Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 278, 2001 г.

**В. А. Ровский, В. Н. Судаков**

# ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ ГАУССОВСКИХ МЕР НА КОНИЧЕСКОЙ СИГМА–АЛГЕБРЕ

**0.** Для пары центрированных гауссовских сепарабельных мер, рассматриваемых на конической $\sigma$-подалгебре, доказывается альтернатива “эквивалентность или сингулярность” и устанавливается критерий их эквивалентности. Кроме того, для пар несовпадающих конечномерных гауссовских мер, эквивалентных на конической $\sigma$-алгебре, установлена неограниченно растущая с ростом размерности оценка снизу логарифмической вариации их производной Радона–Никодима через отношение крайних экстремальных чисел отношения их ковариационных квадратичных форм.

**1. Объект изучения.** Пусть на векторном пространстве $E$ на $\sigma$-алгебре $\sigma(F)$, порожденной некоторым векторным пространством $F$ линейных функционалов на $E$, разделяющим точки $E$, заданы две центрированные гауссовские меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$. Векторное пространство $(E, \mathcal{F}, \gamma)$ называется гауссовским пространством с мерой, если определенный на пространстве $F$ характеристический функционал $\chi_\gamma \colon F \longrightarrow \mathbb{C}$ (в предположении центрированности на самом деле $F \longrightarrow \mathbb{R}$) меры $\gamma$ – гауссовский, т.е.

$$F \ni f \longrightarrow \chi_\gamma(f) := \int\limits_E \exp i\langle \omega, f\rangle \gamma(d\omega) = \exp(-\frac{1}{2}q(f))$$

где $q = q_\gamma$ – некоторая положительная квадратичная форма, называемая ковариационной. Если $E$ – конечномерное координатное пространство, то матрица этой квадратичной формы – это матрица ковариаций меры $\gamma$, а в общем случае $q(f)$ – это квадрат $L^2(\gamma)$-нормы функции $f$. Мера с таким характеристическим функционалом называется гауссовской (без предположения о полно-

Работа поддержана грантом РФФИ Nos. 99-01-00109 и 00-15-96019.

те $\sigma$-алгебры). Если же $\sigma$-алгебра $\mathcal{F}$ полна по гауссовской мере $\gamma$ и, кроме того, как пространство с мерой $(E, \mathcal{F}, \gamma)$ является пространством Лебега–Рохлина (пространством Лебега по терминологии В. А. Рохлина [1]), то мы называем $(E, \mathcal{F}, \gamma)$ гауссовским пространством с мерой или гауссовским вероятностным пространством (не путать с гауссовским пространством случайных величин – подпространством пространства $L^0(\mathbf{P})$ классов эквивалентных случайных величин, состоящим из гауссовских случайных величин).

Если гауссовские меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$ сингулярны, то пополненные по ним $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}$ не совпадают. В этом случае мы будем предполагать, что в результате такого пополнения, своего для каждой меры, мы тем не менее для каждой меры приходим к пространству Лебега–Рохлина. Это дает нам право при необходимости рассматривать условные меры на элементах возникающих измеримых разбиений, в частности – говорить о том, что условные гауссовские меры на элементах разбиения $\eta$ на лучи – это $\delta$-меры. Только для гауссовских пространств с мерой в указанном смысле определяемое ниже ядро гауссовской меры является гильбертовым пространством (обладает полнотой как нормированное пространство). Впрочем, на самом деле наши выводы сохраняются для произвольных сепарабельных (т.е. со счетным базисом) гауссовских мер. Все сказанное тривиализуется в конечномерном случае, когда свойство Лебега–Рохлина выполняется автоматически.

Хорошо известно [2, 3, 5], что для каждого гауссовского пространства с мерой $(E, \mathcal{F}, \gamma)$ существует такое линейное подпространство $H_\gamma \subset E$, состоящее из всех тех элементов $f \in E$, сдвиги на которые квазиинвариантны (сохраняют тип меры $\gamma$), гильбертово в собственной норме $(Q_\gamma)^{\frac{1}{2}}$, где $Q_\gamma$ – “квадратичная форма рассеивания”, или “концентрации” (для невырожденной гауссовской меры $\gamma$ на конечномерном координатном пространстве матрица квадратичной формы $Q$ – это $\Sigma_\gamma^{-1}$, где $\Sigma_\gamma$ – матрица ковариаций меры $\gamma$), что гильбертово пространство $(H_\gamma)'$, сопряженное с ним, канонически отождествляется с пространством $E'_\gamma$ всех линейных измеримых функционалов на $(E, \mathcal{F}, \gamma)$, рассматриваемых с точностью до эквивалентности. Пространство $H_\gamma$ называется ядром гауссовской меры $\gamma$. Порождаемая на пространстве $E$ функционалами из пространства $E'_\gamma$ $\sigma$-алгебра, рассматриваемая с точностью до $\gamma$-эквивалентности, совпадает с пополнением исходной $\sigma$-алгебры, превращающей наше вероятностное гауссовское подпространство в пространство Лебега–Рохлина. Ядро $H_\gamma$ совпадает с пересечением всех линейных подпространств полной меры. Разбиение $(E, \mathcal{F}, \gamma)/H_\gamma$ в бесконечномерном случае неизмеримо, и его измеримая оболочка в любом случае $\bmod 0$ тривиальна.

Собственно говоря, понятие "гауссовское пространство с мерой" разумно определять начиная с гильбертова ядра, задающего пространство всех линейных измеримых функционалов, которое, по определению, состоит из всех линейных непрерывных функционалов на ядре и как таковых идентифицируемых, независимо от (алгебраически) линейного продолжения их на рассматриваемое в качестве $E$ векторное надпространство. Линейные непрерывные функционалы на ядре определяют тем самым слабое гауссовское распределение как на ядре, так и на его векторных надпространствах, например – на пополнениях по более слабым нормам. При этом отпадает необходимость привлекать к определению какое-либо векторное пространство вроде $F$, элементы которого являются фиксированными версиями некоторых тем самым искусственно выделенных линейных функционалов. Однако, для наших целей подобные акценты не являются существенными, и мы не будем обсуждать эту сторону вопроса.

Если на векторном пространстве $E$ рассматриваются две гауссовские меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$, то возникают два ядра. Если эти ядра не совпадают по запасу элементов, то тогда не совпадают и пространства линейных измеримых функционалов, и вся ситуация делается для наших целей неинтересной. Если же по запасу элементов ядра совпадают, и совпадают гильбертово-сопряженные с ними пространства линейных измеримых функционалов, то это означает, что гильбертовы нормы $Q_i^{\frac{1}{2}}$ на (общем) ядре и сопряженные с ними нормы $q_i^{\frac{1}{2}}$ на (общем) пространстве классов эквивалентности линейных измеримых функционалов эквивалентны. Из эквивалентности этих норм, разумеется, в бесконечномерном случае не следует эквивалентность самих гауссовских мер, что иллюстрируется примером пропорциональных (с коэффициентом пропорциональности отличным от единицы) норм. Не эквивалентность, а более тесная близость этих норм обеспечивает эквивалентность гауссовских мер. Однако же для гауссовских фактор-пространств по разбиению $\eta$ на лучи, как будет показано, именно близость к пропорциональности служит критерием эквивалентности соответствующих гауссовских фактор-мер.

Для каждого гауссовского пространства с мерой рассмотрим измеримое (без $(\mathrm{mod}\,0)$-отождествления) разбиение $\eta$ на лучи, т.е. разбиение, задаваемое соотношением эквивалентности: для $\bar\omega, \bar{\bar\omega} \in E$

$$\bar\omega \sim \bar{\bar\omega} \iff \exists \theta \in \mathbb{R},\, \theta > 0 : \bar\omega = \theta \bar{\bar\omega}.$$

Измеримость этого разбиения следует из того, что это разбиение является теоретико-множественным супремумом возрастающей последовательности очевидно измеримых разбиений $\eta_k$, задаваемых соотношениями эквивалентности:

$$\bar\omega \sim \bar{\bar\omega} \iff \forall k\, \exists \theta_k \in \mathbb{R},\, \theta_k > 0 : \bar\omega_i = \theta \bar{\bar\omega}_i,\ i = 1, \ldots, k$$

Здесь $\omega_i$ – “координаты” элемента $\omega$ относительно какой-нибудь счетной разделяющей точки $E$ последовательности $f_i$ элементов пространства $F$: $\omega_i = \langle \omega, f_i \rangle$.

Можно всегда считать, что $f_i$ – это произвольная ортонормированная последовательность координатных функционалов, т.е. элементов гильбертова пространства $H'_\gamma$, образующая ортонормированный базис. При этом пространство $E$ с описанной выше $\sigma$-алгеброй, с гауссовской мерой $\gamma$, ядром $H_\gamma$ и пространством линейных измеримых функционалов $E'_\gamma$ реализуется с точностью до $(\mathrm{mod}\,0)$-линейного изоморфизма как пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ числовых последовательностей с пополненной цилиндрической $\sigma$-алгеброй, гауссовской стандартной мерой $N(0,1)$, т.е. произведением стандартных одномерных гауссовских распределений, подпространством $l^2 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в качестве ядра и сопряженным с ядром другим экземпляром $l^2$ в качестве пространства линейных измеримых функционалов. Такая реализация ядра меры $\gamma$ соответствует дискретному варианту координатной системы на $H_\gamma$, при котором элементы ядра реализуются как последовательности. Стандартность формы реализации ядра как пространства $l^2 = L^2(m)$, где $m$ – “считающая мера” на счетном множестве $\mathbb{N}$, как раз и связана с существованием на счетном множестве $\mathbb{N}$ такой стандартной меры. Возможность стандартизации, однако, утрачивается, когда возникает необходимость реализовать ядро (или пространство $E'_\gamma$) как $L^2$ по мере другого типа, включающего непрерывную компоненту. С этим нам и придется встретиться.

При одновременном рассмотрении пары гауссовских мер $\gamma_0$, $\gamma_1$, ядра которых совпадают как подпространства, возникают две эквивалентные гильбертовы нормы, т.е две положительно определенные квадратичные формы $Q_i(\omega) = \|\omega\|_i{}^2$, $i = 0, 1$ ("квадратичные формы рассеивания"). Желание найти для этой пары гауссовых мер общую для них "систему координат", т.е. подобный дискретному способ реализации ядра как гильбертова пространства $L^2$ функций на одном и том же множестве $M$ и с одним и тем же запасом "координатных подпространств", диктует необходимость рассмотрения пары таких квадратичных форм "в общем положении". Будем считать "основной" метрику на ядре, определяемую квадратичной формой $Q_0 := Q_{\gamma_0}$ и записывать скалярное произведение $(\omega', \omega'')_{H_{\gamma_0}}$ в этой метрике в виде $Q_0(\omega_0, \omega_1)$. Квадратичная форма $Q_1 := Q_{\gamma_1}$ выражается тогда через $Q_0$ следующим образом:

$$Q_1(\omega) = Q_0(A\omega, \omega), \quad \omega \in H_{\gamma_0}$$

где $A$ – некоторый положительный ограниченный и с ограниченным обратным самосопряженный оператор в пространстве $H_\gamma$. Как известно из теории самосопряженных операторов, в этом случае пространство $H_{\gamma_0}$ может быть таким образом реализовано как некоторое пространство $L^2(M, \mathfrak{A}, m)$, где $(M, \mathfrak{A})$ – борелевское пространство, $m$ – некоторая $\sigma$-конечная мера (ее можно считать вероятностной), что действие оператора $A$ сводится к умножению на некоторую измеримую положительную функцию $a\colon M \longrightarrow \mathbb{R}_+$, отделенную от 0 и от $\infty$. Полной системой инвариантов такого представления являются тип $\tau$ (класс эквивалентных мер) образа $\mathcal{L}(a; m) := m \circ a^{-1}$ меры $m$ при отображении $a$ ("распределения" $a$ относительно меры $m$) и функция кратности $s$, определенная с точностью до $\tau$-эквивалентности на множестве значений функции $a$ (или на $(M, \mathfrak{A}, m)/\zeta_a$) и равная размерности пространства $L^2$ по соответствующей рассматриваемому значению $a$ условной мере на элементе порождаемого функцией $a$ измеримого разбиения $\zeta_a$. Будем называть $\tau$ спектральным типом отношения квадратичных форм рассеивания данных двух гауссовских мер. Если $\tau(\mathcal{L}(a; m))$ – чисто дискретный тип, то речь идет о такой реализации пространства $H_{\gamma_0}$ в виде весового пространства $l^2_{(m_i)}$ (при желании можно считать, что $\forall i\ m_i = 1$), при котором пространство $(E, \gamma_0, \gamma_1)$ реализуется как пространство всех числовых последовательностей $\omega = (\omega_k)$, а гауссовские меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$ переходят в произведения одномерных нормальных распределений $N(0, m^{-1})$ и $N(0, \sigma_k^2 m^{-1})$ (квадратичные формы рассеивания этих распределений – это квадраты соответствующих этим мерам гильбертовых норм на общем по запасу элементов ядре, а последовательность $(\sigma_k^2)$ – это последовательность экстремальных чисел отношения квадратичных форм рассеивания). Если каждое число однократно, т.е. числа $\sigma_k^2$ попарно различны, это означает, что функция кратности тождественно равна единице. Функция $a$ – это функция, определенная (первоначально) на $H_{\gamma_0} = l^2_{(m_i)}$, действующая по правилу $a((\omega_k)) = (\sigma_k^{-2})$, оператор $A$ – это оператор умножения на $a$. Функцию кратности, рассматриваемая на множестве $I(A) := \operatorname{Im} a$ (различных) значений функции $a$, равна кратности соответствующего собственного числа оператора $A$ (значения функции $a$).

Каждому измеримому подмножеству $B$ множества $I(A) \subset \mathbb{R}$ или, если угодно, каждому борелевскому подмножеству $B$ числовой прямой отвечает соответствующее инвариантное подпространство $\operatorname{Inv}(B) \subset H_{\gamma_0}$ оператора $A$ – “координатное подпространство”, – и дизъюнктным подмножествам $B_i$ отвечают ортогональные координатные подпространства ядра и пересекающиеся только по нулевому подпространству координатные подпространства пространства всех последовательностей $E$.

В отличие от случая дискретного спектра оператора $A$, когда гауссовские меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гарантированно оказывались определенными на подмножествах пространства всех последовательностей (т.е. всех функций на спектральном множестве $I(A)$), при наличии у спектра отношения рассматриваемых квадратичных форм непрерывной компоненты гауссовские слабые распределения, соответствующие мерам $\gamma_0$ и $\gamma_1$, возникающие на пространстве $L^2(m)$ (для $\gamma_0$ это “белый шум”) нельзя реализовать как счетно-аддитивные гауссовские меры на пространстве всех классов эквивалентности функций на $I$ по мере $m$, что, конечно, не мешает говорить о распределении функции $a$ относительно меры $m$ или фактор-меры $m$ по разбиению $\zeta_a$, не зависящем от выбора такого расширения пространства $L^2(m)$, (например, пополнению по надлежащей более слабой норме), в которых рассматриваемые “шумы” становится настоящими гауссовскими мерами.

Вместо квадратичных форм рассеивания $Q$ можно, разумеется, говорить о сопряженных с ними корреляционных квадратичных формах $q(f) = \|f\|^2_{E'_\gamma}$ на сопряженном с ядром рассматриваемых гауссовских мер (гильбертовом) пространстве линейных измеримых функционалов $E'_\gamma$. Спектральный тип отношения корреляционных квадратичных форм – это образ спектрального типа отношения квадратичных форм рассеивания при отображении $x \to x^{-1}$. Именно с этими квадратичными формами и спектральным типом их отношения нам придется иметь дело.

**2. Эквивалентности и сингулярность.** Пусть $(E, \gamma_0, \gamma_1)$, как и прежде, – гауссовское вероятностное пространство для каждой из этих двух мер, причем их ядра $H_{\gamma_0}$ и $H_{\gamma_1}$ совпадают по запасу элементов, и соответствующие этим гауссовым мерам гильбертовы нормы на ядре эквивалентны. По этой причине у этих гауссовых вероятностных пространств общий запас линейных измеримых (рассматриваемых с точностью до эквивалентности) функционалов. Таким образом, пространства $E'_{\gamma_0}$ и $E'_{\gamma_1}$ совпадают по запасу элементов, и их гильбертовы нормы (квадраты которых суть ковариационные квадратичные формы $q_0$ и $q_1$) эквивалентны. Пусть $\tau'$ – спектральный тип отношения этих квадратичных форм $q_1/q_0$, т.е. тип некоторой борелевской меры на числовой прямой, и пусть $s$ – соответствующая функция кратности. Пусть $\eta$ – разбиение пространства $E$ на лучи. Наша ближайшая цель – доказать для фактор-мер $\gamma_i/\eta$, $i = 0, 1$, альтернативу "эквивалентность – сингулярность" и указать соответствующий критерий для проверки.

Точку $\sigma \in \mathbb{R}$ будем называть предельной спектральной точкой пары $\gamma_0$ и $\gamma_1$ (или пары соответствующих ковариационных форм $q_0$ и $q_1$), если для каждой окрестности $V$ этой точки соответствующее спектральное (координатное) подпространство $\mathrm{Inv}(V)$ пространства $E'_{\gamma_0}$ бесконечномерно. В частности, таким свойством всегда обладает любая точка носителя непрерывной компоненты спектрального типа отношения корреляционных квадратичных форм этой пары, им обладает каждая предельная точка множества всех точек дискретной составляющей спектрального типа, и обладает каждая точка дискретной составляющей, на которой функция кратности $s$ принимает бесконечное значение. Множество предельных точек пусто только в конечномерном случае.

**Предложение 1.** *Для того, чтобы фактор-меры $\gamma_0/\eta$ и $\gamma_1/\eta$ были* *взаимно сингулярны, достаточно, чтобы для пары гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ множество предельных точек спектрального типа $\tau'$ отношения их ковариационных квадратичных форм состояло более, чем из одной точки.*

**Доказательство.** Рассмотрим сперва случай, когда в спектральном типе $\tau'$ присутствует непрерывная компонента. Пусть $\sigma', \sigma'' \in \mathbb{R}$, $\sigma' < \sigma''$ – две точки, принадлежащие носителю непрерывной компоненты спектра. Рассмотрим какое-нибудь координатное (т.е. инвариантное относительно оператора $A$) подпространство $E'_{\gamma_0,1} \subset E'_{\gamma_0}$, на котором построенная для этого подпространства спектральная функция кратности отношения ограничений на это подпространство ковариационных квадратичных форм равна единице, а спектральный тип – максимальный, т.е. по-прежнему $\tau'$. Выбранное подпространство $E'_{\gamma_0,1}$ реализуется как $L^2(m)$, где мерой $m$ на прямой $\mathbb{R}$ может служить любая локально-конечная $\sigma$-конечная мера, имеющая тип $\tau'$ (канонического выбора представителя не существует), а функция $a$ – это тождественное отображение $a = \mathrm{id}\colon \sigma \longrightarrow \sigma$.

Зафиксируем такие малые окрестности $V'$ и $V''$ точек $\sigma'$, $\sigma''$, что для некоторой положительной константы $b > 1$ для любых двух точек $x' \in V'$ и $x'' \in V''$ выполняется неравенство

$$\frac{x''}{x'} > b. \tag{$*$}$$

В каждом из множеств $V'$ и $V''$ выделим некоторый счетный набор попарно непересекающихся существенных (непренебрежимых) по типу $\tau'$ подмножеств $\{B'_k\}$ и, соответственно, $\{B''_k\}$, $k = 1, \dots$ (т.е. попросту таких, что их $m$-меры положительны). Рассмотрим теперь последовательность

$$(\mathbb{1}_{B'_k}, \mathbb{1}_{B''_k}), \quad k = 1, \dots$$

пар элементов пространства $E'_{\gamma_0,1} = L^2(m)$ Все эти элементы попарно ортогональны по обеим метрикам $q_0$ и $q_1$, принадлежат разным спектральным подпространствам и, следовательно, для каждого $k$ образы гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ при отображении гауссовского вероятностного пространства $(E, \gamma_0)$ в (на) координатную плоскость $E_k := \mathbb{R}^2$

$$E \ni \omega \longrightarrow (\langle \omega, \mathbb{1}_{B'_k} \rangle, \langle \omega, \mathbb{1}_{B''_k} \rangle) \in E_k = \mathbb{R}^2$$

– это пара двумерных гауссовских продакт-мер $N(0,\Sigma_{0,k})$ и $N(0,\Sigma_{1,k})$ на двумерном координатном пространстве $E_k$, элементы которого мы будем обозначать $(\bar\omega,\bar{\bar\omega})$. Для диагональных элементов двух их ковариационных матриц

$$\Sigma_{0,k}=\begin{pmatrix}{\sigma'_{0,k}}^2 & 0\\ 0 & {\sigma''_{0,k}}^2\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\Sigma_{1,k}=\begin{pmatrix}{\sigma'_{1,k}}^2 & 0\\ 0 & {\sigma''_{1,k}}^2\end{pmatrix}$$

выполняются соотношения:

$${\sigma'_{0,k}}^2=\int(\mathbb{I}_{B'_k}(\sigma))^2m(d\sigma),\qquad {\sigma''_{0,k}}^2=\int(\mathbb{I}_{B''_k}(\sigma))^2m(d\sigma),$$

$${\sigma'_{1,k}}^2=\int\sigma\cdot(\mathbb{I}_{B'_k}(\sigma))^2m(d\sigma),\qquad {\sigma''_{1,k}}^2=\int\sigma\cdot(\mathbb{I}_{B''_k}(\sigma))^2m(d\sigma),$$

откуда и из неравенства $(*)$ получаем

$$\frac{{\sigma''_1}^2}{{\sigma'_1}^2}=\beta\frac{{\sigma''_0}^2}{{\sigma'_0}^2}, \tag{$**$}$$

где $\beta\geqslant b>1$.

Для каждого $k$ на пространстве $E_k$ рассмотрим свое разбиение на лучи $\eta_k$. С учетом $(**)$ находим, что существует такая константа $c$, $c<1$, что для каждого $k$ интеграл Хеллингера (см., например, [6]) двух фактор-мер

$$\mathrm{H}(N(0,\Sigma_{0,k}/\eta_k),N(0,\Sigma_{1,k}/\eta_k))=\int\limits_{E_k/\eta_k}(dN(0,\Sigma_{0,k}/\eta_k)dN(0,\Sigma_{1,k}/\eta_k))^{\frac12}$$

не превосходит $c$. Действительно, величина интеграла Хеллингера H зависит только от распределения производной Радона–Никодима, и в нашем случае не изменится от замены $N(0,\Sigma_{0,k})$ на стандартное двумерное гауссовское распределение $N(0,I)$, а $N(0,\Sigma_{1,k})$ на $N(0,\Sigma_k)$, где

$$\Sigma_k=\begin{pmatrix}\frac{{\sigma'_{1,k}}^2}{{\sigma'_{0,k}}^2} & 0\\ 0 & \frac{{\sigma''_{1,k}}^2}{{\sigma''_{0,k}}^2}\end{pmatrix}.$$

Обозначая ${\sigma'_k}^2:=\frac{{\sigma'_{1,k}}^2}{{\sigma'_{0,k}}^2}$ и ${\sigma''_k}^2:=\frac{{\sigma''_{1,k}}^2}{{\sigma''_{0,k}}^2}$, получаем

$$\mathrm{H}(N(0,\Sigma_{0,k}/\eta_k),N(0,\Sigma_{1,k}/\eta_k))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{{\sigma'_k}^2{\sigma''_k}^2}{({\sigma'_k}^2\cos^2\varphi+{\sigma''_k}^2\sin^2\varphi)^{\frac12}}d\varphi,$$

откуда и выводится строгое монотонное убывание интеграла Хеллингера по отношению к величине $\beta \geqslant 1$ из формулы (**) и неравенства для $c$ с учетом того факта, что при $\beta = 1$ интеграл Хеллингера равен 1.

Рассмотрим бесконечное прямое произведение $E_{\infty,2} = \times_{k=1}^{\infty} E_k$ двумерных координатных пространств и на нем пару гауссовских мер – произведений $\bigotimes_k N(0, \Sigma_{0,k})$ и $\bigotimes_k N(0, \Sigma_{1,k})$. На множестве $E_{\infty,2}$ рассмотрим измеримое по каждой из этих гауссовских мер разбиение $\eta_{\infty,2}$, задаваемое соотношением эквивалентности $\bar{\omega}_{\infty,2} = ((\bar{\omega}'_k, \bar{\omega}''_k)) \sim \bar{\bar{\omega}}_{\infty,2} = ((\bar{\bar{\omega}}'_k, \bar{\bar{\omega}}''_k))$, если для каждого $k$ найдется такая положительная константа $\theta_k$, что $(\bar{\bar{\omega}}'_k, \bar{\bar{\omega}}''_k) = \theta_k(\bar{\omega}'_k, \bar{\omega}''_k)$. Разбиение $\eta_{\infty,2}$ пространства $E_{\infty,2}$ является более грубым, чем разбиение $\eta_\infty$ на лучи. Фактор-пространство пространства $E_{\infty,2}/\eta_{\infty,2}$ – это произведение $\times_k(E_k/\eta_k)$ и, следовательно, фактор-меры на $E_{\infty,2}/\eta_{\infty,2}$ – это произведения фактор-мер, возникающих на фактор-пространствах $E_k/\eta_k$.

Поскольку интеграл Хеллингера двух произведений мер равен произведению интегралов Хеллингера для сомножителей, в нашем случае получается, что интеграл Хеллингера $H(\gamma_0/\eta_{\infty,2}, \gamma_1/\eta_{\infty,2})$ равняется нулю, что означает сингулярность наших гауссовских мер на $\sigma$-алгебре, порожденной разбиением $\eta_{\infty,2}$, т.е. возможность разделения этих гауссовских мер каким-то измеримым $\eta_{\infty,2}$-множеством. Но поскольку используемое разбиение $\eta_{\infty,2}$ пространства $E_\infty$ более грубое, чем разбиение этого же пространства на лучи $\eta_\infty$, что означает, что каждое $\eta_{\infty,2}$-множество является и $\eta_\infty$-множеством, т.е. если две меры сингулярны относительно разбиения $\eta_{\infty,2}$, то они сингулярны и относительно более тонкого разбиения $\eta_\infty$.

Все последние рассуждения относились к подпространству $E'_{\gamma_0,1} \subset E'_{\gamma_0}$, т.е. фактически к мерам на факторпространстве пространства $(E, \gamma_0)$ по аннулятору ${E'_{\gamma_0,1}}^\circ$. Тем самым доказано, что проекции мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$, порожденные ортогональным проектированием ядра меры на его координатное подпространство, на котором спектр отношения квадратичных форм рассеивания простой, разделяются разбиением $\eta_\infty$ этого подпространства на лучи. Но отсюда следует, что сами это меры разделяются разбиением пространства $E$, порождаемым некоторым семейством измеримых полупространств, а, следовательно, подавно разделяются разбиением, порождаемым семейством всех измеримых полупространств, т.е. разбиением на лучи. Предложение 1 доказано для того случая, когда спектральный тип $\tau'$ содержит непрерывную компоненту.

Перейдем к чисто дискретным типам. Если найдется такое координатное подпространство пространства $E'_{\gamma_0,1}$, для которого функция кратности равна единице, тип – максимальный, и существуют по крайней мере две предельные спектральные точки пары ограничений ковариационных квадратичных форм на $E'_{\gamma_0,1}$ (что невозможно, если спектральный тип $\tau'$ отвечает дискретной мере, носитель которой имеет менее двух предельных точек, например – конечен), то ход предыдущих рассуждений можно просто повторить. В любом случае найдется такая последовательность пар $(\sigma'_k, \sigma''_k)$, для которой $\sigma'_k \to \sigma'$, $\sigma''_k \to \sigma''$ где $\sigma' \neq \sigma''$, и для каждой нагруженной в смысле типа $\tau'$ точки $\tilde{\sigma}$ количество тех индексов $k$, для которых $\sigma'_k = \tilde{\sigma}$ или $\sigma''_k = \tilde{\sigma}$, не превосходит кратности $s(\tilde{\sigma})$. При выполнении этого условия, как и прежде, в пространстве $(E, \gamma_0, \gamma_1)$, рассматриваемом теперь как пространство последовательностей с парой произведений гауссовских одномерных распределений (распределений координатных функционалов) выделяется некоторое координатное подпространство $E_\infty \subset E$, представимое в виде произведения двумерных координатных подпространств $E_k$, на каждом из которых интеграл Хеллингера $c_k$ фактор-мер по разбиению на лучи для возникающих двумерных гауссовских распределений (соответствующих координатных проекций мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$) отделен от единицы некоторой константой, зависящей только от логарифма диаметра носителя множества всех предельных спектральных точек $\gamma_0$ и $\gamma_1$. Очевидно, произведение всех чисел $c_k$ равно нулю, и, как и прежде, теорема Какутани–Хеллингера, дающая критерий эквивалентности двух бесконечных произведений попарно эквивалентных мер, приводит к заключению о сингулярности мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на конической $\sigma$-алгебре, чем и завершается доказательство Предложения 1.

**Предложение 2.** *Пусть спектральный тип $\tau'$ отношения ковариационных квадратичных форм $q_0$ и $q_1$ двух гауссовских мер на одном пространстве $E$ имеет единственную предельную точку $\sigma_\infty$. В этом случае для того, чтобы фактор-меры $\gamma_0/\eta$ и $\gamma_1/\eta$ были взаимно абсолютно непрерывны, необходимо и достаточно, что-*

*бы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - \sigma_\infty)^2. \qquad (***)$$

Здесь $\sigma_k$ – точки нагрузок (дискретного) типа $\tau'$.

**Доказательство.** Достаточность этого условия легко вытекает из хорошо известного критерия абсолютной непрерывности двух гауссовских продакт-мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на пространстве последовательностей $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, который является простым следствием уже использовавшейся теоремы Какутани–Хеллингера и заключается в сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\sigma_k - \sigma_\infty)^2$$

Единственность предельной точки как раз и означает, что пространство $E$ с двумя гауссовскими мерами можно реализовать в виде произведения одномерных пространств, т.е. таким образом, что критерий Какутани–Хеллингера оказывается непосредственно применимым. При этом, поскольку гомотетии не меняют значения мер на конических множествах, для простоты можно считать, что $\sigma_\infty = 1$, т.е. мера $\gamma_0$ – стандартная в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (произведение мер $N(0,1)$), а мера $\gamma_1$ – произведение такой последовательности одномерных гауссовских распределений $N(0,\sigma_k^2)$, что последовательность $\sigma_k$ имеет единственную предельную точку $\sigma_\infty$. В противном случае, по Предложению 1, рассматриваемые гауссовские меры были бы сингулярны уже на конической $\sigma$-алгебре, следовательно, подавно сингулярны и на борелевской ($\equiv$цилиндрической) $\sigma$-алгебре.

Заметим, что единственность предельной точки $\sigma_\infty$ последовательности $\sigma_k$ не означает, что у множества всех (различных) чисел $\sigma_k$ существует хоть одна предельная точка, это множество может быть конечным, кратность всех точек, кроме одной, конечна, а равенство $\sigma_k = \sigma_\infty$ достигается для почти всех значений $k$.

Мы будем использовать конструкции, подобные применявшимся при доказательстве Предложения 1. Пространство последовательностей $E$ с продакт-мерами $\gamma_0$ и $\gamma_1$ будет представлено в виде прямого произведения двумерных координатных пространств $E_k$: $E = \times_k E_k$, на каждом из которых заданы две гауссовские меры $\gamma_{0,k} = N(0, I_2)$ ($I_2$ – единичная матрица $2\times 2$) и $\gamma_{1,k} = N(0,\Sigma_{1,k})$, где

$$\Sigma_{1,k} = \begin{pmatrix} {\sigma'_{1,k}}^2 & 0 \\ 0 & {\sigma''_{1,k}}^2 \end{pmatrix}$$

– ковариационная матрица распределений $k$-той пары координат относительно гауссовской меры $\gamma_1$. Эти двумерные гауссовские распределения рассматриваются на конической $\sigma$-алгебре $\eta_k$. Поскольку, как отмечалось, гомотетии меры не меняют меру на конических множествах, за счет гомотетии, своей на каждом сомножителе $E_k$, можно считать, что один из диагональных элементов матрицы $\Sigma_{1,k}$, например, ${\sigma''_{1,k}}^2$ равен единице, а ${\sigma'_{1,k}}^2 \geqslant 1$. Мы подсчитаем величину интеграла Хеллингера H для этих мер на конической $\sigma$-алгебре, и если бесконечное произведение таких интегралов Хеллингера окажется расходящимся (к нулю), это будет означать взаимную сингулярность мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на произведении двумерных конических $\sigma$-алгебр, порожденных разбиениями $\eta_k$ пространств $E_k$ на лучи, а, следовательно, и на конической $\sigma$-алгебре, порожденной разбиением $\eta$ на лучи.

Рассмотрим же на пространстве последовательностей $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ стандартную гауссовскую меру $\gamma_0$ и сингулярную относительно нее меру $\gamma_1 = \otimes_{k\in\mathbb{N}} N(0, \sigma_k^2)$. Пусть сперва среди чисел из последовательности $(\sigma_k)$ бесконечно часто встречается значение 1, так что $\sigma_\infty = 1$. Составим последовательность пар $(\sigma_{2k}, \sigma_{2k+1})$, осуществив, если требуется, предварительно перенумерацию, таких, что $\sigma_{2k+1} = 1$. Пусть $E_k$ – это двумерное координатное пространство, отвечающее индексам $2k$ и $2k+1$. Ввиду предположенной взаимной сингулярности мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ мы можем считать, что ряд $\sum_k (\sigma_{2k} - 1)^2$ расходится. Мы покажем, что тогда и бесконечное произведение H интегралов Хеллингера

$$\mathrm{H}(N(0, \Sigma_{0,k})/\eta_k, N(0, \Sigma_{1,k})/\eta_k)$$

расходится. Конечно, интеграл Хеллингера не превосходит единицу. Оценим порядок близости такого интеграла Хеллингера к единице в терминах малости величины $|\sigma - 1|$. Прямые подсчеты показывают, что плотность проекции по лучам двумерной гауссовской меры $N(0, \Sigma_\sigma)$, где

$$\Sigma_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

на центральную окружность единичного радиуса с равномерным вероятностным распределением на ней равна

$$\frac{\sigma}{\sigma^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi},$$

откуда

$$\mathrm{H}(N(0,\Sigma_\sigma)/\eta, N(0,I_2)/\eta) = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sigma^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d}{d\sigma} \mathrm{H}(N(0,\Sigma_\sigma)/\eta, N(0,I_2)/\eta) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 1$$

(что не удивительно, поскольку при $\sigma = 1$ наш интеграл Хеллингера достигает своего максимального значения 1). Значение в точке $\sigma = 1$ второй производной интеграла Хеллингера H по $\sigma$ равняется -$\frac{1}{8}$. Отсюда вытекает, что

$$\mathrm{H}(N(0,\Sigma_\sigma)/\eta, N(0,I_2)) = 1 - \frac{1}{8}(\sigma - 1)^2 + o((\sigma-1)^2).$$

Поэтому если ряд $\sum(\sigma_k - 1)^2$, как это мы предположили, расходится, это означает, что расходится и ряд, составленный из логарифмов соответствующих этим точкам $\sigma_k$ значений интегралов Хеллингера, а тогда расходится к нулю и бесконечное произведение самих интегралов, т.е. меры $\gamma_0/\eta$ и $\gamma_1/\eta$ оказываются взаимно сингулярными.

Если теперь спектральная кратность предельной точки 1 конечна, это мало что меняет: для доказательства сингулярности фактор-мер следует вместо соответствующей расходящемуся ряду последовательности слагаемых $(\sigma_k - 1)^2$ рассматривать обладающую таким же свойством последовательность $(\sigma_i/\sigma_{k_i} - 1)^2$, где выбранная предварительно подпоследовательность $(\sigma_{k_i}$ стремится к спектральной предельной точке 1 так быстро, что расходимость не утрачивается, и по-прежнему мы приходим к нулевому бесконечному произведению интегралов Хеллингера фактор-мер на двумерных прямых слагаемых, означающему сингулярность фактор-мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ по некоторому (продакт-)разбиению, более грубому, чем $\eta$, а, следовательно, и по $\eta$.

Утверждения Предложений 1 и 2 объединим в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Две сепарабельные центрированные меры $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на одном векторном пространстве $E$, превращающие его каждое в гауссовское вероятностное пространство, эквивалентны на $\sigma$-подалгебре конических подмножеств тогда и только тогда, когда образ $\gamma_1 \circ \theta^{-1}$ при некоторой гомотетии с положительным коэффициентом $\theta$ одной из этих мер оказывается эквивалентным в обычном смысле другой мере. В противном случае эти меры взаимно сингулярны.*

**3. Логарифмический разброс спектральных значений отношения квадратичных форм и логарифмическая вариация плотностей гауссовских фактор-мер.** Здесь будет показано, что если для двух гауссовских мер в конечномерном пространстве $E$ логарифмическая длина носителя спектра отношения их ковариационных форм (т.е. логарифм отношения максимального и минимального экстремальных чисел) задана, то минимальная возможная логарифмическая длина носителя распределения производной Радона–Никодима их фактор-мер по разбиению на лучи стремится к бесконечности, если размерность пространства $E$ неограниченно возрастает. Похоже, что в бесконечномерном случае плотность двух несовпадающих фактор-мер не может быть отделена и от нуля, и от бесконечности, если она, конечно, вообще существует.

В конечномерном случае для эквивалентных центрированных гауссовских мер $\gamma_0$ и $\gamma_1$ на векторном пространстве $E$ можно найти явное выражение для плотности $d\gamma_1/d\gamma_0$ на конической $\sigma$-алгебре. Реализуем фактор-пространство $E/\eta$ как сферу в $E$ единичного радиуса в метрике, в которой $\gamma_0$ – стандартная гауссовская мера. Пусть $E$ реализовано как координатное евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, и пусть распределения координатных функционалов $e_k$ задаются равенствами

$$\mathcal{L}(e_k;\gamma_1) = N(0,\sigma_k^2) \quad k = 0,\ldots,n,$$

так что квадратичная форма рассеивания $Q_1(\omega)$, $\omega \in E$, $\omega = (\omega_0,\ldots,\omega_n)$ задается равенством

$$Q_1(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k^2}{\sigma_k^2}.$$

Плотность $p_{1,0}$ проекции по лучам $\gamma_1/\eta_{n+1}$ меры $\gamma_1$ относительно такой же проекции стандартной меры $\gamma_0$, т.е. $d\gamma_1/d\gamma_0$, выражается формулой

$$p_{0,1}(\omega) = (\prod_{k=0}^{n} \sigma_k^{-1})(\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_k^2}{\sigma_k^2})^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Отсюда и из свойств квадратичных форм непосредственно видно, что если $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \cdots \leqslant \sigma_n$, то наибольшее значение производной Радона–Никодима равно

$$\max p_{0,1} = \frac{\sigma_n^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} \sigma_k},$$

а минимальное значение равно

$$\min p_{0,1} = \frac{\sigma_0^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n} \sigma_k},$$

так что отношение этих значений равно

$$\frac{\max p_{0,1}}{\min p_{0,1}} = (\frac{\sigma_n}{\sigma_0})^{n+1}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

**Предложение 3.** *Пусть $\gamma_0$ и $\gamma_1$ – две эквивалентные центрированные гауссовские меры конечной размерности $n$. Тогда вариация логарифма их плотности $\log \frac{d\gamma_1}{d\gamma_0}$ равна логарифму диаметра носителя спектрального типа отношения их ковариационных форм, помноженному на $n$.*

Таким образом, для больших размерностей уже малое различие ковариационных квадратичных форм по равномерной метрике приводит к большому разбросу значений плотности на конической $\sigma$-алгебре. Верно ли, что в бесконечномерном случае такая плотность не может быть ограниченной, если только отлична от единицы?

## Литература


1. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Матем. сборник **25 (67)**, № 1 (1949), 107–150.
2. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* Труды МИАН, т. 141, 1976.
3. V. N. Sudakov, *Gaussian measures. A brief survey.* Rendiconti dell'istituto di matematica dell'università di Trieste. vol. XXVI, 1994, supplemento. pp. 289–325.

4. В. Н. Судаков, *Замечания о модификациях случайных процессов.* — В кн.: ЗНС ПОМИ, т. 194, Проблемы теории вероятностных распределений. 12. С.-Петербург, "Наука", 1992, с. 150–169.
5. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* Киев, ТВiМС, 1995.
6. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* М., "Наука", 1989.

Rovski V. A., Sudakov V. N. Equivalence and singularity of Gaussian measures on the conic sigma-subfield.

The alternative: equivalence-singularity on the conic sigma-field is established for a pair of centered Gaussian distributions, and a corresponding criterion is given. Behavior of the logarithmic variation is established for the Radon–Nikodym derivative on the conic sigma-subfield.

С.-Петербургский государственный университет
С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 декабря 2000 г.