Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

В. В. Петров

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С КОНЕЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

В [1] доказана одна теорема о законе повторного логарифма для последовательности независимых случайных величин, не содержащая каких-либо предположений о существовании моментов у этих случайных величин. В частном случае, когда у рассматриваемых случайных величин существуют моменты второго порядка, из основного результата работы [1] вытекает следующее предложение.

Пусть $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями, равными нулю. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2, \tag{1}$$

$$\mathcal{F}_n(x) = P\left(S_n < x\sqrt{B_n}\right), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{2}$$

Если выполнены условия[1]

$$B_n \to \infty \tag{3}$$

и

$$\sup_x |\mathcal{F}_n(x) - \Phi(x)| = O\big((\ln B_n)^{-1-\delta}\big) \tag{4}$$

при некотором $\delta > 0$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}} \leqslant 1 \text{ п.н.} \tag{5}$$

Работа поддержана грантами РФФИ 99-01-00732 и 97-М3-32.

[1]Пределы указаны всюду при $n \to \infty$, если не оговорено противное.

В [2] (см. также [3], с. 261) ранее было доказано, что при выполнении (3) и (4) и дополнительного условия

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \to 1 \tag{6}$$

имеет место равенство

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \ln\ln B)^{1/2}} = 1 \text{ п.н.} \tag{7}$$

Как показал В. А. Егоров [4], в последнем предложении нельзя ослабить условие [4], заменив в нем $\delta > 0$ значением $\delta = 0$. В [1] построен пример последовательности независимых случайных величин с конечными дисперсиями и быстро растущей дисперсией суммы $B_n = ES_n^2$, для которой условия (3) и (4) выполнены при любом $\delta > 0$, условие (6) не выполнено и равенство (7) не имеет места.

Целью настоящей работы является доказательство следующего более общего предложения об условиях, достаточных для неравенства (5), в котором условие (4) заменено существенно более слабым условием.

Теорема. *Пусть $X_1, \ldots, X_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, такая, что $EX_n = 0$ и $EX_n^2 < \infty$ для любого n. Определим S_n и B_n равенствами* (1). *Предположим, что выполнены условие* (3) *и следующее условие* (A)*: для любого x из некоторого невырожденного интервала $(1, 1+\beta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C такая, что*

$$P\left(S_n \geqslant x\sqrt{B_n}\, t_n\right) \leqslant Ce^{-\frac{1}{2}x^2 t_n^2 (1-\varepsilon)} \tag{8}$$

для всех достаточно больших n, где $t_n = (2\ln\ln B_n)^{1/2}$. Тогда имеет место неравенство (5).

Заметим, что левую часть (8) можно записать в виде $P(Z_n \geqslant xt_n)$, где $Z_n = S_n\big/\sqrt{B_n}$. Таким образом, неравенство (8) представляет собой оценку сверху для вероятностей умеренных уклонений нормированной суммы независимых случайных величин Z_n. Поэтому для проверки выполнения условия (A) можно воспользоваться известными предельными теоремами о вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин, в частности, известными условиями, достаточными для соотношения

$$\frac{P(Z_n \geqslant y)}{1-\Phi(y)} \to 1 \tag{9}$$

равномерно относительно y в области $0 \leqslant y \leqslant C(\ln\ln n)^{1/2}$ или в области $0 \leqslant y \leqslant C(\ln n)^{1/2}$ (см., например, 5] и указанную там литературу). Если $y = x(2\ln\ln n)^{1/2}$ и $B_n = n$, то из (9) и соотношения

$$1-\Phi(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}(1+o(1)) \quad (y \to +\infty) \tag{10}$$

следует неравенство (8) для всех достаточно больших n даже при $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Пусть τ – произвольное положительное число. Введем последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots$ следующим образом: пусть n_1 таково, что $B_{n_1} > e$; при данном n_{k-1} $(k = 2, 3, \ldots)$ определим B_{n_k} как наименьшее целое число, для которого $B_{n_k} > (1+\tau)B_{n_{k-1}}$. Мы имеем

$$B_{n_k-1} \leqslant (1+\tau)B_{n_{k-1}} < B_{n_k} \tag{11}$$

при всех k. Отсюда следует, что последовательность $\{n_k\}$ строго возрастает. Положим

$$L(n) = (2B_n \ln\ln B_n)^{1/2}, \quad \overline{S}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k.$$

Для доказательства (5) достаточно доказать, что

$$P(S_n > (1+\varepsilon)L(n) \text{ б.ч.}) = 0 \tag{12}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Докажем сначала, что

$$\sum_k P(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1})) < \infty \tag{13}$$

для любого $\varepsilon > 0$. С этой целью применим неравенство Колмогорова

$$P(\overline{S}_n \geqslant x) \leqslant 2P\left(S_n \geqslant x - \sqrt{2B_n}\right),$$

справедливое для суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями, равными нулю, и для любого x (см., например, [3], с. 79). Для достаточно больших k имеем

$$P(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1})) \leqslant 2P\left(S_{n_k-1} \geqslant (1+\varepsilon)L(n_{k-1}) - \sqrt{2B_{n_k-1}}\right) \leqslant 2P(S_{n_k-1} > (1+\gamma)L(n_k-1)) \quad (14)$$

для любого $\gamma < \varepsilon$, так как

$$(1+\varepsilon)L(n_{k-1}) - \sqrt{2B_{n_k-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\tau}} L(n_k-1) - \sqrt{2B_{n_k-1}} \geqslant (1+\gamma)L(n_k-1)$$

в силу (11) для любого $\gamma < \varepsilon$, если взять τ достаточно малым.

Пусть δ – произвольное положительное число. Из (8) следует, что

$$P(S_n \geqslant xL(n)) \leqslant C(\ln B_n)^{-x^2(1-\delta)} \quad (15)$$

для любого x из интервала $1 < x < 1+\beta$ и всех достаточно больших n.

В силу (11) имеем

$$B_{n_k-1} \geqslant B_{n_{k-1}} \geqslant (1+\tau)^{k-2} B_{n_1} \geqslant (1+\tau)^{k-2} e,$$

$$(\ln B_{n_k-1})^{-x^2(1-\delta)} \leqslant ((k-2)\ln(1+\tau))^{-x^2(1-\delta)}$$

для любого целого $k \geqslant 3$. Из (14) и (15) получаем

$$P(\overline{S}_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L(n_k-1)) \leqslant M(k-2)^{-c^2} \quad (16)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших k, если $c^2 < (1+\varepsilon)^2(1-\delta)$. Здесь M – положительная постоянная, не зависящая от k. При этом для заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать число $\delta > 0$ столь малым, что $c^2 > 1$. При таком выборе δ из (16) следует (13).

Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P(S_n > (1+\varepsilon)L(n) \text{ б.ч.}) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\max_{n_{k-1} \leqslant n < n_k} S_n > (1+\varepsilon)L(n_{k-1}) \text{ б.ч.}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P(S_{n_k-1} > (1+\varepsilon)L(n_{k-1}) \text{ б.ч.}) = 0$$

в силу (13) и леммы Бореля–Кантелли. Равенство (12) доказано.

Литература

1. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма без предположений о существовании моментов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ (2000).
2. В. В. Петров, *О связи между оценкой остаточного члена в центральной предельной теореме и законом повторного логарифма*. — Теория вероятностей и ее примен. **11, No. 3** (1966), 514–518.
3. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. Наука, М. (1987).
4. В. В. Петров, *О законе повторного логарифма*. Теория вероятностей и ее примен., **14**, No. 4 (1969), 722–729.
5. В. В. Петров, *О вероятностях умеренных уклонений*. Зап. научн. семин. ПОМИ, **260** (1999), 214–217.

Petrov V. V. On the law of the iterated logarithm for a sequence of independent random variables with finite variances.

Sufficient conditions are fiven for the applicability of the law of the iterated logarithm to a sequence of independent random variables having finite variances.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 ноября 2000 г.