lambda_2(M) = 4ea^2\exp\{2M^2b_1^{-2}\}(\nu M)^{s+1}b_1^{2s+2}/(s+1)!,$$
$$M_2 = \min\left\{Mb_1^{-2}; (b_1^2\nu^\gamma)^{1/(\gamma-2)}\right\},$$
$$\mu_1 = \mu_1(M) = 3a + 2^{s+1}eab_1^{2s+2}\Big((MM_2)^{s+1}|v|_F^{s+1} +$$
$$(\nu M)^{s+1}\Big)\exp\{M^2b_1^{-2}\}/(s+1)!.$$
где M удовлетворяет условию $\lambda_2(M) < 1$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* A, B0, B2, C. *Тогда*
$$P(|S_n - d_nv|_B > r) < \mu_nP(|Y - d_nv|_B > r) \tag{3.4}$$
для всех $d_n < r_n = M_2R_{2n}$, $0 < r < d_n + M_2R_{2n}$, $R_{2n} = n^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}$. *Здесь*
$$\mu_n = \frac{\tau_2}{1-\lambda_2} + \mu_1\lambda_2^{n-1}.$$

Отметим, что при доказательстве теорем 3.1 и 3.2 не используются условия (1.2), (1.5) и следовательно можно не требовать их выполнения в условиях этих теорем.

Будем обозначать через θ числа, для которых $|\theta| < 1$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* A, B0, B1, C. *Тогда*

$$P(|S_n - d_n v|_B < r) < P(|Y - d_n v|_B < r)\times$$

$$\Big(1 + \theta\kappa_n (T/M)^{(s+1)/(s+2)}\Big) \tag{3.5}$$

для всех $r_0 + \widetilde{r}_n < r < d_n < M_1 R_{1n}$ *и* $n > n_0$. *Здесь* $\widetilde{r}_n = n^{\frac{1-s}{2s+4}} M^{-\frac{s+1}{s+2}} (b_2^2 |d_n - r| + b_2)^{-\frac{1}{s+2}}$.

Пусть выполнены условия A, B0, B2, C. *Тогда*

$$P(|S_n - d_n v|_B > r) < P(|Y - d_n v|_B > r)\times$$

$$\Big(1 + \theta\mu_n (T/M)^{(s+1)/(s+2)}\Big) \tag{3.6}$$

для всех $0 < d_n < M_2 R_{2n}$, $0 < r < d_n + M_2 R_{2n}$.

Здесь

$$T = b(b|d_n - r| + 1) n^{\frac{1-s}{2s+2}}.$$

и постоянные M_1, M_2, κ_n, μ_n *задаются теми же равенствами, что и в теоремаш* 3.1, 3.2 *с заменой постоянной* b_1 *на* b.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* A, B0, B2, C. *Тогда существует константа* $C = C(\gamma) > 0$ *такая, что для всех* $d_n < \overline{r}_n$, $r < d_n + \overline{r}_n$, $\overline{r}_n = M_3 R_{2n} - (5M_3 + 4b^{-1})\ln(n)$ *имеет место*

$$P(|S_n - d_n v|_B > r) =$$

$$P(|Y - d_n v|_B > r)\big(1 + 2\theta\overline{\mu}_n T(1 + M^{1/n})/M\big). \tag{3.7}$$

Здесь

$$\overline{\mu}_n = \frac{\tau_3}{1-\lambda_3} + \mu_{n-l}(M)\lambda_3^{l-1}, \quad l = [\ln(n)],$$

$$\lambda_3 = \lambda_3(M) = Cea(M\nu)^{s+1}\exp\{2M^2 b_1^{-2}\},$$

$$\tau_3 = 3a + Ce((1+a)\nu M + a(1 + M^2 b^{-2})\exp\{4(1 + Mb_1^{-1})^2\})(M\nu)^{s+1},$$

$$M_3 = \frac{1}{12}\min\Big\{Mb^{-2}, (b^2\nu^\gamma)^{\frac{1}{\gamma-2}} b^{-1}\Big\}$$

и M *удовлетворяет условию* $\max\{\lambda_2(M), \lambda_3(M)\} < 1$.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* A, B0, B1, B2, C. *Тогда существует константа* $C = C(\gamma) > 0$ *такая, что для всех* $r_0 + \overline{r}_0 < r < d_n < M_4 R_{1n} - (10M_4 + 8b^{-1})\ln(n)$, $\overline{r}_0 > \nu b(\ln(n))^{1+1/\gamma} n^{-1/2}$ *имеет место*

$$P(|S_n - d_n v|_B < r) = P(|Y - d_n v|_B < r)(1 + 2\theta\widetilde{\kappa}_n T(1 + M^{1/n})/M) \quad (3.8)$$

Здесь $n > n_0 + \ln(n_0)$ *и* $n_1 = n - l + 1$, $l = [\ln(n)]$ *удовлетворяет условию*

$$2\max\left\{M^{-\frac{s+1}{s+2}} n_1^{\frac{1-s}{2s+4}} (b_2^2|d_n - r| + b_2)^{-\frac{1}{s+2}}; M^{-1} n_1^{\frac{1-s}{2s+2}}\right\} + 2M n_1^{\frac{3\gamma-4}{4-2\gamma}} < \overline{r}_0. \quad (3.9)$$

Значения $\widetilde{\kappa}_n$ *и* M_4 *задаются соотношениями*

$$\widetilde{\kappa}_n = \frac{\tau_{4n}}{1 - \lambda_4} + \kappa_{n-l}(M)\lambda_4^{l-1},$$

$$\lambda_4 = \lambda_4(M) = Cea(M\nu)^{s+1}\exp\{5M^2 b_1^{-2}\},$$

$$\tau_{4n} = 3a + Cea(\nu(1 + M + \overline{\mu}_{n-l} + (1 + M\nu + M^2 b^{-2})\exp\{5M^2 b_1^{-2}\})(M\nu)^{s+1},$$

$$M_4 = \frac{1}{12}\min\left\{Mb^{-2}, (b^2\nu^\gamma)^{\frac{1}{\gamma-2}} b^{-1}\right\}$$

и M *удовлетворяет условию* $\max\{\lambda_1(M), \lambda_2(M), \lambda_3(M), \lambda_4(M)\} < 1$.

Мы будем предполагать, что $d_n = MR_n$ ($R_n = R_{1n}$ или R_{2n} в зависимости от постановки задачи). Если $d_n < MR_n$, то в доказательствах просто нужно заменить некоторые из равенств на неравенства.

4. Доказательство теорем 3.1–3.3. Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые копии случайной величины Y. Обозначим

$$W_{kn} = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_{k-1} + Y_{k+1} + \ldots + Y_n),$$

$$\phi_n(t) = \sup\{P(|S_n - d_n v| < t) : P \in \Im_n\},$$

$$\xi_n(t) = \sup\{P(|S_n - d_n v| > t) : P \in \Im_n\},$$

где $\Im_n$ множество всех распределений независимых (не обязательно одинаково распределенных) случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 1$, таких, что $\Psi_n(h) < \nu$.

Доказательство теорем 3.1, 3.2 базируется на следующих версиях леммы о сглаживании (см. [3]).

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие* C. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$, $n > 1$

$$P(|S_n - d_n v|_B < r) < P(|Y - d_n v|_B < r + \epsilon) + \\ e\epsilon^{-s-1} J_n n^{(1-s)/2}/(s+1)!, \tag{4.1}$$

где

$$J_n = \int_F \phi_{n-1}(t_2)|x|_F^{s+1} G_n(dx), \tag{4.2}$$

$$t_2 = t_2(x) = r + \epsilon + (1 + 1/n)n^{-1/2}|x|_B + \omega_n,$$

$$\omega_n = \frac{1}{n} r + \frac{1}{n}\epsilon + (1 + 1/n)d_{n-1}/n + (d_n - d_{n-1})(1 + 1/n).$$

Лемма 4.2. *Пусть выполнено условие* C. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$

$$P(|S_n - d_n v|_B > r) < P(|Y - d_n v|_B > r - \epsilon) + \\ e\epsilon^{-s-1} I_n n^{(1-s)/2}/(s+1)!, \tag{4.3}$$

где

$$I_n = \int_F \xi_{n-1}(t_1)|x|_F^{s+1} G_n(dx), \tag{4.4}$$

$$t_1 = t_1(x) = r - \epsilon - n^{-1/2}|x|_B - d_n + d_{n-1}(1 - 1/n),$$

$$I_1 = \int_F \xi_0(t_1)|x - d_1 v|_F^{s+1} G_1(dx),$$

$$\xi_0(t_1) = \xi_0(t_1(x)) = \chi(r - \epsilon < |x - d_1 v|_B < r).$$

Доказательство лемм аналогично доказательству леммы 4.1 в [3]. Поэтому приведем оценки только в случае леммы 4.1. Аналогично [3], имеем

$$P(|S_n - d_n v|_B < r) < P(|Y - d_n v|_B < r + \epsilon) + \\ e\epsilon^{-s-1} J'_n n^{(1-s)/2}/(s+1)! \tag{4.5}$$

где

$$J'_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J'_{kn}, \tag{4.6}$$

$$J'_{kn} = \int_F P(|W_{kn} - d_n v| < r + \epsilon + n^{-1/2}|x|_B)|x|_F^{s+1} G_k(dx). \qquad (4.7)$$

Так как

$$P(|W_{kn} - d_n v| < r + \epsilon + n^{-1/2}|x|_B) <$$

$$\sup_{P \in \Im_{n-1}} P(|S_{n-1} - d_{n-1} v| < (1 + 1/n)(r + \epsilon + n^{-1/2}|x|_B +$$

$$(d_n - d_{n-1}) + d_{n-1}/n)) = \phi_{n-1}(t),$$

из (4.5)–(4.7) получаем (4.1).

В дальнейшем, чтобы упростить обозначения, проведем оценки для $b_1 = b_2 = 1$. Восстановить их в общем случае не представляет труда.

Доказательства (3.2) и (3.4) проведем индукцией по n. Положим $\epsilon = \epsilon_n = M^{-1} n^{\frac{1-s}{2s+2}}$.

Лемма 4.3. *Пусть выполнено* (1.1) *и* $r < d_{n_0} < M_1 R_{n_0}$. *Тогда*

$$P(|S_{n_0} - d_{n_0} v|_B < r) < \kappa_{n_0} P(|Y - d_{n_0} v|_B < r). \qquad (4.8)$$

Пусть выполнены условия теоремы 3.2. *Тогда*

$$P(|X_1 - d_1 v|_B > r) < \mu_1 P(|Y - d_{n_0} v|_B > r). \qquad (4.9)$$

Доказательство. Докажем (4.8). В силу (1.1), имеем

$$P(|S_{n_0} - d_{n_0} v|_B < r) < 1 < a \exp\{(d_{n_0} - r)^2\} P(|Y - d_{n_0}|_B < r). \quad (4.10)$$

что и означает (4.8).

Докажем (4.9). Применяя (1.4), имеем

$$I_1 < 2^{s+1} \int_F (|x|_F^{s+1} + M_2^{s+1}|v|_F^{s+1}) \chi(r - \epsilon < |x - d_1 v|_B < r) G_1(dx) \leqslant$$

$$2^{s+1}(M_2^{s+1}|v|_F^{s+1} + \nu^{s+1}) \leqslant$$

$$2^{s+1} a (M^{s+1}|v|_F^{s+1} + \nu^{s+1}) \exp\{(d_1 - r)^2\} P(|Y - d_1 v|_B > r),$$

где $|d_1 - r| < M$.

Отсюда, применяя лемму 4.2 и затем (1.6), получаем

$$P(|X_1 - d_1 v|_B > r) < P(|Y - d_1 v|_B > r - \epsilon) +$$

$$2^{s+1}\epsilon(M_2^{s+1}|v|_F^{s+1}+\nu^{s+1})M^{s+1}/(s+1)! \leqslant$$

$$\bigl(a\exp\{(d_1-r)\epsilon\}+a\epsilon 2^{s+1}((MM_2)^{s+1}|v|_F^{s+1}+$$

$$(M\nu)^{s+1})\exp\{M^2\}/(s+1)!\bigr)P(|Y-d_1v|_B>r),$$

что и означает (4.9), что и означает (4.9), так как $(d_1-r)\epsilon<1$.

Следующие оценки носят вспомогательный характер и часто будут использоваться в дальнейшем.

Пусть $n\geqslant 2$. Тогда

$$|d_n-r|\epsilon\leqslant 1, \tag{4.11}$$

$$|d_n-r|(d_n-d_{n-1})<M^2n^{\frac{2\gamma}{4-2\gamma}}\left(1-(1-1/n)^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}\right)<$$

$$M^2\frac{\gamma}{4-2\gamma}n^{\frac{2\gamma}{4-2\gamma}}n^{-1}<\frac{M^2}{2}, \tag{4.12}$$

$$|d_n-r|\omega_n<\frac{1}{n}(d_n-r)(r+\epsilon+(1+1/n)d_{n-1})+(d_n-r)(d_n-d_{n-1})(1+1/n)<$$

$$\frac{1}{n}Mn^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}\left(Mn^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}+M^{-1}+\frac{3}{2}Mn^{\frac{\gamma}{4-2\gamma}}\right)+\frac{3}{4}M^2<$$

$$\frac{5}{2}M^2n^{-\frac{2}{2-\gamma}}+1+\frac{3}{4}M^2<2M^2+1. \tag{4.13}$$

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 3.1 для $n>n_0$.

Доказательство теоремы 3.1. Определим последовательность $\overline{\kappa}_n$, $n\geqslant n_0$, рекуррентно, положив $\overline{\kappa}_{n_0}=\kappa_{n_0}$ и $\overline{\kappa}_{n+1}=\tau_1+\lambda\overline{\kappa}_n$.

Определим множества

$$A=\{x:d_{n-1}-t_2(x)<0\},\quad C=\{x:0\leqslant d_{n-1}-t_2(x)<MR_{1,n-1}\}.$$

Тогда

$$J_n<J_A+J_C,$$

где

$$J_N=\int\limits_N\phi_{n-1}(t)|x|_F^{s+1}G_n(dx),\qquad N=A,C. \tag{4.14}$$

(i) Оценим $\phi_{n-1}(t)$ для $x\in A$, $d_{n-1}-r<\epsilon+\omega_n$. Используя (1.1), (1.3) и (4.11)–(4.13), получаем

$$\phi_{n-1}(t)<1<a\exp\{(d_n-r)^2\}P(|Y-d_nv|_B<r)\leqslant$$

$$a\exp\{(d_n-r)(d_n-d_{n-1}+\epsilon+\omega_n)\}P(|Y-d_nv|_B<r)<$$
$$9a\exp\{5M_1^2/2\}P(|Y-d_nv|_B<r). \qquad (4.15)$$

(ii) Пусть $x\in A$ и $d_{n-1}-r>\epsilon+\omega_n$. Тогда, последовательно используя (1.1), $(1+1/n)n^{-1/2}|x|_B>d_{n-1}-r-\epsilon-\omega_n$ и (4.11)–(4.13), получаем

$$\phi_{n-1}(t)\leqslant 1\leqslant a\exp\bigl\{(d_{n-1}-r-\epsilon-\omega_n)^{2-\gamma}(d_{n-1}-r-\epsilon-\omega_n)^{\gamma}\bigr\}\times$$
$$P(|Y-d_{n-1}v|_B<r+\epsilon+\omega_n)\leqslant$$
$$a\exp\bigl\{(1+1/n)^{\gamma}(d_{n-1}-r)^{2-\gamma}n^{-\gamma/2}|x|_B^{\gamma}\bigr\}\times$$
$$P(|Y-d_nv|_B<r+\epsilon+\omega_n+(d_n-d_{n-1}))\leqslant$$
$$a^2\exp\{(|x|_B/\nu)^{\gamma}\}\exp\{(d_n-r)(\epsilon+\omega_n+(d_n-d_{n-1})\}P(|Y-d_nv|_B<r)\leqslant$$
$$9a^2\exp\{5M_1^2/2\}\exp\{(|x|_B/\nu)^{\gamma}\}P(|Y-d_nv|_B<r). \qquad (4.16)$$

(iii) Пусть $x\in C$. Тогда $0\leqslant d_{n-1}-r-\epsilon-\left(1+\frac{1}{n}\right)n^{-1/2}|x|_B-\omega_n$. Применяя индукционное предположение, дважды (1.3), а затем (4.13), имеем

$$\phi_{n-1}(t_2)<\overline{\kappa}_{n-1}P(|Y-d_{n-1}v|_B<t_2)\leqslant$$
$$\overline{\kappa}_{n-1}a\exp\bigl\{(d_{n-1}-r)\epsilon\bigr\}\exp\bigl\{(1+1/n)n^{-1/2}|x|_B|d_{n-1}-r|+|d_{n-1}-r|\omega_n\bigr\}\times$$
$$P(|Y-d_{n-1}v|_B<r)\leqslant$$
$$9a\overline{\kappa}_{n-1}\exp\bigl\{(1+1/n)n^{-1/2}|x|_B|d_{n-1}-r|+2M^2\bigr\}\times$$
$$P(|Y-d_nv|_B<r+d_n-d_{n-1})\leqslant$$
$$9a^2\overline{\kappa}_{n-1}\exp\bigl\{(1+1/n)n^{-1/2}|x|_B|d_{n-1}-r|+(d_{n-1}-r)(d_n-d_{n-1})+2M^2\bigr\}\times$$
$$P(|Y-d_nv|_B<r).$$

Используя (4.12),

$$|x|_B^{1-\gamma}<n^{(1-\gamma)/2}(1+1/n)^{\gamma-1}(d_{n-1}-r)^{1-\gamma}$$

и

$$(1+1/n)^{\gamma}n^{-\gamma/2}|d_n-r|^{2-\gamma}<M_1^{2-\gamma}<\nu^{-\gamma}$$

получаем отсюда, что

$$\phi_{n-1}(t)<9a^2\overline{\kappa}_{n-1}\exp\{5M^2/2\}\exp\bigl\{(1+1/n)^{\gamma}n^{-\gamma/2}|x|_B^{\gamma}|d_{n-1}-r|^{2-\gamma}\bigr\}\times$$

$$P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$

$$9a^2\overline{\kappa}_{n-1} \exp\{5M^2/2\} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (4.17)$$

Подставляя (4.15)–(4.17) в (4.14) и используя (3.1), имеем

$$J_n \leqslant 9a^2\nu^{s+1} \exp\{5M^2/2\}(2 + \overline{\kappa}_{n-1})P(|Y - d_n v| < r). \qquad (4.18)$$

Используя (1.3) и (4.11), получаем

$$P(|Y - d_n v|_B < r + \epsilon) < a \exp\{(d_n - r)\epsilon\}P(|Y - d_n v|_B < r) <$$

$$3aP(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (4.19)$$

Подставляя (4.18), (4.19) в (4.2), получаем

$$P(|S_n - d_n v|_B < r) < (3a + \lambda(2 + \overline{\kappa}_{n-1}))P(|Y - d_n v|_B < r) =$$

$$\overline{\kappa}_n P(|Y - d_n v|_B < r).$$

Таким образом коэффициенты $\overline{\kappa}_n$ задаются рекурентно на основе формулы геометрической прогрессии. Вычисляя ее, находим, что $\overline{\kappa}_n < \kappa_n$. Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.2. Определим множества

$$A_1 = \{x : t_1(x) < 0\};$$
$$C_1 = \{x : 0 < t_1(x) < r_{n-1}\};$$
$$D_1 = \{x : t_1(x) > r_{n-1}\}.$$

Обозначим

$$I_{N_1} = \int\limits_{N_1} \xi_{n-1}(t_1)|x|_F^{s+1} G_n(dx), \text{ где } N_1 = A_1, C_1, D_1.$$

Покажем, что

$$I_n \leqslant a^2\nu^{s+1}(6 + 4\mu_{n-1}) \exp\{2M^2\}P(|Y - d_n v|_B > r). \qquad (4.20)$$

(i) Оценим I_{A_1}. Рассмотрим три случая: $r < d_n$; $r > d_n$ и $r - d_{n-1} < \epsilon + d_n - d_{n-1}(1 - 1/n)$; $r - d_{n-1} \geqslant \epsilon + d_n - d_{n-1}(1 - 1/n)$.

(ij) Пусть $r - d_n < 0$. Тогда

$$\phi_{n-1}(t_1) < 1 < 2aP(|Y - d_n v|_B > r). \qquad (4.21)$$

(ijj) Пусть $r > d_n$ и $r - d_{n-1} < \epsilon + d_n - d_{n-1}(1-1/n)$. Тогда, используя (1.4) и оценки (4.11)–(4.13), получаем

$$\xi_{n-1}(t_1) < 1 < a\exp\{(d_n - r)^2\}P(|Y - d_n v|_B > r) <$$
$$a\exp\{|r-d_n|(\epsilon + d_{n-1}/n)\}P(|Y - d_n v|_B > r) <$$
$$3a\exp\{M^2\}P(|Y - d_n v|_B < r\}, \tag{4.22}$$

так как $|r - d_n|d_{n-1}/n < M^2$.

(ijjj) Пусть $r - d_{n-1} \geqslant \epsilon + d_n - d_{n-1}(1-1/n)$ и $n^{1/2}|x|_B > r - d_n - \epsilon - d_{n-1}/n$. Тогда, оценивая аналогично (4.22), (4.16) и используя $|d_n - r|^{2-\gamma}n^{-\gamma/2} < \nu^{-\gamma}$, получаем

$$1 < a\exp\{(r - d_n - \epsilon - d_{n-1}/n)^2\}P(|Y - d_n v| > r - \epsilon - d_{n-1}/n) \leqslant$$
$$a\exp\left\{|d_n - r|^{2-\gamma}n^{-\gamma/2}|x|_B^{\gamma}\right\}\exp\{(|r-d_n|(\epsilon + d_{n-1}/n)\}\times \tag{4.23}$$
$$P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant 3a\exp\{(|x|_B/\nu)^{\gamma}\}\exp\{M^2\}P\{|Y - d_n v| > r\}.$$

(ii) Оценим I_{C_1}. Используя индукционное предположение, (1.6), а затем (4.11), получаем

$$\xi_{n-1}(t_1) \leqslant \mu_{n-1}P(|Y - d_{n-1}v|_B > t_1) \leqslant$$
$$a\mu_{n-1}\exp\{|r-d_n|(\epsilon + d_{n-1}/n + n^{-1/2}|x|_B)\}P(|Y - d_{n-1}v|_B > r) \leqslant$$
$$3a\mu_{n-1}\exp\{M^2 + |r-d_n|n^{-1/2}|x|_B\}P(|Y - d_n v|_B > r - (d_n - d_{n-1})).$$

Так как $(n^{-1/2}|x|_B)^{1-\gamma} < |r - d_n|^{1-\gamma}$, используя также (1.6), (4.12), отсюда получаем

$$\xi_{n-1}(t_1) \leqslant 3a^2\mu_{n-1}\exp\left\{M^2 + |r-d_n|^{2-\gamma}n^{-\gamma/2}|x|_B^{\gamma}\right\}\times$$
$$\exp\{|r-d_n|(d_n - d_{n-1})\}P(|Y - d_n v|_B > r\} \leqslant$$
$$3a^2\mu_{n-1}\exp\{3M^2/2\}\exp\{(|x|_B/\nu)^{\gamma}\}P(|Y - d_n v|_B > r). \tag{4.24}$$

Оценим I_{D_1}. Применяя индукционное предположение и (1.6), получаем

$$\xi_{n-1}(t_1) < \xi_{n-1}(r_{n-1}) < \mu_{n-1}P(|Y - d_{n-1}v|_B > r_{n-1} + d_{n-1}\} \leqslant$$
$$\mu_{n-1}P(|Y - d_n v|_B > r_{n-1} + 2d_{n-1} - d_n) \leqslant$$
$$a\mu_{n-1}\exp\{(r_n - r_{n-1})r_n + 2(d_n - d_{n-1})r_n\}P(|Y - d_n v|_B > r_n).$$

Так как $(r_n - r_{n-1})r_n < M^2$, используя (4.12), отсюда получаем

$$\xi_{n-1}(t) \leqslant a\mu_{n-1}\exp\{2M^2\}P(|Y - d_n v|_B > r_n). \tag{4.25}$$

Из (4.21)–(4.25) получаем

$$\xi_{n-1}(t) \leqslant a^2\exp\{2M^2\}(6 + 4\mu_{n-1})\exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}\times$$
$$P(|Y - d_n v|_B > r) \tag{4.26}$$

Подставляя (4.26) в (4.4), получаем (4.20).

Оценивая аналогично (4.19), имеем

$$P(|Y - d_n v|_B > r - \epsilon) < 3aP(|Y - d_n v|_B > r). \tag{4.27}$$

Из (4.3), (4.26), (4.27) получаем

$$P(|S_n - d_n v|_B > r) < (3a + 2ea^2\exp\{2M^2\}(M\nu)^{s+1}(3 + 2\mu_{n-1})/(s+1)!)\times$$
$$P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant \mu_n P(|Y - d_n v|_B > r),$$

что и влечет (3.4).

Доказательство теоремы 3.3 основано на следующем аналоге леммы 4.2 в [3], доказательство которого аналогично и поэтому опущено.

Лемма 4.4. *Пусть* $\epsilon > 0$, $r > \delta > 0$, $n > n_0$. *Тогда*

$$\rho_n(r) \doteq |P(|S_n - d_n v|_B < r) - P(|Y - d_n v|_B < r)| =$$
$$|P(|S_n - d_n v|_B > r) - P(|Y - d_n v|_B > r)| \leqslant$$
$$P(r - \epsilon < |Y - d_n v|_B < r + \epsilon) + \overline{J}_n e\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}/(s+1)!, \tag{4.28}$$

где

$$\overline{J}_n = \int\limits_F \phi_{n-1}(t_1, t_2)|x|_F^{s+1}G_n(dx),$$

$$\phi_n(t_1, t_2) = \sup_{P\in\Im_n} P(t_1 < |S_n - d_n v|_B < t_2).$$

Положим

$$\epsilon = \epsilon_n = (T/M)^{\frac{s+1}{s+2}}/(|d_n - r| + 1),$$
$$d_n = M_i R_n, \quad T = (|d_n - r| + 1)n^{\frac{1-s}{2s+2}}. \tag{4.29}$$

где $i = 1, 2$ и $R_n = R_{1n}, R_{2n}$ для доказательства (3.5) и (3.6) соответственно.

Тогда

$$M^{-s-1}\epsilon^{-s-1}n^{\frac{1-s}{2}} = (T/M)^{\frac{1+s}{2+s}} = \epsilon(|d_n - r| + 1). \qquad (4.30)$$

Замечая, что $\overline{J}_n < J_n$, $\overline{J}_n < I_n$, используя (4.18) и (4.20) соответственно, получаем

$$e\overline{J}_n\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}/(s+1)! \leqslant eJ_n\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}/(s+1)! \leqslant$$
$$(\tau_1 - 3a + \lambda\overline{\kappa}_{n-1})M^{-s-1}\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}P(|Y - d_n v|_B < r) =$$
$$(\tau_1 - 3a + \lambda\overline{\kappa}_{n-1})(T/M)^{\frac{s+1}{s+2}}P(|Y - d_n v|_B < r) \qquad (4.31)$$

и

$$e\overline{J}_n\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}/(s+1)! \leqslant eI_n\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}/(s+1)! \leqslant$$
$$(\tau_2 - 3a + \lambda_2\mu_{n-1})M^{-s-1}\epsilon^{-s-1}n^{(1-s)/2}P(|Y - d_n v|_B > r) =$$
$$(\tau_2 - 3a + \lambda_2\mu_{n-1})(T/M)^{\frac{s+1}{s+2}}P(|Y - d_n v|_B > r). \qquad (4.32)$$

В силу (1.2), (4.29) и (1.5), (4.29) соответственно, имеем

$$P(r - \epsilon < |Y - d_n v|_B < r + \epsilon) \leqslant 3a\epsilon(|d_n - r| + 1)P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$
$$3a(T/M)^{\frac{s+1}{s+2}}P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (4.33)$$

и

$$P(r - \epsilon < |Y - d_n v|_B < r + \epsilon) \leqslant 3a\epsilon(|d_n - r| + 1)P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant$$
$$3a(T/M)^{\frac{s+1}{s+2}}P(|Y - d_n v|_B > r). \qquad (4.34)$$

Подставляя (4.31), (4.33) и (4.32), (4.34) в (4.28) получаем (3.5) и (3.6) соответственно.

5. Доказательство теорем 3.4 и 3.5. Рассуждения базируются на оценках (3.5) и (3.6) теоремы 3.3 для $P(|S_{n-l} - d_n v|_B < r)$ и $P(|S_{n-l} - d_n v|_B > r)$ и дальнейших итерационных оценках $P(|S_{n-l+m} - d_n v|_B < r)$ и $P(|S_{n-l+m} - d_n v|_B < r)$ соответственно для $1 \leqslant m \leqslant l$. Таким образом центр шара $d_n v$ является фиксированным, что можно позволить за счет уменьшения значения M и следовательно диапозона значений $d_n < MR_n$. В результате можно применить лемму 5.1, которая гораздо менее отличается от ее аналога в [3], чем лемма 4.4.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено условие С. Тогда*

$$\overline{\rho}_{n-l+m}(r) \doteq |P(|S_{n-l+m} - d_n v|_B < r) - P(|Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$

$$P(r - \epsilon < |Y - d_n v|_B < r + \epsilon) + c\epsilon M^{1+s} T_1^{\alpha_m} \widetilde{J}_{n,m} / T_1^{\alpha_{m-1}}, \tag{5.1}$$

где

$$\alpha_m = 1 - (s+2)^{-m-1}, \quad T_1 = T/M, \quad \epsilon = \epsilon_m = T_1^{\alpha_m}/(|d_n - r| + 1),$$

$$\widetilde{J}_{n,m} = \int\limits_F \phi_{n-l+m-1}(\overline{t}_1, \overline{t}_2) |x|_F^{s+1} G_{n-l+m-1}(dx),$$

$$\overline{t}_1 = r - \epsilon - d_n/n - \tau/2, \quad \overline{t}_2 = (r + \epsilon + d_n/n + \tau/2)(1 + 1/n),$$

$$\tau = 4n^{-1/2}|x|_B.$$

Таким образом все оценки при доказательстве теорем 3.4 и 3.5, как и в [3], по существу являются оценками $\phi(\overline{t}_1, \overline{t}_2) = \phi_{n-l+m+1}(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$. Отличия возникающие при этом при доказательстве (3.8) вызваны другим заданием параметров и тем, что мала вероятность того, что S_n принадлежит внутренности шара, а не внешности, как в [3]. В результате для внешности шара проводятся оценки того же типа, что в [3] для внутренности и наоборот.

Доказательства (3.7) и (3.8) проводится индукцией по m, причем на каждом шаге индукции доказывается, что

$$\overline{\rho}_{n-l+m}(r) < \mu'_m T_1^{\alpha_m} P(|Y - d_n v|_B < r), \tag{5.2}$$

$$\overline{\rho}_{n-l+m}(r) < \kappa'_m T_1^{\alpha_m} P(|Y - d_n v|_B > r), \tag{5.3}$$

где $\mu'_0 = \mu_{n-l}, \kappa'_0 = \kappa_{n-l}$ и последующие значения μ'_m, κ'_m будут определены в процессе доказательств.

Для $m = 0$ (5.2), (5.3) совпадает с (3.5), (3.6) соответственно для объема выборки равного $n - l$. Предположим, что мы доказали (5.2), (5.3) для $m - 1$ и докажем их для m. Покажем как оценивается $\phi(\overline{t}_1, \overline{t}_2)$. Аналогично [3] имеем

$$\phi(\overline{t}_1, \overline{t}_2) \leqslant \phi(r - \tau, r) + \phi(r - 2\epsilon - 2d_n/n, r) +$$

$$\phi(r, (r + \tau)(1 + 1/n)) + \phi(r, (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n)). \tag{5.4}$$

Оценим сначала слагаемые правой части (5.4) для доказательства (5.3).

Доказательство теоремы 3.4. Оценим каждое из слагаемых (5.4) по отдельности.

(i) Начнем с оценки $\phi(r-\tau,r)$. Рассмотрим три случая: $\tau > |r-d_n|, \tau > 1$ или $\tau > r$; $r > \tau > |r-d_n|$ и $\tau < 1$; $\tau < |r-d_n|$.

(ij) Пусть $\tau > |r-d_n|, \tau > 1$ или $\tau > r$. Тогда $\phi(r-\tau,r) \leqslant \phi(-\infty,r)$ и оценки по существу совпадают с [3]. Используя (1.5), аналогично оценкам доказательства (4.40) в [3] получаем

$$P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) \leqslant 2\min\{r,1\} \leqslant 2\tau \leqslant$$
$$Ca\nu MT_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\} P(|Y - d_n v|_B > r). \tag{5.5}$$

(ijj) Пусть $r > \tau > |r-d_n|$ и $\tau < 1$. Тогда

$$|P(r-\tau < |S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) - P(r-\tau < |Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B > r-\tau) - P(|Y - d_n v|_B > r-\tau)| +$$
$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B > r) - P(|Y - d_n v|_B > r)| \leqslant$$
$$C\mu'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} (P(|Y - d_n v|_B > r-\tau) + P(|Y - d_n v|_B > r)) \leqslant$$
$$Ca\mu'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > r), \tag{5.6}$$

так как

$$P(|Y - d_n v|_B > r-\tau) \leqslant a\exp\{|r-d_n|\tau\} P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant$$
$$3aP(|Y - d_n v|_B > r).$$

Используя (1.5), (1.6), аналогично [3], получаем

$$P(r-\tau < |Y - d_n v|_B < r) \leqslant \tau(|d_n - r| + 1) P(|Y - d_n v|_B > r-\tau) \leqslant$$
$$aC|x|_B MT_1 \exp\{|d_n - r|\tau\} P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant$$
$$aC|x|_B MT_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant$$
$$Ca\nu MT_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\} P(|Y - d_n v|_B > r). \tag{5.7}$$

(ijjj) Пусть $\tau < |r-d_n|$. Тогда, оценивая аналогично (5.6), и для оценки левой части (5.7), используя оценки аналогичные оценкам слагаемого A_2 в [3], получаем

$$P(r-\tau < |S_n - d_n v|_B < r) \leqslant$$

$$(Ca\nu MT_1^{\alpha_{m-1}}\exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}+$$
$$Ca\mu'_{m-1}T_1^{\alpha_{m-1}})P(|Y-d_nv|_B>r). \tag{5.8}$$

Из (5.5)–(5.8) следует, что

$$\phi(r-\tau,r)\leqslant C(a\nu M\exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}+$$
$$a\mu'_{m-1})T_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B>r). \tag{5.9}$$

(ii) Оценки $\phi(r,(r+\tau)(1+1/n))$ полностью аналогичны оценкам $\delta(r,(r+\tau)\exp\{2/n\})$ в [3], в результате которых получаем

$$\phi(r,(r+\tau)(1+1/n))\leqslant CT_1^{\alpha_{m-1}}(aM^2+$$
$$(1+a)M\nu\exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}+\mu'_{m-1})P(|Y-d_nv|_B>r). \tag{5.10}$$

(iii) Оценим $\phi(r-2\epsilon-2d_n/n,r)$. Рассмотрим два случая $2\epsilon+2d_n/n>r$ и $r>2\epsilon+2d_n/n$.

Пусть $2\epsilon+2d_n/n>r$. Тогда с помощью индукционного предположения задача сводится к оценке

$$P(|Y-d_nv|_B<r)<2r(|r-d_n|+1)<$$
$$2(2\epsilon+2d_n/n)(|r-d_n|+1)\leqslant 4(1+M^2)T_1^{\alpha_{m-1}}\leqslant$$
$$Sa(1+M^2)\exp\{4(M+1)^2\}T_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B>r), \tag{5.11}$$

так как в силу теоремы Эрхарда (см. [6]) и (1.4)

$$P(|Y-d_nv|_B>r)>P(|Y|_B>r)\geqslant P(|Y|_B>2\epsilon+2d_n/n)\geqslant$$
$$a^{-1}\exp\{-4(\epsilon+d_n/n)^2\}\geqslant a^{-1}\exp\{-4(M+1)^2\}.$$

Пусть $r>2\epsilon+2d_n/n$. Тогда, применяя (1.5) и (1.6), получаем

$$P(r-2\epsilon-2d_n/n<|Y-d_nv|_B<r)<$$
$$(2\epsilon+2d_n/n)(|d_n-r|+1)P(|Y-d_nv|_B>r-2\epsilon-2d_n/n)\leqslant$$
$$2a(1+M^2)T_1^{\alpha_{m-1}}\exp\{(2\epsilon+2d_n/n)|r-d_n|\}P(|Y-d_nv|_B>r)\leqslant$$
$$18a(1+M^2)T_1^{\alpha_{m-1}}\exp\{2d_n|r-d_n|/n\}P(|Y-d_nv|_B>r)\leqslant$$
$$18a(1+M^2)T_1^{\alpha_{m-1}}\exp\{2M^2\}P(|Y-d_nv|_B>r). \tag{5.12}$$

В силу индукционного предположения, оценивая аналогично (5.12), получаем

$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B >$$
$$r - 2\epsilon - 2d_n/n) - P(|Y - d_n v|_B > r - 2\epsilon - 2d_n/n)| \leqslant$$
$$\mu'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > r - 2\epsilon - 2d_n/n) \leqslant$$
$$9\mu'_{m-1} a T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{2M^2\} P(|Y - d_n v|_B > r)|. \tag{5.13}$$

(iiii) На основе индукционного предположения оценка $\phi(r, (r+2\epsilon+2d_n/n)(1+1/n))$ сводится к оценке

$$P(r < |Y - d_n v|_B < (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n)) \leqslant$$
$$(r/n + 4\epsilon + 4d_n/n)(|d_n - r| + 1) P(|Y - d_n v|_B > r) \leqslant$$
$$C T_1^{\alpha_{m-1}} (M_3^2 + 1) P(|Y - d_n v|_B > r), \tag{5.14}$$

так как

$$d_n(|d_n - r| + 1)/n < M^2 T_1 < M_3^2 T_1^{\alpha_{m-1}},$$
$$r(|d_n - r| + 1) < 2d_n(|d_n - r| + 1).$$

Мы можем использовать индукционное предположение поскольку

$$r/n + (2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n) M_3 + 2(2 + 2d_n/n) < 5M_3 + 4.$$

Из (5.9)–(5.14) следует, что

$$\phi(\bar t_1, \bar t_2) \leqslant C(a\mu'_{m-1} \exp\{2M^2\} + (1 + a)\nu M \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\} +$$
$$a(1 + M^2) \exp\{4(M + 1)^2\}) T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > r)$$

Это означает, что

$$\widetilde J_{nm} \leqslant C(a\mu'_{m-1} \exp\{2M^2\} + (1 + a)\nu M +$$
$$a(1 + M^2) \exp\{4(M + 1)^2\}) \nu^{s+1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > r). \tag{5.15}$$

Подставляя (5.15) в (5.1), получаем

$$\bar\rho_{n-l+m}(r) \leqslant \mu'_m T_1^{\alpha_m} P(|Y - d_n v|_B > r), \tag{5.16}$$

где коэффициенты $\mu'_m = \tau_3 + \mu'_{m-1}\lambda_3$ образуют геометрическую прогрессию и

$$\mu'_l \leqslant \widetilde\mu_n = \frac{\tau_3}{1 - \lambda_3} + \bar\mu_{n-l} \lambda_3^{l-1}, \;\; T_1^{\alpha_l - 1} \leqslant 2(1 + M^{1/n}),$$

что и завершает доказательство теоремы 3.4.

Доказательство теоремы 3.5. Оценим по отдельности каждое из слагаемых (5.4).

(i) Начнем с оценки $\phi(r,(r+\tau)(1+1/n))$.

Рассмотрим случаи $(1+1/n)\tau > d_n - r(1+1/n)$ и $(1+1/n)(r+\tau) < d_n + r_{n-1}$; $(1+1/n)(r+\tau) > d_n + r_{n-1}$; $(1+1/n)\tau < d_n - r(1+1/n)$.

(ij) Пусть $(1+1/n)\tau > d_n - r(1+1/n)$ и $(1+1/n)(r+\tau) < d_n + r_{n-1}$. Тогда

$$\begin{gathered}|P(r < |S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n))\\ -P(r < |Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n))| \leqslant\\ |P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B > (r+\tau)(1+1/n)) -\\ P(r < |Y - d_n v|_B > (r+\tau)(1+1/n))| +\\ |P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) - P(|Y - d_n v|_B < r)|. \qquad (5.17)\end{gathered}$$

Для оценки второго слагаемого справа в (5.17) можно непосредственно применить индукционное предположение. Поэтому проведем оценку только первого слагаемого. Используя (3.7), а затем (1.1), получаем

$$\begin{gathered}|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) -\\ P(|Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n))| \leqslant\\ \widetilde{\mu}_{n-l} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B > (r+\tau)(1+1/n))| \leqslant \overline{\mu}_{n-l} T_1^{\alpha_{m-1}} \leqslant\\ \overline{\mu}_{n-l} T_1^{\alpha_{m-1}} a \exp\{(d_n - r)^2\} P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant\\ \overline{\mu}_{n-l} T_1^{\alpha_{m-1}} a \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}\} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (5.18)\end{gathered}$$

Применяя (1.2) и используя технику оценивания слагаемого B_1 из $\delta(r,(r+\tau)\exp\{r/n\})$ в [3], получаем

$$\begin{gathered}P(r < |Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) \leqslant\\ (r/n + \tau(1+1/n))(|d_n - r| + 1) P(|Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) \leqslant\\ Ca(M^2 + CM\nu \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma/2\}) T_1^{\alpha_{m-1}} \times \qquad (5.19)\\ \exp\{(d_n - r)(r/n + \tau(1+1/n))\} P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant\\ Ca(M^2 + M\nu) T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{M^2\} \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\} P(|Y - d_n v|_B < r),\end{gathered}$$

так как

$$\exp\{(d_n - r)\tau(1+1/n)\} \leqslant \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma/2\right\}.$$

(ijj) Пусть $(1+1/n)(r+\tau) > d_n + r_{n-1}$. Так как $r < d_n$, то тогда $(1+1/n)\tau > M$ и следовательно так же как в (5.5), получаем

$$P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) \leqslant 1 \leqslant C\tau/M \leqslant$$
$$Ca\nu T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (5.20)$$

(ijjj) Пусть $(1+1/n)\tau < d_n - r(1+1/n)$. Тогда, используя индукционное предположение, (1.3) и $(d_n - r)\tau(1+1/n) < (|x|_B/\nu)^\gamma$, получаем

$$|P(r < |S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) -$$
$$P(r < |Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n))| \leqslant$$
$$\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} (P(|Y - d_n v|_B < (r+\tau)(1+1/n)) + P(|Y - d_n v|_B < r)) \leqslant$$
$$\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} (\exp\{(d_n - r)(\tau(1+1/n) + r/n)\} + 1) P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$
$$\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} \left(1 + \exp\{M^2\} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\}\right) P(|Y - d_n v|_B < r). \quad (5.21)$$

Из (5.17)–(5.21) получаем

$$\phi(r, (r+\tau)(1+1/n)) \leqslant Ca(\nu + \kappa'_{m-1} + \overline{\mu}_{n-l} + (M^2 + M\nu)\exp\{M^2\}) \times$$
$$T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (5.22)$$

(ii) Оценим $\phi(r-\tau, r)$. Рассмотрим два случая $\tau > \zeta_n$ и $\tau < \zeta_n$, где $\zeta_n = \nu(\ln(n))^{1/\gamma} n^{-1/2}$.

(iij) Пусть $\tau > \zeta_n$. Тогда $\phi(r-\tau, r) \leqslant \phi(-\infty, r)$. В силу индукционного предположения

$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) - P(|Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (5.23)$$

В тоже время

$$P(|Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$\exp\left\{-(n^{1/2}\zeta_n/\nu)^\gamma\right\} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\} P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$
$$n^{-1} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\} P(|Y - d_n v|_B < r). \qquad (5.24)$$

(iijj) Пусть $\tau < \zeta_n$. Тогда $r - l\tau > r_0$ и следовательно можно применить индукционное предположение

$$|P(r-\tau < |S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) - P(r-\tau < |Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r-\tau) - P(|Y - d_n v|_B < r-\tau)| +$$
$$|P(|S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < r) - P(|Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} (P(|Y - d_n v|_B < r-\tau) + P(|Y - d_n v|_B < r)) \leqslant$$
$$2\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B < r). \tag{5.25}$$

Оценим, используя ту же технику, что и в (5.7),

$$P(r-\tau < |Y - d_n v|_B < r)| \leqslant a\tau(|d_n - r| + 1) P(|Y - d_n v|_B < r)| \leqslant$$
$$Ca\nu M T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\left\{(|x|_B/\nu)^\gamma\right\} P(|Y - d_n v|_B < r). \tag{5.26}$$

(iii) Используя (3.9) и индукционное предположение, оценка $\phi(r - 2\epsilon - 2d_n/n, r)$ проводится аналогично (5.12). Так как в силу (3.9) $r - 2\epsilon - 2d_n/n > r_0$, то имеем

$$P(r - 2\epsilon - 2d_n/n < |Y - d_n v|_B < r) <$$
$$(2\epsilon + 2d_n/n)(|d_n - r| + 1) P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$
$$2(1+M) T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B < r). \tag{5.27}$$

(iiii) Индукционное предположение сводит оценивание $\phi(r, (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n))$ к следующим оценкам

$$P(r < |Y - d_n v|_B < (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n)) \leqslant$$
$$(r/n + 4\epsilon + 4d_n/n)(|d_n - r| + r/n + 4\epsilon + 4d_n/n + 1) P(|Y - d_n v|_B <$$
$$(r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n)) \leqslant$$
$$Ca(M^2+1) T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{(4\epsilon + 4d_n/n + r/n)|d_n - r|\} P(|Y - d_n v|_B < r) \leqslant$$
$$Ca(M^2+1) T_1^{\alpha_{m-1}} \exp\{5M^2\} P(|Y - d_n v|_B < r) \tag{5.28}$$

и

$$|P(r < |S_{n-l+m-1} - d_n v|_B < (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n)) -$$
$$P(r < |Y - d_n v|_B < (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n))| \leqslant$$
$$2\kappa'_{m-1} T_1^{\alpha_{m-1}} P(|Y - d_n v|_B < (r + 2\epsilon + 2d_n/n)(1 + 1/n))| \leqslant$$

$$2\kappa'_{m-1}T_1^{\alpha_{m-1}}\exp\{5M^2\}P(|Y-d_nv|_B<r|\leqslant \tag{5.29}$$

Подставляя (5.22)–(5.29) в (5.4), получаем

$$\phi(\overline{t}_1,\overline{t}_2)\leqslant Ca\big((\nu(1+M)+\kappa'_{m-1}+\overline{\mu}_{n-l}+$$

$$(M\nu+M^2)\exp\{M^2\})\exp\{(|x|_B/\nu)^\gamma\}+$$

$$\kappa'_{m-1}\exp\{5M^2\}+(1+M^2)\exp\{5M^2\}\big)T_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B<r). \tag{5.30}$$

Следовательно

$$\overline{J}_{n,m}<Ca(\nu(1+M)+\overline{\mu}_{n-l}+(1+M\nu+M^2)\exp\{5M^2\}+$$

$$\kappa'_{m-1}\exp\{5M^2\})\nu^{s+1}T_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B<r).$$

и значит

$$\overline{\rho}_{n-l+m}(r)<(3a+Cae(\nu(1+M)+\overline{\mu}_{n-l}+(1+M\nu+M^2)\exp\{5M^2\}+$$

$$\kappa'_{m-1}\exp\{5M^2\})(M\nu)^{s+1})T_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B<r)\leqslant$$

$$\kappa'_mT_1^{\alpha_{m-1}}P(|Y-d_nv|_B<r).$$

Следовательно

$$\kappa'_m=\tau_{4n}+\kappa'_{m-1}\lambda_4$$

и значит

$$\widetilde{\kappa}_m\leqslant\frac{\tau_{4n}}{1-\lambda_4}+\kappa_{n-l}\lambda_4^{l-1},$$

что и завершает доказательство теоремы 3.5.

Литература

1. В. Бенткус, *О больших уклонениях в банаховых пространствах.* — Теор. вероятн. и примен. **XXXI** (1986), 710–716.
2. В. Бенткус, А. Рачкаускас, *Оценки скорости сближения сумм независмых случайных величин в банаховом пространстве I, II.* — Литовский матем. сб. **XXII,** Но. 3, 4 (1982), 12–28, 8–20.
3. V. Bentkus and A. Rachkauskas, *On probabilities of large deviations in banach spaces.* — Probab. Th. Rel. Fields **86** (1990), 131–154.
4. H. Bergstrom, *On asymptotic expansions of probability functions.* — Scand. Aktuarietidskr. **1–2** (1951), 1–24.
5. E. Bolthausen, *Exact convergence rates in some martingale central limit theorems.* — Ann. Probab. **10** (1982), 672–688.
6. Ю. А. Давыдов, М. А. Лифшиц, Н. В. Смородина, *Локальные свойства распределений стохастических функционалов.* Наука, М. (1995).

7. F. Gotze, *On the rate of convergence in the central theorem in Banach spaces.* — Ann. Probab. **14** (1986), 922–942.
8. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины.* Наука, М. (1965).
9. J. Kuelbs and T. Kurtz, *Berry-Esseen estimates in Hilbert space and application to law of the iterated logarithm.* — Ann. Probab. **2** (1974), 387–407.
10. В. И. Паулаускас, *О скорости сходимости в центральной предельной теореме в некоторых банаховых пространствах.* — Теория вероятн. и ее примен. **XXI** (1976), 775–791.
11. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972)..

Ermakov M. S. Probabilities of large deviations in Banach spaces.

A theorem about the exact asymptotics of large derivatives of sums of independent random elements in a Banach space is proved. The results are a version of a Bentkus' and Rachkauskas' theorems.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 декабря 2000 г.