Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

В. В. Петров

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ О СУЩЕСТВОВАНИИ МОМЕНТОВ

В работе [1] доказано следующее предложение: если $\{X_n;\, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых случайных величин, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ и $\{B_n\}$ – неубывающая числовая последовательность, удовлетворяющая условиям[1]

$$B_n \to \infty, \tag{1}$$

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1 \tag{2}$$

и

$$\sup_x \left| P(S_n < B_n^{\frac{1}{2}} x) - (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right| = O\big((\ln B_n)^{-1-\delta}\big) \tag{3}$$

при некотором $\delta > 0$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.} \tag{4}$$

В этом предложении, обобщающем теоремы из [2] и [3], отсутствуют условия существования каких-либо моментов у рассматриваемых случайных величин. В [2] сделаны дополнительные предположения о том, что $EX_n = 0$ и $EX_n^2 < \infty$ для всех n, и получено соотношение (4) при $B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2$. В 3] предполагалось, что случайные величины $X_1, X_2, \dots$ имеют симметричные распределения, но не предполагалось существование каких-либо моментов. Формулировку результата работы [1] можно найти также в [4, с. 37].

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы, в которой отсутствует условие (2).

Работа поддержана грантами РФФИ 99-01-00732 и 97-M3-32.

[1]Пределы указаны всюду при $n \to \infty$, если не оговорено противное.

Теорема. *Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $\{B_n\}$ – неубывающая числовая последовательность, удовлетворяющая условиям (1) и (3) при некотором $\delta > 0$. Тогда*

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} \leqslant 1 \quad \text{п.н.} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть τ – произвольное положительное число. Используя условие $B_n \uparrow \infty$, определим последовательность целых положительных чисел $\{n_k; k = 1, 2, \dots\}$ следующим образом: пусть n_1 таково, что $B_{n_1} > e$; при данном n_{k-1} $(k = 2, 3, \dots$ определим B_{n_k} как наименьшее целое число, для которого $B_{n_k} > (1+\tau)B_{n_{k-1}}$. Таким образом,

$$B_{n_k - 1} \leqslant (1+\tau)B_{n_{k-1}} < B_{n_k}. \tag{6}$$

Очевидно, $n_{k-1} < n_k$ при любом $k \geqslant 2$ и $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Положим

$$L(n) = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}, \quad \overline{S}_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k.$$

Неравенство (5) будет доказано, если мы покажем, что

$$P(S_n > (1+\varepsilon)L(n) \text{ б.ч.}) = 0 \tag{7}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Докажем сначала, что

$$\sum_k P\big(\overline{S}_{n_k - 1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1})\big) < \infty \tag{8}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Воспользуемся следующим предложением [5, с. 52]:

Лемма. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ – независимые случайные величины. Если*

$$P(S_n - S_k \geqslant -C) \geqslant q \quad (k = 1, \dots, n-1) \tag{9}$$

для некоторых постоянных $C \geqslant 0$ и $q > 0$, то

$$P\big(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant x\big) \leqslant \frac{1}{q} P(S_n \geqslant x - C)$$

для любого x.

Покажем, что условия (1) и (3) обеспечивают выполнение условия (9) при $C = b\sqrt{B_n}$ и всех достаточно больших n, если постоянную b взять достаточно большой. Для произвольных событий A и B имеем $P(AB) = P(A) - P(A\overline{B}) \geqslant P(A) = P(\overline{B})$, где $\overline{B}$ – событие, противоположное событию B. Следовательно,

$$P\left(S_n - S_k \geqslant -b\sqrt{B_n}\right) \geqslant P\left(\left[S_n \geqslant -\frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right] \cap \left[S_k \leqslant \frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right]\right) \geqslant$$
$$\geqslant P\left(S_n \geqslant -\frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) - P\left(S_k > \frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right). \tag{10}$$

В силу условия (3) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие постоянные b и N, что $P\left(|S_n| \geqslant \frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) < \varepsilon$ при $n > N$. Если $N \leqslant k \leqslant n$, то

$$P\left(S_k > \frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) \leqslant P(S_k > \frac{b}{2}\sqrt{B_k}) < \varepsilon$$

вследствие неубывания последовательности $\{B_n\}$. Если же $k < N$, то $P\left(S_k > \frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) < \varepsilon$ для всех достаточно больших n. Поэтому

$$P\left(S_n \geqslant -\frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) - P\left(S_n > -\frac{b}{2}\sqrt{B_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

для всех достаточно больших n. Отсюда и из (10) получаем

$$P\left(S_n - S_k \geqslant -b\sqrt{B_n}\right) \geqslant \frac{1}{2} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

для всех достаточно больших n. Итак, выполнено условие (9) при $q = \frac{1}{2}$.

В силу леммы, имеем

$$\begin{gathered} P(\overline{S}_{n-1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1})) \leqslant \\ \leqslant 2P(S_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1}) - b\sqrt{B_{n_k-1}}) \leqslant \\ \leqslant 2P(S_{n_k-1} > (1+\gamma)L(n_k-1) \end{gathered} \tag{11}$$

для любого $\gamma < \varepsilon$ и всех достаточно больших k, поскольку

$$(1+\varepsilon)L(n_{k-1}) - b\sqrt{B_{n_k-1}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}}\, L(n_k-1) - b\sqrt{B_{n_k-1}} \geqslant (1+\gamma)L(n_k-1)$$

вследствие (6) для любого $\gamma < \varepsilon$, если взять τ достаточно малым.

Из соотношения

$$1-\Phi(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}x^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+o(1))\quad (x\to+\infty),$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения, вытекает соотношение

$$1-\Phi(a(2\ln\ln B_n)^{1/2})=(2a)^{-1}(\pi\ln\ln B_n)^{-\frac{1}{2}}(\ln B_n)^{-a^2}(1+o(1))$$

для любого $a>0$. Принимая во внимание условие (3), получаем

$$P(S_n\geqslant aL(n))=1-\Phi(a(2\ln\ln B_n)^{1/2})+O((\ln B_n)^{-1-\delta}).$$

Поэтому

$$P(S_n\geqslant aL(n))\leqslant(\ln B_n)^{-a^2} \tag{12}$$

для любого положительного $a<\sqrt{1+\delta}$ и всех достаточно больших n.

В силу (6), имеем

$$B_{n_k-1}\geqslant B_{n_{k-1}}\geqslant(1+\tau)^{k-2}B_{n_1}\geqslant(1+\tau)^{k-2}e,$$

$$(\ln B_{n_k-1})^{-a^2}\leqslant((k-2)\ln(1+\tau))^{-a^2}$$

для любого целого $k\geqslant3$. Из (11) и (12) следует, что

$$P(\overline{S}_{n_k-1}>(1+\varepsilon)L(n_{k-1}))<M(k-2)^{-c^2} \tag{13}$$

для всех достаточно больших k, если $c^2<\min\{(1+\varepsilon)^2,1+\delta\}$. Здесь M – положительная постоянная, не зависящая от k. При этом для данных положительных ε и δ постоянную c можно выбрать удовлетворяющей условию $c>1$. Поэтому из (13) следует (8).

Для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$P(S_n>(1+\varepsilon)L(n)\text{ б.ч.})\leqslant$$
$$\leqslant P\left(\max_{n_{k-1}\leqslant n<n_k}S_n>(1+\varepsilon)L(n_{k-1})\text{ б.ч.}\right)\leqslant$$
$$\leqslant P\left(\overline{S}_{n_k-1}>(1+\varepsilon)L(n_{k-1})\text{ б.ч.}\right)=0$$

в силу (8) и леммы Бореля–Кантелли. Равенство (7) доказано.

Заметим, что если последовательности $\{X_n\}$ и $\{B_n\}$ удовлетворяют условиям (1) и (3) при некотором $\delta>0$, но не удовлетворяют условию (2), то соотношение (4) может не выполняться.

Рассмотрим последовательность независимых нормально распределенных случайных величин $\{X_n\}$ с математическим ожиданиями, равными нулю, и дисперсиями, такими, что $\sum_{k=1}^n EX_k^2 = e^{n^\beta}$, где $\beta > 1$. Положим $B_n = \sum_{k=1}^n EX_k^2$. Для последовательностей $\{X_n\}$ и $\{B_n\}$ выполнены условия (1) и (3) при любом $\delta > 0$, так как $P(S_n < B_n^{\frac{1}{2}} x) \equiv \Phi(x)$ при любом n. Условие (2) не выполнено. Используя рассуждения, аналогичные приведенным выше, нетрудно показать, что

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} \leqslant \beta^{-\frac{1}{2}} \text{ п.н.}$$

(Можно показать даже, что здесь имеет место равенство.) Соотношение (4) не имеет места, поскольку $\beta > 1$.

Литература

1. В. В. Петров, *Одна теорема о законе повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее примен. **16, No. 4** (1971), 715–718.
2. В. В. Петров, *О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма.* — Теория вероятностей и ее примен. **11, No. 3** (1966), 514–518.
3. V. V. Petrov, *On the law of the iterated logarithm without assumptions about the existence of moments.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59**, No. **4** (1968), 1068–1072.
4. R. J. Serfling, *Approximation theorems of mathematical statistics.* New York, Wiley, 1980, 371 p.
5. V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory.* Oxford, University Press, 1995, 292 p.

Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm without assumptions about the existence of moments.

Sufficient conditions are given for the applicability of the law of the interated logarithm to sequences of independent random variables. These conditions do not include assumptions about the existence of any moments.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 29 ноября 2000 г.