Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

Д. Ф. Кузнецов

НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ТЕЙЛОРА–СТРАТОНОВИЧА

1. Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – полное вероятностное пространство, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ – неубывающее непрерывное справа семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$, а $\mathbf{w}_t$ – $\mathcal{F}_t$ измеримый при каждом $t \in [0,T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + B(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{w}_t, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_t$ – n-мерный случайный процесс, являющийся решением уравнения (1); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n \times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (1) [1].

В литературе [2–8] известно несколько вариантов стохастического аналога формулы Тейлора для случайного процесса вида $R(\mathbf{x}_s, s)$; $s \in [0,T]$, где $\mathbf{x}_s$ – решение СДУ Ито (1), а $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ – неслучайная, достаточно гладкая функция. Первый результат в данной области получен в [2, 3] и был назван разложением Тейлора–Ито. Разложение Тейлора–Ито [2, 3] представляет собой разложение процесса $R(\mathbf{x}_s, s)$; $s \in [0,T]$ в ряд, каждый член которого содержит в качестве множителя повторный стохастический интеграл Ито вида:

$$\int\limits_t^s \ldots \int\limits_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}, \tag{2}$$

где $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$.

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства общего и профессионального образования РФ (грант No. 97-0-1.8-71) и РФФИ (грант No. 99-01-00719).

В работе [4] (см. также [5]) предложен другой вариант разложения процесса $R(\mathbf{x}_s, s)$; $s \in [0, T]$ по повторным стохастическим интегралам Стратоновича вида:

$$\int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}, \tag{3}$$

который называется разложением Тейлора–Стратоновича; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $\int\limits^{*}$ – означает стохастический интеграл Стратоновича,

В [7] с помощью специальных преобразований разложение Тейлора–Ито из [2, 3] преобразовано к более простой форме, называемой унифицированным разложением Тейлора–Ито. Каждый член данного разложения содержит в качестве множителя повторный стохастический интеграл Ито вида:

$$\int\limits_t^{s} (s-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_k)}, \tag{4}$$

где $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots$.

Известно [6], что некоторые стохастические интегралы Ито вида (2) или (3) связаны друг с другом линейными соотношениями, в то же время для интегралов вида (4) это не так. Поэтому совокупность стохастических интегралов вида (4) является в некотором смысле минимальной и, как следствие, соответствующее унифицированное разложение Тейлора–Ито [7] оказывается более простым, чем разложение Тейлора–Ито из [2, 3].

Отметим, что с помощью подхода, описанного в [7], в работе [8] получена другая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито по повторным стохастическим интегралам Ито вида:

$$\int\limits_t^{s} (t-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} (t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_k)},$$

где $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots$.

Цель настоящей работы заключается в получении двух новых представлений разложения Тейлора–Стратоновича, каждый член которых содержит в качестве множителя повторный стохастический интеграл Стратоновича вида

$$\int\limits_t^{*s} (s-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_k)} \tag{5}$$

или вида

$$\int\limits_t^{*s} (t-\tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} (t-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_k)}, \tag{6}$$

где $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$; $l_1,\ldots,l_k = 0,1,\ldots$. При получении данных разложений используется подход, описанный в [7], а также некоторые свойства стохастических интегралов Стратоновича.

Известно [5, 8–10], что один из подходов к численному решению СДУ Ито основывается на численном моделировании решений этих уравнений в дискретные моменты времени с помощью стохастических разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также с помощью специальных методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, входящих соответственно в данные стохастические разложения. В работе [11] предложен эффективный метод среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (5), (6). Таким образом, принимая во внимание результат работы [11] и учитывая минимальность совокупностей стохастических интегралов вида (5), (6), можно прийти к выводу, что разложения Тейлора–Стратоновича по повторным стохастическим интегралам Стратоновича вида (5), (6) могут оказаться полезными при построении численных методов для СДУ Ито.

2. О некоторых свойствах стохастических интегралов

Пусть $w_t, t \in [0,T]$ – $\mathcal{F}_t$ измеримый при каждом $t \in [0,T]$ скалярный стандартный винеровский процесс. Введем класс $M_2([0,T])$ случайных функций $\xi(t,\omega) \stackrel{\rm def}{=} \xi_t : [0,T]\times\Omega \to \Re^1$, которые измеримы по совокупности переменных (t,ω), $\mathcal{F}_t$ измеримы при каждом $t \in [0,T]$ и удовлетворяют условиям: $\int\limits_0^T \mathbf{E}\xi_t^2 dt < \infty$, $\mathbf{E}\xi_t^2 < \infty$ при всех $t \in [0,T]$. Введем на классе $M_2([0,T])$ норму

$\|\xi\|_{2,T} = \left(\int\limits_0^T \mathbf{E}\xi_t^2 dt\right)^{1/2}$. Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi_t \in M_2([0,T])$ назовем [1] среднеквадратический предел:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}_{\tau_j^{(N)}} \left(w_{\tau_{j+1}^{(N)}} - w_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_t dw_t, \tag{7}$$

где $\xi_t^{(N)}$ – последовательность ступенчатых функций из $M_2([0,T])$ вида: $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_j^{(N)}}$ с в.1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$; $j = 0, 1, \ldots, N-1$, которая сходится по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции ξ_t; $\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ – разбиение промежутка $[0,T]$ для которого:

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \ldots < \tau_N^{(N)} = T;$$

$$\max_{0\leqslant j\leqslant N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \to 0 \text{ при } N \to \infty. \tag{8}$$

Введем класс $Q_m([0,T])$ процессов Ито $\{\eta_t, t \in [0,T]\}$ вида:

$$\eta_t = \eta_0 + \int\limits_0^t a_s ds + \int\limits_0^t b_s dw_s, \tag{9}$$

где $(a_t)^m, (b_t)^m \in M_2([0,T])$, причем при всех $s, \tau \in [0,T]$ и некоторых $C, \gamma \in (0,\infty)$: $\mathbf{E}|b_s - b_\tau|^4 \leqslant C|s-\tau|^\gamma$.

Рассмотрим функцию $F(x,t) : \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$ из $C_2(-\infty,\infty)$ ($C_2(-\infty,\infty)$ – класс дважды непрерывно дифференцируемых по x на интервале $(-\infty,\infty)$ функций с ограниченными первой и второй производными).

Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса $F(\eta_t,t)$, $t \in [0,T]$ назовем [5, 13, 14] следующий среднеквадратический предел:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}\right), \tau_j^{(N)}\right) \left(w_{\tau_{j+1}^{(N)}} - w_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{*T} F(\eta_t,t) dw_t, \tag{10}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7).

Известно [5, 13, 14], что при определенных условиях с в.1 справедлива формула:

$$\int\limits_0^{*T} F(\eta_t,t)dw_t = \int\limits_0^T F(\eta_t,t)dw_t + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_t,t)b_t dt. \qquad (11)$$

Если же винеровские процессы в (9) и (10) независимы, то

$$\int\limits_0^{*T} F(\eta_t,t)dw_t = \int\limits_0^T F(\eta_t,t)dw_t \ \text{с в.1}. \qquad (12)$$

Одним из возможных вариантов условий, при которых справедливы формулы (11), (12) могут быть, например, следующие условия: $\eta_t \in Q_4([0,T])$, $F(\eta_t,t) \in M_2([0,T])$, $F(x,t) \in C_2(-\infty,\infty)$.

В [8, 12] доказана теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. В дальнейшем мы будем использовать этот результат, поэтому приведем его формулировку и необходимые обозначения.

Пусть $S_2([0,T])$ – подкласс $M_2([0,T])$ среднеквадратически непрерывных на промежутке $[0,T]$ случайных функций.

Обозначим

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1)\ldots\int\limits_t^{t_{k-1}}\psi_k(t_k)\int\limits_t^{t_k}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}dw_{t_k}^{(k)}\ldots dw_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in S_2([t,T])$; $[t,T] \subseteq [0,T]$; здесь и далее: $w_\tau^{(l)} = w_\tau$ либо $w_\tau^{(l)} = \tau$; w_τ – стандартный винеровский процесс; $l = 1,\ldots,k+1$; $\psi_1(s),\ldots,\psi_k(s) \in C([t,T])$ ($C([t,T])$ – класс непрерывных на промежутке $[t,T]$ функций).

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$; $k \geqslant 1$ вида:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int\limits_s^T \psi_k(t_k)dw_{t_k}^{(k)}\ldots\int\limits_{t_2}^T \psi_1(t_1)dw_{t_1}^{(1)}$$

следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{N-1}\psi_k(\tau_j)\Delta w_{\tau_j}^{(k)}\hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{j+1}}, \qquad (13)$$

где $k \geqslant 1$; $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\rm def}{=} 1$; $[s,T] \subseteq [t,T]$; $\Delta w_{\tau_j}^{(i)} = w_{\tau_{j+1}}^{(i)} - w_{\tau_j}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,k+1$; $\tau_j^{(N)} \stackrel{\rm def}{=} \tau_j$; $j = 0,\ 1,\ldots,N-1$; $\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^{N}$ – разбиение промежутка $[s,T]$, удовлетворяющее условию типа (8).

Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$; $k \geqslant 1$ вида:

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

следующим образом:

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\rm def}{=} \underset{N\to\infty}{\rm l.i.m} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{j+1}},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (13).

Теорема 1 [8, 12]. *Пусть $\phi_\tau \in S_2([t,T])$, $\psi_l(\tau) \in C([t,T])$; $l = 1,\ldots,k$. Тогда существует интеграл $\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$ и $J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$ с в.1.*

В дальнейшем нам также потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $h(\tau), g(\tau), G(\tau) : [t,s] \to \Re^1$ – функции из класса $C([t,s])$, причем $G(\tau)$ – первообразная функции $g(\tau)$. Пусть также $\xi_\tau^{(l)} \in Q_4([t,s])$ и имеет вид:*

$$\xi_\tau^{(l)} = \int\limits_t^\tau a_u du + \int\limits_t^\tau b_u d\mathbf{w}_u^{(l)};\ l = 1,\ 2.$$

Тогда

$$\int\limits_t^s g(\tau) \int\limits_t^{*\tau} h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{w}_u^{(i)} d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\tau = \\ = \int\limits_t^{*s} (G(s) - G(\theta)) h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{w}_u^{(i)} d\mathbf{w}_\theta^{(j)} \quad (14)$$

с в.1, где $i,j,l=1,2$; $\mathbf{w}_\tau^{(1)}$, $\mathbf{w}_\tau^{(2)}$ *–* $\mathcal{F}_\tau$ *измеримые при всех* $\tau\in[t,s]$ *независимые стандартные винеровские процессы.*

Доказательство. В условиях леммы можно использовать равенства (11), (12) при $F(x,\theta)\equiv xh(\theta)$, $\eta_\theta\stackrel{\rm def}{=}\int\limits_t^{*\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}$, т.к. очевидно $\eta_\theta\in Q_4([t,s])$, $xh(\theta)\in C_2(-\infty,\infty)$, $\eta_\theta h(\theta)\in M_2([t,s])$. Таким образом имеем:

$$
\int\limits_t^{*\tau}h(\theta)\int\limits_t^{*\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}d\mathbf{w}_\theta^{(j)}=
$$

$$
=\int\limits_t^{\tau}h(\theta)\int\limits_t^{*\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}d\mathbf{w}_\theta^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^{\tau}h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta, \qquad (15)
$$

$$
\int\limits_t^{*\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}=\int\limits_t^{\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^{\theta}b_u du \qquad (16)
$$

с в.1, где $\mathbf{I}_A$ – индикатор множества A. Подставим (15), (16) в левую часть (14) и дважды воспользуемся теоремой 1:

$$
\int\limits_t^{s}g(\tau)\int\limits_t^{*\tau}h(\theta)\int\limits_t^{*\theta}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}d\mathbf{w}_\theta^{(j)}d\tau=
$$

$$
=\int\limits_t^{s}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}\int\limits_u^{s}h(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\int\limits_\theta^{s}g(\tau)d\tau+
$$

$$
+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^{s}b_u du\int\limits_u^{s}h(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\int\limits_\theta^{s}g(\tau)d\tau+
$$

$$
+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^{s}h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta\int\limits_\theta^{s}g(\tau)d\tau=
$$

$$
=G(s)\Biggl(\int\limits_t^{s}\xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}\int\limits_u^{s}h(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^{s}h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta+
$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^s b_u du\int\limits_u^s h(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\Biggr)-$$

$$-\Biggl(\int\limits_t^s \xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}\int\limits_u^s G(\theta)h(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^s G(\theta)h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^s b_u du\int\limits_u^s h(\theta)G(\theta)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\Biggr)=$$

$$=G(s)\Biggl(\int\limits_t^s h(\theta)\int\limits_t^\theta \xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}d\mathbf{w}_\theta^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^s h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^s h(\theta)\int\limits_t^\theta b_u du d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\Biggr)-$$

$$-\Biggl(\int\limits_t^s G(\theta)h(\theta)\int\limits_t^\theta \xi_u^{(l)}d\mathbf{w}_u^{(i)}d\mathbf{w}_\theta^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{i=j\}}\int\limits_t^s G(\theta)h(\theta)\xi_\theta^{(l)}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{I}_{\{l=i\}}\int\limits_t^s h(\theta)G(\theta)\int\limits_t^\theta b_u du d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\Biggr) \qquad (17)$$

с в.1. Используя (15), (16), формулу, которая отличается от (15) заменой $h(\theta)$ на $G(\theta)h(\theta)$, а также (17), получим (14). Лемма доказана.

3. Разложение Тейлора–Стратоновича

В данном параграфе приведем разложение Тейлора–Стратоновича, полученное в [4] и введем ряд необходимых в дальнейшем обозначений.

Пусть $\mathcal{L}$ – класс функций $R(\mathbf{x},t):\Re^n\times[0,T]\to\Re^1$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и один раз по t.

Определим на классе $\mathcal{L}$ следующие операторы:

$$LR(\mathbf{x},t)\stackrel{\rm def}{=}\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n}B^{(lj)}(\mathbf{x},t)B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 R}{\partial\mathbf{x}^{(l)}\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t), \tag{18}$$

$$G^{(i)}R(\mathbf{x},t)\stackrel{\rm def}{=}\sum_{j=1}^{n}B^{(ji)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t);\ i=1,\ldots,m. \tag{19}$$

По формуле Ито [1]:

$$R(\mathbf{x}_s,s)=R(\mathbf{x}_t,t)+\int\limits_t^s LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_t^s G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)} \tag{20}$$

с в.1, где $0\leqslant t<s\leqslant T$ и предполагается, что функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $B(\mathbf{x},t)$, $R(\mathbf{x},t)$ таковы, что $LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)$, $G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)\in M_2([0,T])$; $i=1,\ldots,m$.

Предположим кроме этого, что $G^{(i)}R(\mathbf{x},t)\in C_2(-\infty,\infty)$; $i=1,\ldots,m$; $R(\mathbf{x}_\tau,\tau)\in Q_4([0,T])$. Тогда с помощью (11), (12) получим:

$$\int\limits_t^s G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}=$$

$$=\int\limits_t^{*s} G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}-\frac{1}{2}\int\limits_t^s G^{(i)}G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau\ \text{с в.1}; \tag{21}$$

$i=1,\ldots,m$.

Используя (21) перепишем (20) в виде [4]:

$$R(\mathbf{x}_s,s)=R(\mathbf{x}_t,t)+\int\limits_t^s \bar{L}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_t^{*s} G^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i)}\ \text{с в.1}, \tag{22}$$

где

$$\bar{L}R(\mathbf{x},t)\stackrel{\rm def}{=}LR(\mathbf{x},t)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}G^{(i)}G^{(i)}R(\mathbf{x},t). \tag{23}$$

Введем обозначения:

$${}^{(k)}A=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{m_1\qquad m_k};\ m_1,\ldots,m_k\geqslant 1; \tag{24}$$

$$
{}^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}B =
$$

$$
= \begin{cases} \left\| \sum\limits_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum\limits_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1\ldots i_{k+l})} B^{(i_1\ldots i_l)} \right\|_{i_{l+1}=1,\ldots,i_{l+k}=1}^{m_{l+1}\qquad m_{l+k}} & \text{при } k \geqslant 1 \\ \sum\limits_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum\limits_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1\ldots i_l)} B^{(i_1\ldots i_l)} & \text{при } k = 0 \end{cases};
$$

$$
\left\| A_{k+1} D_k^{(i_k)} A_k \ldots A_2 D_1^{(i_1)} A_1 R(\mathbf{x},t) \right\|_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{m\qquad m} =
$$

$$
= {}^{(k)}A_{k+1} D_k A_k \ldots A_2 D_1 A_1 R(\mathbf{x},t), \tag{25}
$$

где $A_p, D_q^{(i)}$; $p=1,\ldots,k+1$; $q=1,\ldots,k$; $i=1,\ldots,m$ – операторы, определенные на множестве $\mathcal{L}$. Предполагается, что левая часть (25) существует. Договоримся понимать $\overset{0}{\cdot}$ как обычное умножение. Если при некотором $l \in \{1,\ldots,k\}$: $m_l = 0$ в (24), то условимся понимать правую часть (24) следующим образом:

$$
\left\| A^{(i_1\ldots i_{l-1} i_{l+1}\ldots i_k)} \right\|_{i_1=1,\ldots,i_{l-1}=1, i_{l+1}=1,\ldots,i_k=1}^{m_1\ \ldots\ m_{l-1}\ m_{l+1}\ \ldots\ m_k},
$$

или в сокращенной записи: ${}^{(k-1)}A$.

Введем также следующие обозначения:

$$
\left\| D_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x},t) \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\qquad m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k} \ldots D_{\lambda_1} R(\mathbf{x},t);
$$

$$
{}^{(p_l)}J^*_{(\lambda_l\ldots\lambda_1)s,t} = \left\| J^{*(i_l\ldots i_1)}_{(\lambda_l\ldots\lambda_1)s,t} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\qquad m\lambda_l};
$$

$$
\mathcal{M}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\ \lambda_l = 1 \text{ или } 0;\ l=1,\ldots,k\};\ k \geqslant 1,
$$

где

$$
J^{*(i_l\ldots i_1)}_{(\lambda_l\ldots\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_l)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_1)};
$$

$\lambda_l = 1$ или 0; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = \bar{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G^{(i_l)}$ и $i_l = 1,\ldots,m$ при $\lambda_l = 1$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l} \lambda_j$; $l=1,\ldots,r+1$; $\mathbf{w}_\tau^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ – $\mathcal{F}_\tau$ измеримые при всех $\tau \in [0,T]$ независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$.

Применяя многократно последовательно формулу (22) к процессу $R(\mathbf{x}_s, s)$ можно получить разложение Тейлора–Стратоновича [4, 5]:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}R(\mathbf{x}_t, t)\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}J^{*}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + (D_{r+1})_{s,t} \tag{26}$$

с в.1, где

$$(D_{r+1})_{s,t} = \sum_{(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_{r+1}} \times$$

$$\times \int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} {}^{(p_{r+1})}D_{\lambda_{r+1}}\ldots D_{\lambda_1}R(\mathbf{x}_{\tau_1}, \tau_1)\overset{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}\ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}}. \tag{27}$$

При этом предполагается, что выполнены условия существования правой части (26).

Одним из возможных вариантов таких условий могут послужить следующие условия:

(i) *для всех* $(\lambda_l,\ldots,\lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{r} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$;

(ii) *для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$; $t, s \in [0, T]$; $(\lambda_l,\ldots,\lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{r+1} \mathcal{M}_g$ *и некоторого* $\nu > 0$:

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}, t) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{y}, t)| \leqslant K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \tag{28}$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}, t)| \leqslant K(1+|\mathbf{x}|), \tag{29}$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}, t) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}, s)| \leqslant K(1+|\mathbf{x}|)|t-s|^{\nu},$$

где $K < \infty$ *– постоянная;* $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ *и* $i_l = 0$ *при* $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G^{(i_l)}$ *и* $i_l = 1,\ldots,m$ *при* $\lambda_l = 1$;

(iii) *функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $B(\mathbf{x}, t)$ *измеримы по совокупности переменных и удовлетворяют условиям* (28), (29);

(iv) $\mathbf{x}_0$ *–* $\mathcal{F}_0$ *измерима и* $\mathbf{E}|\mathbf{x}_0|^8 < \infty$.

4. Первая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича

В данном параграфе с помощью теоремы 1 и леммы 1 правая часть (26) будет преобразована к представлению, в которое входят повторные стохастические интегралы Стратоновича вида (6).

Положим

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t} =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_t^{*s} (t-\tau_1)^{l_k}\ldots \int\limits_t^{*\tau_{k-1}} (t-\tau_k)^{l_1}\, d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} & \text{при } k\geqslant 1 \\ 1 & \text{при } k=0 \end{cases},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$;

$$\left\| I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t}\right\|^{m\qquad m}_{i_1=1,\ldots,i_k=1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k\, s,t};$$

$$\bar G^{(i)}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{p}\left(\bar G^{(i)}_{p-1}\bar L - \bar L\bar G^{(i)}_{p-1}\right);\ p=1,2,\ldots;\ i=1,\ldots,m; \qquad (30)$$

$\bar G^{(i)}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} G^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$; операторы $\bar L$ и $G^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ определяются равенствами (18), (19), (23);

$$\mathcal{A}_q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(k,j,l_1,\ldots,l_k):\ k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p;\ k,j,l_1,\ldots,l_k=0,1,\ldots\};$$

$$\left\|\bar G^{(i_1)}_{l_1}\ldots\bar G^{(i_k)}_{l_k}\bar L^j R(\mathbf{x},t)\right\|^{m\qquad m}_{i_1=1,\ldots,i_k=1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} {}^{(k)}\bar G_{l_1}\ldots\bar G_{l_k}\bar L^j R(\mathbf{x},t);$$

$$\bar L^j R(\mathbf{x},t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar L\ldots\bar L}_{j} R(\mathbf{x},t) & \text{при } j\geqslant 1\\ R(\mathbf{x},t) & \text{при } j=0\end{cases}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv). *Тогда для любых* $s,t\in[0,T]$ *таких, что* $s>t$ *и любого натурального* r *с в.1 справедливо разложение:*

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t)+$$
$$+\sum_{q=1}^{r}\ \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!}\,{}^{(k)}\bar G_{l_1}\ldots\bar G_{l_k}\bar L^j R(\mathbf{x}_t,t)\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k\, s,t}+$$

$$+(D_{r+1})_{s,t}, \tag{31}$$

где $(D_{r+1})_{s,t}$ *имеет вид* (27).

Доказательство. Покажем, что с в.1

$$\sum_{(\lambda_q,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_q} {}^{(p_q)}D_{\lambda_q}\ldots D_{\lambda_1}R(\mathbf{x}_t,t)\overset{p_q}{\cdot}{}^{(p_q)}J^*_{(\lambda_q\ldots\lambda_1)s,t}=$$

$$=\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^jR(\mathbf{x}_t,t)\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}. \tag{32}$$

При $q=1$ равенство (32) справедливо. Предположим, что (32) справедливо при некотором $q>1$. Тогда

$$\sum_{(\lambda_{q+1},\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_{q+1}} {}^{(p_{q+1})}D_{\lambda_1}\ldots D_{\lambda_{q+1}}R(\mathbf{x}_t,t)\overset{p_{q+1}}{\cdot}{}^{(p_{q+1})}J^*_{(\lambda_1\ldots\lambda_{q+1})s,t}=$$

$$=\sum_{\lambda_{q+1}\in\{1,\ 0\}}\int\limits_t^s\sum_{(\lambda_q,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_q}\times$$

$$\times\left({}^{(p_{q+1})}D_{\lambda_1}\ldots D_{\lambda_{q+1}}R(\mathbf{x}_t,t)\overset{p_q}{\cdot}{}^{(p_q)}J^*_{(\lambda_1\ldots\lambda_q)\theta,t}\right)\overset{\lambda_{q+1}}{\cdot}d\mathbf{w}_\theta=$$

$$=\sum_{\lambda_{q+1}\in\{1,\ 0\}}\int\limits_t^s\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(\theta-t)^j}{j!}\times$$

$$\times\left({}^{(k+\lambda_{q+1})}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^jD_{\lambda_{q+1}}R(\mathbf{x}_t,t)\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k\,\theta,t}}\right)\overset{\lambda_{q+1}}{\cdot}d\mathbf{w}_\theta=$$

$$=\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\Biggl({}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^{j+1}R(\mathbf{x}_t,t)\overset{k}{\cdot}\int\limits_t^s\frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k\,\theta,t}}d\theta+$$

$$+\left({}^{(k+1)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j\bar{G}_0R(\mathbf{x}_t,t)\overset{k}{\cdot}\int\limits_t^s\frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k\,\theta,t}}\right)\overset{1}{\cdot}d\mathbf{w}_\theta\Biggr) \tag{33}$$

с в.1.

Согласно лемме 1

$$\int\limits_t^s\frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k\,\theta,t}}d\theta=$$

$$
= \begin{cases} \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k=0 \\ \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} - \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_{k-1}\ \, l_k+j+1\, s,t} & \text{при } k>0 \end{cases} \tag{34}
$$

с в.1. Кроме этого согласно введенным обозначениям

$$
\int\limits_t^s \frac{(\theta-t)^j}{j!} I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, \theta,t} d\mathbf{w}^{(i_{k+1})}_{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^j}{j!} I^{*(i_1\ldots i_k i_{k+1})}_{l_1\ldots l_k j\, s,t}. \tag{35}
$$

Подставим выражения (34), (35) в (33). Далее сгруппировав слагаемые в получившемся выражении при повторных стохастических интегралах Стратоновича с одинаковыми нижними индексами и воспользовавшись равенством:

$$
\bar{G}^{(i)}_p R(\mathbf{x},t) = \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C^q_p \bar{L}^q \bar{G}^{(i)}_0 \bar{L}^{p-q} R(\mathbf{x},t);\ C^q_p = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \tag{36}
$$

которое вытекает из (30), заметим, что получившееся выражение с в.1 равно

$$
\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_{q+1}} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j R(\mathbf{x}_t,t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t}.
$$

Далее суммируя равенства (32) при $q=1,2,\ldots,r$ и используя (26) придем к (31). Теорема доказана.

Упорядочим члены разложения (31) по порядкам малости при $s\downarrow t$ в среднеквадратическом смысле:

$$
\begin{gathered}
R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) + \\
+ \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j R(\mathbf{x}_t,t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} + \\
+ (H_{r+1})_{s,t},
\end{gathered} \tag{37}
$$

где

$$
\begin{gathered}
(H_{r+1})_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j R(\mathbf{x}_t,t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} + \\
+ (D_{r+1})_{s,t};
\end{gathered}
$$

$$\mathcal{D}_q =$$

$$= \left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k): k+2\left(j+\sum_{p=1}^{k} l_p\right) = q; k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,1,\ldots\right\}; \tag{38}$$

$$\mathcal{U}_r = \Biggl\{(k,j,l_1,\ldots,l_k):\ k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p \leqslant r;$$

$$k+2\left(j+\sum_{p=1}^{k} l_p\right) \geqslant r+1;\ k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots\Biggr\}; \tag{39}$$

$(D_{r+1})_{s,t}$ имеет вид (27).

Разложение (37) обладает тем свойством, что его остаточный член $(H_{r+1})_{s,t}$ имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле по сравнению с членами основной части разложения (37).

5. Вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича вида:

$$J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t} \stackrel{\rm def}{=}$$

$$\stackrel{\rm def}{=} \begin{cases} \int\limits_t^{*s} (s-\tau_1)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*\tau_{k-1}} (s-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k} \ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} & \text{при } k \geqslant 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$.

Нетрудно видеть, что в силу аддитивности стохастических интегралов и формулы бинома Ньютона справедливо с в.1 равенство:

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{l_k} \prod_{g=1}^{k} C^{j_g}_{l_g} (t-s)^{l_1+\ldots+l_k-j_1-\ldots-j_k} J^{*(i_1\ldots i_k)}_{j_1\ldots j_k\, s,t} \text{ с в.1,} \tag{40}$$

где $C^k_l \stackrel{\rm def}{=} \frac{l!}{k!(l-k)!}$ – биномиальный коэффициент. Таким образом, разложение Тейлора–Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$,

$s \in [0, T]$ можно строить как по повторным стохастическим интегралам $I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t}$, что было зделано в предыдущем параграфе, так и по повторным стохастическим инегралам $J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t}$. Этому вопросу посвящен данный параграф.

Положим

$$\left\| J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\, s,t} \right\|_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{m \qquad m} \stackrel{\rm def}{=} {}^{(k)}J^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t},$$

$$\left\| \bar{L}^j G^{(i_1)}_{l_1} \ldots \bar{G}^{(i_k)}_{l_k} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{m \qquad m} \stackrel{\rm def}{=} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k} R(\mathbf{x}, t).$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv). *Тогда для любых* $s, t \in [0, T]$ *таких, что* $s > t$ *и любого натурального* r *с в.* 1 *справедливо разложение:*

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) +$$

$$+\sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k} R(\mathbf{x}_t, t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}J^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} + (D_{r+1})_{s,t}, \tag{41}$$

где $(D_{r+1})_{s,t}$ *имеет вид* (27).

Доказательство. теоремы сводится к проверке при $q = 1, 2, \ldots, r$ справедливости равенств:

$$\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k} R(\mathbf{x}_t, t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}J^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t, t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} \ \text{с в.1}. \tag{42}$$

Равенство (42) проверяется путем подстановки в его правую часть выражения (40) и использования формулы (36).

Упорядочим члены разложения (41) по порядкам малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) +$$

$$+\sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k} R(\mathbf{x}_t, t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}J^{*}_{l_1\ldots l_k\, s,t} + (\tilde{H}_{r+1})_{s,t},$$

где

$$(\tilde{H}_{r+1})_{s,t} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k} R(\mathbf{x}_t,t) \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}J^*_{l_1\ldots l_{k\,s,t}} +$$

$$+(D_{r+1})_{s,t};$$

$(D_{r+1})_{s,t}$ имеет вид (27), а $\mathcal{D}_q$ и $\mathcal{U}_r$ – (38) и (39) соответственно.

В заключение отметим, что в [5] (предложение 5.10.2, с. 210) доказана сходимость с в.1 усеченного разложения Тейлора–Стратоновича (26) (без остаточного члена $(D_{r+1})_{s,t}$) к процессу $R(\mathbf{x}_s,s)$ при $r\to\infty$ для всех $s,t\in[0,T]$; $s>t$; $T<\infty$. Поскольку разложения (31), (41) получены из разложения Тейлора–Стратоновича (26) без каких-либо дополнительных условий, то усеченные разложения (31), (41) (без остаточного члена $(D_{r+1})_{s,t}$) будут в условиях предложения 5.10.2 ([5, с. 210]) сходиться к процессу $R(\mathbf{x}_s,s)$ с в.1 при $r\to\infty$ для всех $s,t\in[0,T]$; $s>t$; $T<\infty$.

Литература

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев: Наукова Думка, 1968, 354 с.
2. W. Wagner, E. Platen, *Approximation of Ito integral equations.* Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978, 27 p.
3. E. Platen, W. Wagner, *On a Raylor formula for a class of Ito processes.* Probab. Math. Statist., **3** (1982), 37–51.
4. P. E. Kloeden, E. Platen, *The Stratonovich and Ito–Taylor expansions.* — Math. Nachr. **151** (1991), 33–50.
5. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stohastic differential equations.* Berlin: Springer-Verlag, 1992, 632 p.
6. P. E. Kloeden, E. Platen, *Relations between multiple Ito and Stratonovich integrals.* Stoch. Anal. Appl., **9** (1991), 86–96.
7. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Унифицированное разложение Тейлора–Ито.* Записки научн. семин. ПОМИ, **244** (1997), 186–204.
8. Д. Ф. Кузнецов, *Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов.* СПб., Наука, 1999, 459 с.
9. E. Platen, *An introduction to numerical methods for stohastic differential equations.* Acta Numerica, **8** (1999), 195–244.
10. Г. Н. Мильштейн, *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 225 с.
11. Д. Ф. Кузнецов, *Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье.* Записки научн. семин. ПОМИ, **260** (1999), 164–184.

12. Д. Ф. Кузнецов, *Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах.* ВИНИТИ, No. 3607-В97, 1997, 31 с.
13. Р. Л. Стратонович, *Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.* М: Изд-во МГУ, 1966, 320 с.
14. С. Ватанабэ, Н. Икэда, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* М: Наука, 1986, 445 с.

Kuznetsov D. F. New representations of the Taylor–Stratonovich expansion.

The problem of the Taylor–Stratonovich expansion of the Itô random processes in a neighborhood of a point is considered. The usual form of the Taylor–Stratonovich expansion is transformed to a new representation, which includes minimal quantity of different types of multiple Stratonowich stochastic integrals. Therefore, these representations are more convenient for constructing algorithms of numerical solution of stochastic differential Itô equations.

С.-Петербургский
технический университет

Поступило 29 октября 2000 г.